МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра МАТЕМАТИКИ

С.С.Качержук, Н.А.Рустамов, Ю.А.Фарков

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Москва
2011

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие…………………………………………………………………3

1. Начальные сведения о функциях

1.1. Понятие числовой функции……………………………………..4
1.2. Операция композиции и класс элементарных функций……………..7
1.3. Определение предела функции в точке…...………………………10
1.4. Основные свойства предела функции……………………………..14
1.5. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ ……………………………15
1.6. Непрерывность функции в точке…………………………………...17
1.7. Непрерывность функции на интервале и на отрезке……..……….18
1.8. Понятие производной…………………………………………………20

2. Исследование функции с помощью производной

2.1. Признаки возрастания и убывания функций……….……………..23
2.2. Локальные экстремумы и теорема Ферма…………….……....…23
2.3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба……………….……….25
2.4. Схема исследования функции………………………….…………26
2.5. Примеры исследования функций и построения графиков…...……..28
2.6. Задания для самостоятельной работы………...………...…………..44

3. Дополнительные сведения о построении графиков функций

3.1. Преобразования графиков функций……………………..…………..48
3.2. О графиках основных элементарных функций…………..……….52
3.3. Построение графиков функций методом перемасштабирования и переноса координатных осей……………………………………..59
3.4. Построение графиков функций, содержащих модули…………….65
3.5. Графики функций в полярных координатах……………………….70

Литература…………………………………...……………………..73

Предисловие

Современная геология представляет собой одно из наиболее математизированных научных направлений, открывающих широкие возможности для применения компьютерных технологий [11, 14]. При изучении конкретных задач геологии часто приходится исследовать различные теоретические или эмпирические зависимости между различными переменными. Например, в гидрогеологии [12] динамика уровня воды $S(t)$ в скважине при откачке с постоянным дебитом Q в период квазистационарного режима описывается формулой

$$S=\frac{Q}{4T\pi}\ln\frac{2{,}25a}{r^2}+\frac{Q}{4T\pi}\ln t,$$

где $T-$ параметр проводимости, $a-$параметр пьезепроводимости, $t-$время. Другой пример [13]: изучение износа алмазных импрегнированных коронок при бурении диабазов при определенных предположениях приводится к рассмотрению дифференциального уравнения вида $\frac{dz}{dr}=\frac{\sqrt{D^2/4-r^2}}{r}$, где z-высота матрицы (функция расстояния от оси коронки), r - радиус элемента торца, D - радиус бурения (полагается постоянной). Частное решение этого уравнения представляет собой функцию

$$z=\sqrt{D^2/4-r^2}-\frac{D}{2}\ln\left|\frac{D/2+\sqrt{D^2/4-r^2}}{r}\right|,$$

графиком которой является известная кривая – *трактриса*. Для изучения даже не самых сложных функциональных зависимостей, подобных приведенным выше, специалист должен владеть методами анализа поведения функций и построения графиков.

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. При изучении свойств числовой функции и построении ее графика применяются методы элементарной алгебры, теории пределов и дифференциального исчисления (необходимо уметь вычислять производные функций, исследовать функцию на экстремумы, выпуклость, вогнутость, а также находить точки перегиба и уравнения асимптот графика функций).

Предлагаемое пособие написано в соответствии с рабочими программами по математическим дисциплинам для студентов всех факультетов Российского государственного геологоразведочного университета, в том числе, обучающихся по вечерней, заочной и дистанционной формах. В пособии подробно разбираются понятия, необходимые для понимания основных свойств функций, рассматривается общая схема исследования функции, приводятся примеры и задания для самостоятельной работы.

1. Начальные сведения о функциях

1.1. Понятие числовой функции

В реальном мире часто приходится иметь дело с парами переменных величин, значения одной из которых (зависимой) изменяются в зависимости от значений второй (независимой). Например, при равномерном движении скорость v постоянна, а путь s линейно зависит от времени: $s = vt$. Независимую переменную называют *аргументом,* а зависимую переменную – *функцией.* Поэтому можно сказать, что в приведенном примере s есть функция t.

Напомним определение *числовой функции.* Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть по некоторому определенному закону каждому числу a из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное число b, тогда говорят, что на X задана функция f и пишут $b = f(a)$. Здесь через $f(a)$ обозначено *значение,* принимаемое функцией f в точке a. Множество X, на котором задана функция f обозначают $D(f)$ и называют *областью определения* функции f. Саму функцию f часто обозначают через $y = f(x)$ (или $f(x)$), где x – независимая переменная или аргумент, а y – зависимая переменная. Независимая переменная x может принимать любое значение из множества $D(f)$. Функция f задана, если, во-первых, указана область определения $D(f)$ этой функции и, во-вторых, указано правило, позволяющее по каждому значению аргумента x из множества $D(f)$ находить соответствующее ему значение y функции f.

Если функция f задана формулой, причем область определения этой функции специально не оговорена, то в качестве $D(f)$ выбирают так называемую *естественную область определения,* т.е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Например, если функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, то полагают $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Множеством значений функции f называют множество $E(f)$, состоящее из всех значений, принимаемых функцией f на множестве $D(f)$, то есть, по определению, $E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$. Например, если $f(x) = \sin x$, то $D(f) = \mathbf{R}$ и $E(f) = [-1, 1]$.

Если функция f задана на множестве X и принимает значения в Y (т.е. $E(f) \subset Y$), то говорят, что f *отображает* множество X в Y и пишут $f: X \to Y$ (термины "функция" и "отображение" используются как синонимы).

Графиком функции f называют множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$. Иначе говоря, график функции f – это множество

$$\Gamma(f) = \{(x, y): y = f(x), x \in D(f)\}.$$

Таким образом, график функции f состоит из точек плоскости Oxy, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями переменной y. Если график функции f пересекает ось Ox, то абсциссы точек пересечения совпадают с корнями уравнения $f(x)=0$. Если число 0 принадлежит $D(f)$, то график функции f пересекает ось Oy в точке с координатами $x=0, y=f(x)$.

Функция f называется *четной,* если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x)=f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции не меняется). График чётной функции симметричен относительно оси Oy. Примеры четных функций: $y=|x|$, $y=x^2$, $y=\cos x$.

Функция f называется *нечетной,* если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x)=-f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции тоже меняет знак). График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры нечетных функций: $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{arctg} x$.

Функция f называется *ограниченной,* если существуют числа m и M такие, что

$$m < f(x) < M \text{ для всех } x \in D(f)$$

(график такой функции расположен в полосе между прямыми $y=m$ и $y=M$). Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены.

Число $T \neq 0$ называется *периодом* функции f, если для любого $x \in D(f)$ выполнены равенства

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Функция f, имеющая период, называется *периодической.* Наименьший положительный период функции f называется *основным* периодом этой функции. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют основной период $T=2\pi$.

Пусть множество A содержится в области определения функции f (т.е. $A \subset D(f)$). Говорят, что функция f является *возрастающей* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента x на A соответствует большее значение $f(x)$). Например, функция $y = x^2$ является возрастающей на промежутке $[0, \infty)$. Говорят, что функция f является *убывающей* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента x на A соответствует меньшее значение $f(x)$). Например, функция $y = \sin x$ является убывающей на отрезке $[\pi/2, \pi]$.

Историческая справка. В 1718 г. Иоганн Бернулли определял функцию как "переменную величину, заданную аналитическим выражением, составленным из переменной x и постоянных величин". Эйлер отмечал, что "когда некоторое количество зависит от других таким образом, что при изменении последних и сами подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых". Н.И. Лобачевский писал: "Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе". В одной из работ Дирихле (1837 г.) можно прочитать: "Будем понимать под a и b два фиксированных значения, а под x – переменную величину, принимающую все значения, расположенные между a и b. Если теперь каждому x соответствует одно единственное конечное y и притом так, что когда x непрерывно пробегает интервал от a до b, $y = f(x)$ также непрерывно изменяется, то y называется непрерывной функцией от x для этого интервала. При этом совсем необязательно представлять себе ее в виде зависимости, выраженной при помощи математических операций. Геометрически представленная (т.е. если мыслить x и y как абсциссу и ординату), непрерывная функция оказывается связной кривой, на которой всякой содержащейся между a и b абсциссе соответствует только одна точка. Это определение не приписывает какого-либо закона отдельным частям кривой; она может быть составлена из различного рода частей или же может быть мыслима совсем лишенной какого-либо закона. Отсюда вытекает, что такая функция может рассматриваться как полностью определенная для некоторого интервала, если она или задана графически для всего интервала, или же для отдельных частей его подчинена различным математическим законам. Если функция определена только для одной части интервала, то способ ее продолжения на остающийся интервал оказывается совершенно произвольным". Определение функции как отображения одного множества на другое сформировалось в конце

XIX – начале XX вв. и в настоящее время приводится в школьных и университетских учебниках.

1.2. Операция композиции и класс элементарных функций

Пусть даны две функции f и g, причем множество значений функции f содержится в области определения функции g (т.е. $E(f) \subset D(g)$). Тогда функция h, заданная для $x \in D(f)$ по формуле $h(x) = g(f(x))$, называется *композицией* функций f и g (обозначение: $h = g \circ f$). Иногда функцию $h(x) = g(f(x))$ называют *сложной функцией,* полученной из f и g. Например, $g(t) = \sin t$ и $f(x) = 7x + 9$, то

$$h(x) = (g \circ f)(x) = \sin(7x + 9).$$

Функция f называется *элементарной,* если она получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции композиции. При этом к числу *основных элементарных функций* относят:

– функции-константы (т.е. функции вида $f(x) = C$, где $C - const$);

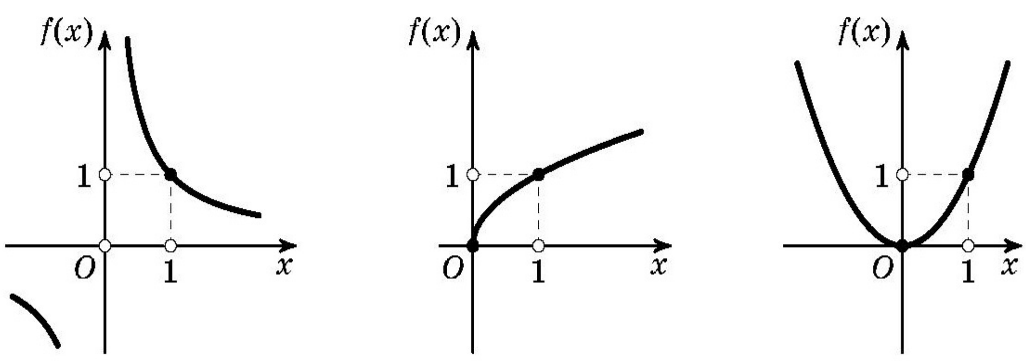
– степенные функции x^{α} (показатель α может быть любым действительным числом);

– показательные функции a^x, $a > 0$, $a \neq 1$;

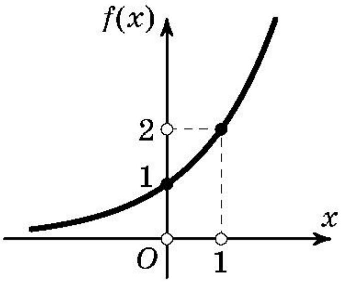
– логарифмические функции $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

– тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;

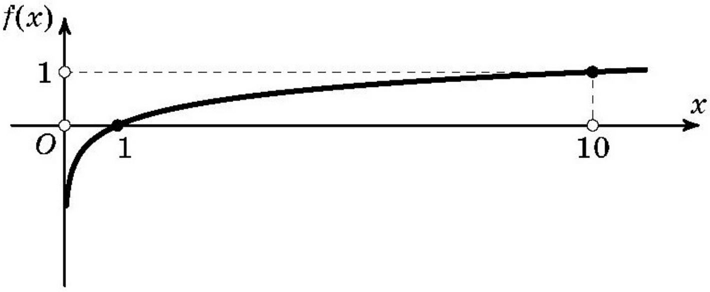
– обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.



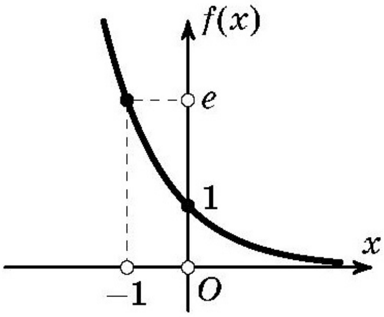
$f(x) = 1/x = x^{-1}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ $\qquad$ $f(x) = x^2$



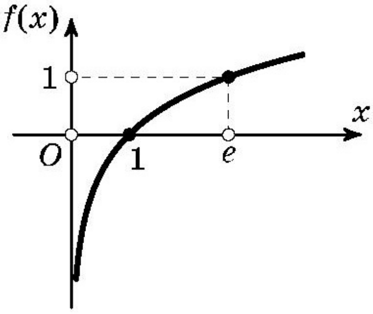
$f(x) = 2^x$



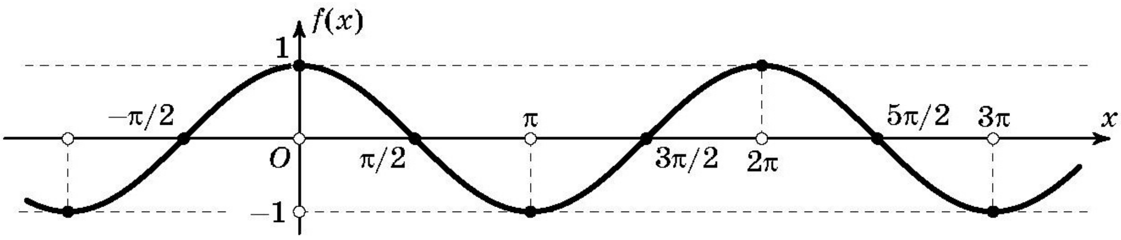
$f(x) = \log_{10} x$



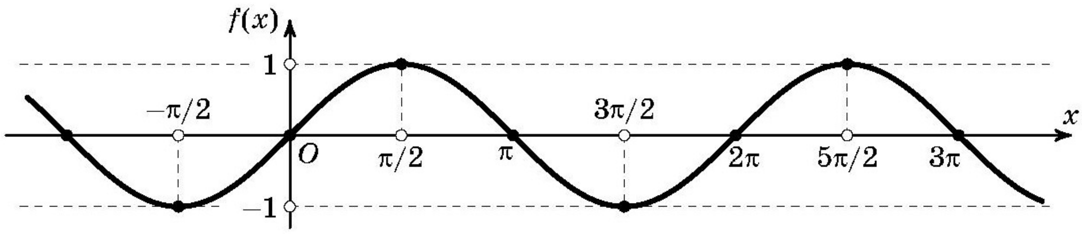
$f(x) = e^{-x} = (1/e)^x$



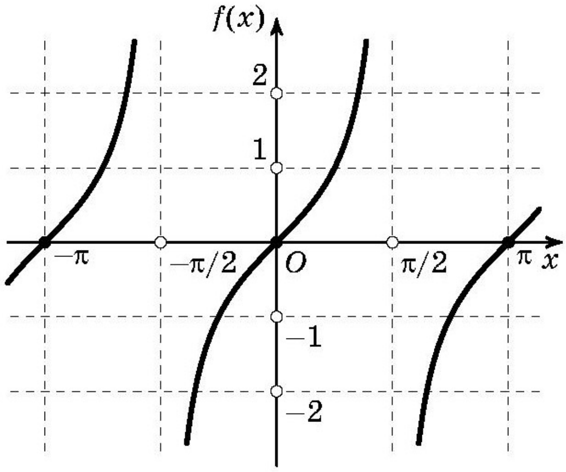
$f(x) = \ln x = \log_e x$



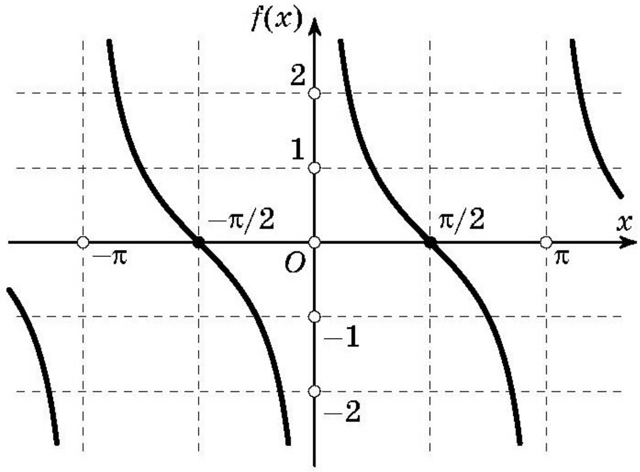
$f(x) = \cos x$



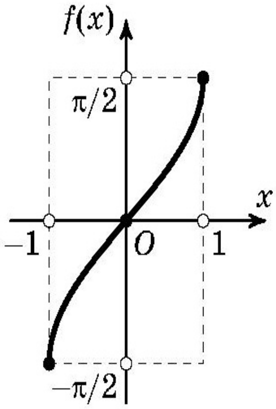
$f(x) = \sin x$



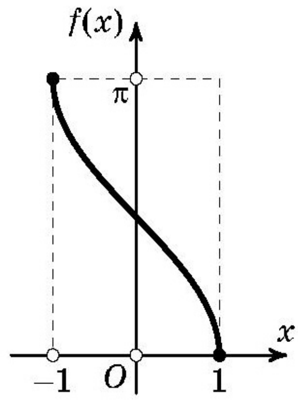
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$



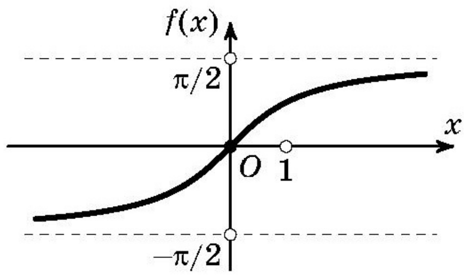
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$



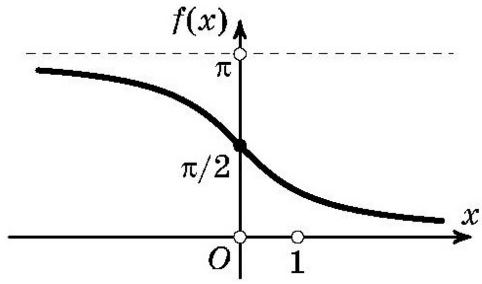
$f(x) = \arcsin x$



$f(x) = \arccos x$



$f(x) = \mathrm{arctg}\, x$



$f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$

Напомним простейшие преобразования графиков функций (подробнее об этих преобразованиях см. в разделе 3).

Обозначим через $\Gamma = \Gamma(f)$ график функции $y = f(x)$. Имеют место следующие свойства:

1) график функции $y = f(-x)$ симметричен Γ относительно оси Oy;

2) график функции $y = -f(x)$ симметричен Γ относительно оси Ox;

3) график функции $y = -f(-x)$ симметричен Γ относительно начала координат;

4) график функции $y=f(ax)$ $(a>0)$ получается сжатием Г к оси Oy (т.е. вдоль оси Ox) в a раз при $a>1$ или растяжением от оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$;

5) график функции $y=f(x-\alpha)$ получается параллельным сдвигом (переносом) Г на α вправо при $\alpha > 0$ или на $|\alpha|$ влево при $\alpha < 0$;

6) график функции $y=Af(x)$ получается растяжением Г от Ox (вдоль оси Oy) в А раз при А>1 или сжатием к оси Ox в $\frac{1}{A}$ раз при $0<A<1$;

7) график функции $y=f(x)+B$ получается сдвигом Г вдоль Oy на В вверх при В>0 или на $|B|$ вниз при В<0.

Упражнение. Постройте графики следующих элементарных функций:
1) $1 + x^{3/2}$, 2) $3 - \sqrt{x}$, 3) $\log_2(x - 1)$, 4) $\log_{1/2}(x + 1)$, 5) $1 + 2^x$,
6) $2 - (1/3)^x$, 7) $2\sin(x - \pi/4)$, 8) $-\cos(2x + \pi/3)$,
9) $-\arcsin(x+ 1)$, 10) $2\arccos(x - 1)$, 11) $1 + \operatorname{arctg} x$,
12) $1 - \operatorname{arcctg} x$, 13) $\arcsin(2x)$, 14) $\operatorname{arctg}(x/2)$.

Замечание 1. Для построения графика функции $y=|f(x)|$ нужно построить сначала график *Г* функции $y=f(x)$. Далее ту часть *Г,* которая расположена над осью Ox или касается этой оси, надо сохранить, а ту часть *Г*, которая расположена под осью Ox , симметрично отразить относительно оси Ox .

Замечание 2. Для построения графика функции $y=f(|x|)$ нужно построить сначала часть графика *Г* функции $y=f(x)$, которая соответствует $x\geq 0$. Затем эту часть симметрично отразить относительно оси Oy .

1.3. Определение предела функции в точке

Напомним, что *окрестностью* точки a прямой R называется произвольный интервал с центром в этой точке. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число b называется *пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнено неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Если предел функции f в точке a равен a, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (или $f(x)\to b$ при $x\to a$) и говорят, что "предел функции $f(x)$ равен b при x, стремящемся к a".

В данном определении условие $0<|x-a|<\delta$ означает, что $x\neq a$ и расстояние от x до a меньше δ, а неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ показывает, что значение $f(x)$ расположено в ε–окрестности точки b. В случае

$f(a)=b$ условие $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$ можно интерпретировать так: если значение аргумента x в окрестности точки a известно с точностью δ, то значение функции $f(x)$ в точке a известно с точностью ε.

Геометрическая интерпретация равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ состоит в следующем: каким бы малым ни было $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что все точки (x,y) графика функции $y=f(x)$, у которых $x\in(a-\delta,a+\delta)$ (за, исключением, быть может, значения $x=a$), расположены в полосе между прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$. При этом в самой точке a функция f может быть не определена.

Пример 1. Функция $f(x)=C$, где $C=const$, имеет предел, равный C, в любой точке.

Пример 2. Функция

$$f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

имеет в точке 1 предел, равный 3. Действительно, для всех $x\neq 1$

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=2x+1$$

и, следовательно,

$$|f(x)-3|=2|x-1|.$$

Отсюда видно, что если для произвольного $\varepsilon>0$ выбрать положительное число $\delta<\varepsilon/2$, то

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

Пример 3. Функция $\cos x$ имеет в любой точке a предел, равный $\cos a$. Действительно, для всех x

$$\cos x-\cos a=-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$$

и

$$|\cos x-\cos a|\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.$$

Но $|\sin t|\le|t|$ для всех $t\in\mathbf{R}$ (поясните это неравенство геометрически). Поэтому

$$|\cos x-\cos a|\le|x-a|.$$

Таким образом, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрано, $\delta \le \varepsilon$ то неравенство $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$. Значит

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a .$$

Если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, то функция f называется *бесконечно малой* в точке a.

Упражнения.

1. Докажите, что $\lim_{x \to a} x = a$ и. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ В частности, функции x и $\sin x$ являются бесконечно малыми в точке 0.

2. Докажите, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ не имеет предела в точке 0.

3. Докажите, что

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

4. Докажите, что *функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число}, \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке числовой прямой.

Пример 4. *Функция Римана* $\Re(x)$ определяется по формуле

$$\Re(x) = \begin{cases} 1/q, \text{ если } x = p/q - \text{несократимая дробь и } q > 0, \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$$

Докажем, что эта функция в каждой точке $a \in \mathbf{R}$ имеет предел, равный 0. Фиксируем точку a и число $\varepsilon > 0$. На любом конечном интервале числовой прямой может быть лишь конечное множество несократимых дробей p/q со знаменателями, удовлетворяющими условию $0 < q \le 1/\varepsilon$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что на множестве $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ нет ни одной такой дроби. Тогда для любой дроби $p/q \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ имеет место неравенство $\Re(p/q) = 1/q < \varepsilon$ (так как $q > 1/\varepsilon$ в силу выбора δ). А в иррациональных точках функция **R** обращается в нуль. Поэтому для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, имеем

$$|\Re(x) - 0| = \Re(x) < \varepsilon .$$

Этим доказано, что $\lim\limits_{x\to a}\Re(x)=0$.

Говорят, что предел функции f в точке a равен бесконечности (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$), если для любого $M>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнено неравенство $|f(x)|>M$. Если в этом определении заменить $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$ (соотв. на $f(x)<-M$), то получится определение для $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ (соотв. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$).

Пример 5. Для функции $f(x)=1/(1-x)$ при $x\neq 1$ и любом $M>0$ имеем

$$|f(x)|>M \Leftrightarrow |1-x|<\frac{1}{M}.$$

Поэтому, если выбрать $\delta=1/M$, то

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{1-x}\right|>M.$$

Значит,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

Пример 6. Функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x-\text{рациональное число,} \\ 1/x, \text{ если } x-\text{иррациональное число,} \end{cases}$$

неограничена в произвольной окрестности точки 0, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq\infty$.

Функция f называется *бесконечно большой* в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Упражнение. Пусть существует $\delta>0$ такое, что $f(x)\neq 0$ для всех $x\in(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ в том и только в том случае, когда функция $1/f(x)$ является бесконечно малой в точке a.

Сформулируем определения односторонних пределов. Число b называется *правым* (соотв. *левым) пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta$ (соотв. $a-\delta<x<a$), выполнено неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Для правого (соотв. левого) предела используются обозначения $f(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to a+o} f(x)$ (соотв. $f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a-o} f(x)$).

Пример 7. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если x} \le 0, \\ 1+x, \text{ если } x>0 \end{cases}$$

имеем $f(0+0)=1, f(0-0)=0$.

Упражнение. Объясните смысл равенств $f(a+0)=+\infty$, $f(a+0)=-\infty$, $f(a-0)=+\infty$, $f(a-0)=-\infty$ и проиллюстрируйте их графически.

1.4. Основные свойства предела функции

Пусть функции f, f_1, f_2 определены в некоторой окрестности точки *a,* за исключением, быть может, самой точки *a,* и пусть $b, b_1, b_2 \in \mathrm{R}$. Справедливы следующие свойства:

1°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ *и* $b\neq 0$, *то в некоторой окрестности точки* a *значения* $f(x)$ *при* $x\neq a$ *имеют такой же знак, что и число* b.

2°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$, *то для любых постоянных* c_1 *и* c_2

$$\lim_{x\to a}(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x))=c_1 b_1+c_2 b_2$$

и

$$\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x)=b_1 b_2 .$$

В частности,

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=b_1+b_2$$

и

$$\lim_{x\to a}(c_1 f_1(x))=c_1 \lim_{x\to a} f_1(x) .$$

3°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и,* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$, *причем* $b_2\neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

4°. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$ *и пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнено неравенство* $f_1(x)\le f_2(x)$. *Тогда* $b_1\le b_2$.

5°. *Пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнены неравенства* $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ *и в точке* a *существуют равные друг другу пределы функций* f_1 *и* f_2. *Тогда предел функции* f *в точке* a *существует и*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)$$

Свойство 2° распространяется на любое конечное число функций: если пределы $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) (k=1,2,...,n)$ существуют и конечны, то для любых постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$

$$\lim_{x\to a}(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x))=\sum_{k=1}^{n} c_k \lim_{x\to a} f_k(s)$$

и

$$\lim_{x\to a}(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)) = \prod_{k=1}^{n}(\lim_{x\to a} f_k(x)).$$

В частности, для любого натурального n и любого $a \in R$ имеем

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Докажем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (1)$$

которое называют *первым замечательным пределом.* Из определений функций $\sin x$ и $tg\ x$ следует, что при $0 < x < \pi/2$ верны неравенства

$$\sin x < x < tgx$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Так как функции $\cos x$ и $\sin x/x$ четные, то неравенства (2) имеют место также при $-\pi/2 < x < 0$. Выше было доказано, что $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. Полагая $f_1(x) = \cos x, f_2(x) \equiv 1$ и применяя свойство 4°, из (2) получаем (1). Из свойств предела и формулы (1) следует, в частности, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2.}$$

Упражнение. Вычислите пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3} \text{ и } \lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin x}.$$

5. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ (обозначение: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$)) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если в этом определении заменить $|x| > \delta$ на $x > \delta$ (соотв. на $x < -\delta$), то получится определение для $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ (соотв. для $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$). Для этих трех пределов имеют место свойства, аналогичные 1° – 5°.

Пример 1. Предел функции $f(x)=(x+1)/(2x-1)$ при $x\to\infty$ равен $1/2$. Действительно, если $|2x|>1$, то $|2x-1\geq|2x|-1>0$ и, следовательно,

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3}{2(2x-1)}\right|\leq\frac{3}{2(|2x|-1)}.$$

Возьмем $\delta>3/4\varepsilon+1/2$. Если $|x|>\delta$, то

$$|2x|-1>\frac{3}{2\varepsilon}$$

и $|f(x)-1/2|<\varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}.$$

Если воспользоваться свойствами пределов, то это равенство можно получить быстрее:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{2-1/x}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{2-\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

называемое *вторым замечательным пределом.* С помощью этого предела выводятся формулы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\gamma-1}{x}=\gamma,$$

где γ - произвольное действительное число.

Упражнения.

1. Докажите равенства

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x-1}=\frac{3}{4},\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}2^{1/x}=1.$$

2. Докажите, что число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда оба предела $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ существуют и равны b.

Говорят, что *функция* $f(x)$ *имеет при* $x \to \infty$ *предел, равный бесконечности* (обозначение: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (или $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$)), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Заменяя в этом определении $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ или $f(x) < -M$, получим определения пределов $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$. Аналогично определяются пределы $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Пример 3. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}, \qquad a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ a_0/b_0, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

6. Непрерывность функции в точке

Пусть функция f задана на множестве X и точка a расположена в X вместе с некоторой своей окрестностью. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если предел функции f и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Разность $\Delta x = x - a$ называют приращением аргумента x в точке a, а разность $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращением функции f в точке a, вызванным приращением аргумента Δx. Равенство (1) можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a)$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0\,.$$

Таким образом, функция f является непрерывной в точке a тогда и только тогда, когда приращение Δy в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

Упражнение. Пусть функция f непрерывна и положительна в точке a. Докажите, что тогда существует число $c>0$ такое, что в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x)>c$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

то, например, для функции $f+g$ имеем

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = f(a)+g(a)\,,$$

что и означает непрерывность функции $f+g$ в точке a.

Композиция двух непрерывных функций непрерывна. Действительно, пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0 и принимает в этой точке значение $x_0 : \varphi(t_0) = x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 определена функция $f(\varphi(t))$ и с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ имеем

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\varphi(t_0))$$

(здесь $x \to x_0$ при $t \to t_0$ в силу непрерывности функции φ).

7. Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Функция f называется *непрерывной на интервале* (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Например, функция $\mathrm{tg}x$ непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Функция f называется *непрерывной справа* в точке x_0, если при некотором δ_0 промежуток $\left[x_0, x_0+\delta_0\right)$ содержится в области определения функции f и выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\,,$$

т.е. $f(x_0+0) = f(x_0)$. Аналогично вводится понятие функции f, *непрерывной слева* в точке x_0 (в этом случае $f(x_0-0) = f(x_0)$). Непосредственно из определений видно, что если функция f непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке. Функция $[x]$ (целая часть числа x) непрерывна справа в каждой точке $k \in \mathbb{Z}$.

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Например, функция $\arcsin x$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$.

Часто применяются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.*

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \text{ для всех } x \in [a,b].$$

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то в интервале (a,b) существует по крайней мере одна точка, в которой функция f обращается в нуль.*

Теорему 2 называют *теоремой Вейерштрасса об экстремальных значениях.* Согласно этой теореме функция f принимает в точках x_1 и x_2 значения $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ и $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ соответственно. С помощью теоремы 3 покажем, что *образом отрезка $[a,b]$ при непрерывном отображении f является отрезок* $[m,M]$ (в случае, когда $f = const$, этот отрезок вырождается в точку).

Предположим, что $m < M$, $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$ (в случае $x_1 > x_2$ рассуждения аналогичны). Выберем произвольное число $y_0 \in (m,M)$. Вспомогательная функция $\varphi(x) = f(x) - y_0$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$ и принимает на его концах значения разных знаков:

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = (m - y_0)(M - y_0) < 0.$$

По теореме 3 существует точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ такая, что $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = y_0$. Таким образом, *если непрерывная на $[a,b]$ функция f принимает какие-нибудь два значения y_1 и y_2, то она принимает на $[a,b]$ все значения, заключенные между y_1 и y_2.*

Упражнение. Приведите пример функции, непрерывной в интервале $(0,1)$ и неограниченной на этом интервале.

8. Понятие производной

Пусть точка x_0 лежит в области определения функции $f(x)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 находят по следующему алгоритму.

1) Вычисляют $y_0 = f(x_0)$.

2) Составляют приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

3) Составляют отношение этих приращений

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

4) Находят предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то он обозначается $f'(x_0)$ и называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0, а функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0. Таким образом, производная $f'(x_0)$ определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Из определений видно, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке (обратное неверно: функция $|x|$ непрерывна в точке 0, но не имеет в этой точке производную).

Пример 1. Если $f(x)=C$, где $C=const$, то $f'(x_0)=0$ в любой точке x_0.

Пример 2. Найдем производную функции $f(x)=x^2$ в точке x_0. Для данной функции имеем

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0$$

Если предел (1) существует при любом выборе точки x_0 на некотором множестве X, то говорят, что функция $y=f(x)$ *дифференцируема на множестве* X. В этом случае на множестве X определена функция

$f'(x)$, называемая *производной* функции $f(x)$. Например, функция $f(x)=x^2$ дифференцируема на прямой R и $f'(x)=2x$ для всех $x\in R$.

Пример 3. Докажем, что $(\sin x)'=\cos x$ в любой точке x. Возьмем произвольную точку $x_0\in R$. Применяя формулу

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

имеем

$$\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1 \text{ и } \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x_0,$$

получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\cos x_0.$$

Таким образом, если $f(x)=\sin x$, то $f'(x)=\cos x$ для всех $x\in R$.

Упражнение. Докажите, что $(\cos x)'=-\sin x$ в любой точке x.

Имеют место формулы

$$(x^a)'=ax^{a-1},\ (a^x)'=a^x\ln x,\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

В частности,

$$(e^x)'=e^x,\ (\ln x)'=\frac{1}{x},\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Производные обратных тригонометрических функций вычисляются по формулам

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Из определения производной и основных свойств предела выводятся следующие *правила дифференцирования*:

$$(Cf(x))' = Cf'(x), \ (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}.$$

Кроме того, если $f(x) = F\left[u(x)\right]$, где функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то

$$f'(x_0) = F'(u_0)u'(x_0).$$

Пользуясь этими правилами и приведенными выше формулами, можно вычислить производные многих элементарных функций.

Упражнение. Найдите производные следующих элементарных функций:

1) $1+x^{3/2}$, 2) $3-\sqrt{x}$, 3) $\log_2(x-1)$, 4) $\log_{1/2}(x+1)$, 5) $1+2^x$, 6) $2-(1/3)^x$,
7) $2\sin(x-\pi/4)$, 8) $-\cos(2x+\pi/3)$, 9) $-\arcsin(x+1)$, 10) $2\arccos(x-1)$,
11) $1+\operatorname{arctg} x$, 12) $1-\operatorname{arcctg} x$, 13) $\arcsin(2x)$, 14) $\operatorname{arctg}(x/2)$.

Геометрический смысл производной: значение $f'(x_0)$ совпадает с угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$; при этом уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

В случае $f'(x_0) = 0$ касательная параллельна оси Ox, а в случае $f'(x_0) \neq 0$ имеет место равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox (точнее, α - угол, на который надо повернуть ось Ox против часовой стрелки до совпадения с касательной).

Механический смысл производной: если $s = s(t)$ - путь, пройденный материальной точкой M за время t, то $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$ - путь, пройденный M за время $\Delta t = t - t_0$, $\Delta s/\Delta t$ - средняя скорость движения за время от t_0 до t, а производная

$$s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

- значение скорости точки M в момент времени t_0. Коротко говорят: производная от пути по времени есть скорость.

2. Исследование функции с помощью производной

2.1. Признаки возрастания и убывания функции

Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из этого множества, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$). Общее название неубывающих и невозрастающих функций – *монотонные функции*.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из этого множества, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными*.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Если $f'(x>0)$ ($f'(x<0)$) на (a,b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b). Аналогично, если $f'(x \ge 0)$ ($f'(x \le 0)$) на (a,b), то функция $f(x)$ является неубывающей (невозрастающей) на (a,b).*

Например, для функции

$$f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$$

имеем

$$f'(x) = 12x^2 + 30x - 18 = 6(2x-1)(x+3).$$

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на множестве $(-\infty,-3) \cup (1/2,+\infty)$ и убывает на интервале $(-3,1/2)$.

2.2 Локальные экстремумы и теорема Ферма

Функция $f(x)$ имеет *локальный максимум* в точке x_0, если в некоторой ε-окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ этой точки $f(x_0)$ является наибольшим значением функции. Это означает, что для любого $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$. Аналогично, функция $f(x)$ имеет *локальный минимум* в точке x_0, если в некоторой окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ этой точки $f(x_0)$ - ее наименьшее значение, т.е. для любого $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ имеем $f(x) > f(x_0)$. Минимум и максимум принято называть *экстремумами* (или экстремальными значениями) функции.

Теорема (Ферма) 2.2. (необходимое условие локального экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет в точке* x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Точки x_i называются *стационарными (или критическими)* точками функции $f(x)$, если они являются корнями уравнения $f'(x)=0$.

Интервалами монотонности функции $f(x)$ называют подмножества $D'_i(f)$ области определения $D'(f)$ ее производной $f'(x)$, на которых эта производная сохраняет свой знак. Граничными точками интервалов монотонности являются стационарные точки и точки разрыва так как и в них производная функции может изменить свой знак.

Теорема 2.3. (достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки x_0. Тогда, если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех x из $(x_0-\varepsilon, x_0)$, а $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) для всех x из $(x_0, x_0+\varepsilon)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум), если же функция $f(x)$ во всей ε-окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.*

Другими словами, точка x_0 является точкой экстремума если в ее близкой окрестности
(т.е. при любых $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$) выполняются два условия:

а) $f'(x_0)=0$;

б) $\operatorname{sgn} f'(x_0-\varepsilon) = -\operatorname{sgn} f'(x_0+\varepsilon)$. (2)

Функция $\operatorname{sgn}(x)$ определяет знак x и задается следующим образом :

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0;\\ -1, x<0.\end{cases}$$

Если $\operatorname{sgn} f'(x_0-\varepsilon)=1$, то в области $(x_0-\varepsilon, x_0)$ функция возрастает, а в области $(x_0, x_0+\varepsilon)$, в соответствие с (2), убывает, и, следовательно, в точке x_0 имеется максимум. Если $\operatorname{sgn} f'(x_0-\varepsilon)=-1$, аналогично рассуждая, получаем, что в точке x_0 имеется минимум.

Суммируя вышесказанное, полезно для наглядности составить таблицу следующего вида:

Таблица 2

x	$D'_1(f)$	x_1	$D'_2(f)$	x_2	$D'_3(f)$	x_3	$\ldots$	x_n	$D'_n(f)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	∞	$\ldots$	$\ldots$	–
$f(x)$	$\uparrow$	$f(x_1)$ *(max)*	$\downarrow$	$f(x_2)$ *(min)*	$\uparrow$	∞	$\ldots$	$\ldots$	$\downarrow$

Здесь знак $\uparrow$ указывает на возрастание функции, знак $\downarrow$ на убывание. Символ ∞ использован для обозначения разрыва функции.

Теорема 2.3. (второе достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в точке* x_0, *причем* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$. *Тогда в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет локальный экстремум; а именно: 1) если* $f''(x_0)>0$, *то* $f(x_0)$ *- локальный минимум функции* $f(x)$, *2) если* $f''(x_0)<0$, *то* $f(x_0)$ *- локальный максимум функции* $f(x)$.

Другими словами, если $\operatorname{sgn} f''(x_0)=1$, то в точке x_0 функция имеет минимум; если $\operatorname{sgn} f''(x_0)=-1$, то в точке x_0 функция имеет максимум. Если же в данной точке x_0 $f''(x_0)=0$, то в этой точке экстремума нет. Ниже мы остановимся на этом случае более подробно, когда будем исследовать функцию на выпуклость и вогнутость и введем понятие точки перегиба функции.

2.3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ является *выпуклым вверх, или просто выпуклым (вогнутым вверх, или просто вогнутым)* на некотором промежутке (a,b), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a,b).

Теорема 2.4. *Если функция* $y=f(x)$ *имеет на интервале* (a,b) *вторую производную и* $f''(x)<0$ *(* $f''(x)>0$*) во всех точках* (a,b), *то график функции на* (a,b) *является выпуклым (вогнутым).*

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $y=f(x)$, если в этой точке график имеет касательную и при переходе через эту точку график меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, т.е. в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается».

Теорема 2.5. (необходимое условие точки перегиба) Пусть график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$ и пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *непрерывную вторую производную. Тогда* $f''(x_0)=0$.

Теорема 2.6. (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция* $y=f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0. *Тогда, если в пределах указанной окрестности* $f''(x)$ *имеет разные знаки справа и слева от точки* x_0, *то график функции* $y=f(x)$ *имеет перегиб в точке* $(x_0, f(x_0))$.

Другими словами, точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, если выполняются следующие два требования:

a) $f''(x_0) = 0$;

b) $\operatorname{sgn} f'(x_0 - \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f'(x_0 + \varepsilon)$ (3)

Здесь $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, как и выше, □ достаточно малая окрестность точки x_0.

Интервалами выпуклости (вогнутости) функции $f(x)$ называются подмножества $D_i''(f)$ области определения ее второй производной $f''(x)$, на которых эта производная сохраняет свой знак, причем, согласно вышеизложенному, если $f''(x) > 0$, то график вогнутый, а если $f''(x) < 0$, то график выпуклый.

Граничными точками интервалов выпуклости (вогнутости) могут быть как точки перегиба функции $f(x)$, так и ее точки разрыва. Поэтому график функции может состоять из нескольких ветвей, различающихся своей выпуклостью или вогнутостью.

Для наглядности и здесь удобно построить таблицу.

Таблица 3

X	$D_1''(f)$	x_1	$D_2''(f)$	x_2	$D_3''(f)$	x_3	$\dots$	x_{n-1}	$D_n''(f$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	∞	$\dots$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	$f(x_1)$ □ - *значе-ние в точке перегиба*	$\cap$	$f(x_2)$ - □*значе-ние в точке перегиба*	$\cup$	∞	$\dots$	$f(x_{n-1})$ $\dots$	$\cap$

Символ $\cup$ обозначает вогнутость, символ $\cap$ выпуклость.

2.4. Схема исследования функции

Сведем теперь воедино все вышеизложенное и сформулируем последовательность шагов, необходимых для исследования функции и построения ее графика. При этом удобно всю работу разбить условно на четыре раздела.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Найти область определения данной функции (т.е.область $D(f)$).

А.2. Определить четность функции, т.е. является ли функция четной, нечетной или функцией общего вида. Если функция периодическая, то найти ее период

А.3. Найти точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат Ox и Oy.

А.4. Определить интервалы непрерывности и точки разрыва функции $f(x)$, построить вертикальные асимптоты, если они существуют.

А.5. Определить интервалы знакопостоянства функции $f(x)$.

А.6. Найти наклонные и горизонтальные асимптоты, если они существуют.
А.7. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ если они существуют.

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

В.1. Найти производную $f'(x)$.
В.2. Определить точки, где производная $f'(x)$ равна нулю или не существует (т.е. найти критические точки данной функции).
В.3. Отметить критические точки функции $f(x)$ на оси Ox и определить знаки производной $f'(x)$ на интервалах между отмеченными точками.
В.4. Определить участки возрастания и убывания функции.
В.5. Определить точки экстремумов и значения функции $y = f(x)$ в этих точках (т.е. ее экстремумы)

После выполнения разделов А и В рекомендуется построить эскиз графика функции, указав асимптоты, точки пересечения с координатными осями, точки экстремумов. При этом удобно пользоваться таблицами, как в приведенных ниже примерах, поскольку вся необходимая информация о поведении функции собрана в них.

С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.
С.1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
С.2. Определить точки, где вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует.
С.3. Отметить найденные точки на оси Ox и определить знаки второй производной на каждом интервале между отмеченными точками.
С.4. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции
С.5. Найти точки перегиба графика и значения функции в этих точках.

Д. Построение графика функции.
Анализируя полученные данные, уточнить поведение кривой и нарисовать окончательный график.
Примечания.
1) Для нахождения точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox следует решить уравнение $f(x) = 0$. Например, если это уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3, то график данной функции пересекает ось Ox в точках $(x_1,0), (x_2,0), (x_3,0)$.
2) График функции $y = f(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0, f(0)$ при условии, что $0 \in D(f)$ (если это условие не выполнено, то график функции не имеет общих точек с осью Oy).
3) Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если выполнено одно из условий

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty .$$

4) Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)^2-kx).$$

Если $k=0$, то $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Если пределы $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ бесконечны или не существуют, то наклонных и горизонтальных асимптот нет.

5) При построении графика функции для самоконтроля рекомендуется построить несколько дополнительных точек $(x_i, f(x_i))$, задавая значение независимой переменной x_i и вычисляя соответствующее значение $f(x_i)$. Заметим, что мы получаем не точный график, а его эскиз, показывающий характерные особенности графика и основные определяющие точки.

2.5. Примеры исследования функций и построения графиков

Пример 1. Исследовать функцию $y=x^3-3x$ и построить ее график, действуя по вышеизложенному плану.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Очевидно, $D(y)=\{x: x\in(-\infty,\infty)\}$.

А.2. Легко видеть, что $y(-x)=(-x)^3-3(-x)=-(x^3-3x)=-y(x)$.

Следовательно, $y(x)$ – нечетная функция, и она не является периодической.

А.3. Если $x=0$, то $y(0)=0$, т.е. график проходит через начало координат. Если $y=0$, то $x^3-3x=0$. Решая это уравнение, находим точки пересечения графика с осью абсцисс: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$.

А.4. Функция непрерывная, не имеет точек разрыва и поэтому не имеет вертикальных асимптот.

А.5. Из анализа, проведенного в п.А.3 следует, что график функции в трех точках пересекает ось абсцисс, поэтому функция три раза может поменять знак. Разобьем область определения на четыре промежутка: $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$.

В каждом из этих промежутков функция сохраняет знак. Методом пробных точек определим знак функции в каждом промежутке и полученные результаты внесем в таблицу:

Таблица 1

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$y(x)$	–	+	–	+

Эти результаты показывают, что в областях $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(0,\sqrt{3})$ график функции будет лежать ниже оси абсцисс, а в областях $(-\sqrt{3},0)$ и $(\sqrt{3},\infty)$ – выше.

А.6. Рассмотрим первый предел из пункта А.6:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(x^2-3) = \infty .$$

Таким образом, функция не имеет наклонных и горизонтальных асимптот, ее левая ветвь уходит в $-\infty$, а правая в ∞.

А.7. Изучим поведение функции при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(1-\frac{3}{x^2}) = \pm\infty .$$

Завершен первый этап исследования функции.

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

В.1. Найдем первую производную функции:

$$y' = (x^3-3x)' = 3x^2-3 = 3(x^2-1).$$

В.2. Приравняв к нулю первую производную, получим уравнение $x^2-1=0$, откуда находим две критические точки $x_1=-1$, $x_2=1$.

В.3. Методом пробных точек определим знак производной справа и слева от первой критической точки $x_1=-1$. Например, возьмем точки $x_{1-0}=-2$ и $x_{1+0}=0$.

Легко видеть, что $y(x_{1-0}) = 3((-2)^2-1) = 9 > 0$ и $y(x_{1+0}) = -3 < 0$ т.е., при переходе через критическую точку $x_1=-1$ производная меняет знак с положительного на отрицательный. Таким же образом определяем, что при переходе через критическую точку $x_2=1$ производная меняет знак с положительного на отрицательный.

В.4. Анализ предыдущего пункта показывает, что в области $(-\infty,-1)$ функция возрастает, в области $(-1,1)$ функция убывает, а в области $(1,\infty)$ функция опять возрастает.

В.5.Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция имеет максимум, а в точке $x_2=1$ – минимум. Несложно вычислить эти экстремальные значения функции:

$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2,\ y_{\min} = y(1) = (1)^3 - 3 = -2 .$$

Полученные результаты внесем в таблицу:

Таблица 2

X	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	↑	2 *(max)*	↓	–2 *(min)*	↑

Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить черновую схему графика, указывая точки пересечения с координатными осями, точки минимума и максимума.

С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

С.1. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = 6x \, .$$

С.2. Уравнение $y'' = 0$, или $6x = 0$ имеет одно решение $x = 0$, являющееся критической точкой.

С.3. Очевидно, слева от точки $x = 0$ $y'' < 0$, а справа $y'' > 0$.

С.4. Таким образом, слева от точки $x = 0$ график выпуклый, справа – вогнутый.

С.5. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой перегиба и $y(0) = 0$.

Внесем результаты в таблицу:

Таблица 3

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$y''(x)$	–	0	+
$y(x)$	$\cap$	0	$\cup$

Д. Построение графика функции.

Вся информация о поведении функции сосредоточена в таблицах 1-3. Пользуясь этими таблицами, строим окончательный вариант графика функции:

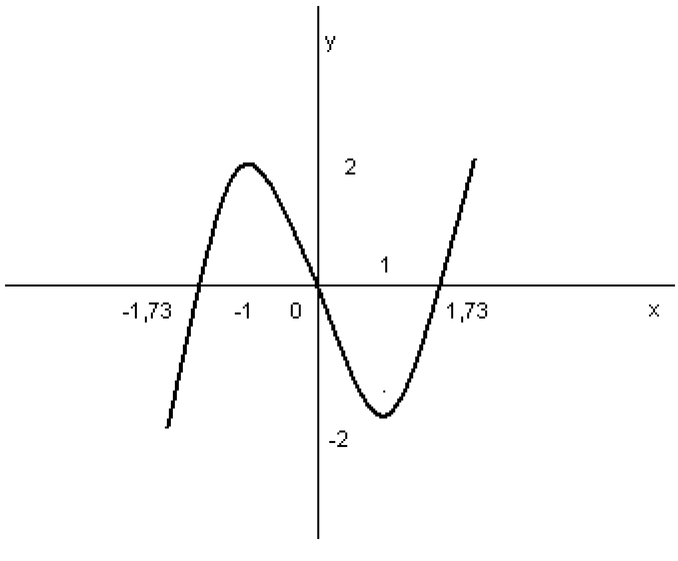


Рис.1. График функции $y = x^3 - 3x$, где взяты значения $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$.

Пример 2. Исследовать функцию

$$y = x + \frac{x}{3x-1}$$

и построить ее график.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Функция определена при $x \neq 1/3$, т.е. на множестве

$$D(f) = (-\infty, 1/3) \bigcup (1/3, +\infty).$$

А.2. Очевидно, что $y(-x) = -x + \dfrac{x}{3x+1} \neq \pm y(x)$, т.е. функция является функцией общего вида. Не существует такого числа T, чтобы выполнялось равенство $y(x+T) = y(x)$: $y(x)-$непериодическая функция.

А.3. Легко видеть, что $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 0$ при $y = 0$, т.е. график функции имеет единственную общую точку с координатными осями - $(0,0)$.

А.4. В точке $x = \dfrac{1}{3}$ функция не определена, и имеют место пределы

$$\lim_{x \to 1/3+0} y(x) = \lim_{x \to 1/3+0} (x + \frac{x}{3x-1}) = \infty, \quad \lim_{x \to 1/3-0} y(x) = \lim_{x \to 1/3-0} (x + \frac{x}{3x-1}) = -\infty$$

т.е., функция терпит разрыв второго рода и прямая $x = \dfrac{1}{3}$ является вертикальной асимптотой.

А.5. По результатам анализа, проведенного в предыдущих пунктах, приходим к выводу, что график функции касается оси абсцисс в точке $(0,0)$, лежит ниже оси абсцисс в промежутке $(-\infty, \dfrac{1}{3})$ и выше - в промежутке $(\dfrac{1}{3}, \infty)$, т.е. эти области являются промежутками знакопостоянства.

А.6. Чтобы найти наклонные асимптоты изучим соответствующие пределы при $x \to \pm\infty$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x)/x) = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{3x-1}) = 1, \; b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, функция имеет наклонную асимптоту $y = x + \dfrac{1}{3}$.

А.7. Изучим поведение функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x + \frac{x}{3x-1}) = \pm\infty.$$

Занесем полученные результаты в таблицу:

Таблица 1

x	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
$y(x)$	$-$	$+$

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

В.1. Найдем производную функции:

$$y' = 1 + \frac{3x - 1 - 3x}{(3x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(3x-1)^2}.$$

В.2. Легко видеть, что уравнение $y'=0$ имеет корни $x=0$ и $x=\frac{2}{3}$, представляющие собой критические точки, в которых функция может иметь экстремум, а точке $x=\frac{1}{3}$ производная не определена и эта точка также является критической точкой.

В.2. Область определения функции разбивается на четыре промежутка $(-\infty,0),(0,\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\infty)$, являющихся промежутками знакопостоянства.

В.3. Определяя знак производной в этих интервалах методом пробных точек или непосредственно по аналитическому выражению производной приходим к выводам, что в промежутке $(-\infty,0)$ функция возрастает, в $(0,\frac{1}{3})$ - убывает, в $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ - убывает и в $(\frac{2}{3},\infty)$ - возрастает.

В.4. Анализ пункта В.3 показывает, что точка $x=0$ является точкой максимума и $y_{\max}=0$, точка $x=\frac{2}{3}$ - точка минимума и $y_{\min}=\frac{4}{3}$.

Для наглядности впишем полученные результаты в таблицу 2:

Таблица 2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	$-\infty$	–	0	+
$y(x)$	↑	0 *(max)*	↓	имеет вертикальную асимптоту $x=\frac{1}{3}$	↓	$\frac{4}{3}$ *(min)*	↑

Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить эскиз графика, указывая точку касания к оси абсцисс, точки минимума и максимума, вертикальную и горизонтальную асимптоты. При этом удобно пользоваться таблицами 1и 2.

С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

С.1. Найдем вторую производную функции:

$$y''=\frac{6}{(3x-1)^3}.$$

С.2. Не существуют конечные точки, в которых $y''=0$. А точке $x=\frac{1}{3}$ значение второй производной равно ∞.

С.3. При $x\in(-\infty,\frac{1}{3})$ $y''(x)<0$ и при $x\in(\frac{1}{3},\infty)$ $y''(x)<0$.

С.4. Следовательно, левее вертикальной асимптоты $x=\frac{1}{3}$ график функции выпуклый, правее вертикальной асимптоты график вогнутый.

С.5. В точке $x=\frac{1}{3}$ значение второй производной равно ∞, следовательно, точек перегиба нет.

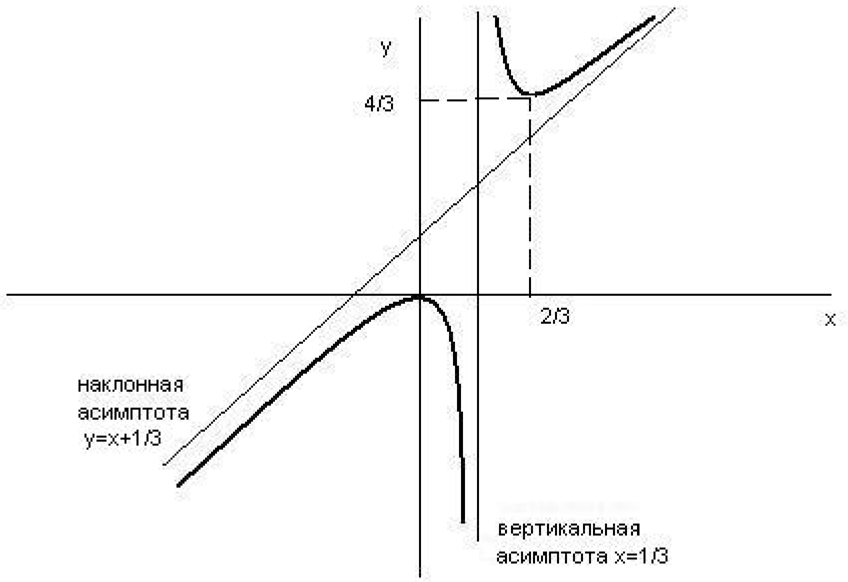
Построим таблицу 3:

Таблица 3

x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$x\in(\frac{1}{3},\infty)$
$y''(x)$	$-$	∞	$+$
$y(x)$	$\cap$	имеет вертикальную асимптоту $x=\frac{1}{3}$	$\cup$

Д. Построение графика функции.

Объединяя исследования, проведенные в предыдущих пунктах, по таблицам 1-3 строим график функции:



Пример № 3.

Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{(1+x)^2}$ и построить ее график.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Очевидно, в точке $x=-1$ знаменатель в выражении функции превращается в нуль, что недопустимо, следовательно,

$D(y)=\{x: x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)\}$ или $D(y)=\{x: x\in(-\infty,\infty), x\neq -1\}$.

А.2. Очевидно, что $y(x)\neq y(-x)$ и $y(x)\neq -y(-x)$, т.е. функция не четная и не нечетная, следовательно, $y(x)-$ функция общего вида.

Не существует такого числа T, чтобы выполнялось равенство $y(x+T)=y(x)$: $y(x)-$непериодическая функция.

А.3. Легко видеть, что $y=0 \Leftrightarrow x=0$, т.е. график функции проходит через точку $O(0,0)$ – начало координат.

А.4. В точке $x=-1$функция терпит разрыв. Изучим односторонние пределы функции при приближении к этой точке:

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x}{(1+\frac{1}{x})^2}=-\infty.$$

Следовательно, в точке $x=-1$функция имеет разрыв второго рода и прямая $x=-1$ является ее вертикальной асимптотой.

А.5. В точке $x=0$функция получает значение $y=0$, следовательно, при переходе через эту точку функция может поменять знак. Кроме того, знак функции может быть различным справа и слева от точки разрыва $x=-1$. Других точек, в которых функция может поменять знак, не существует. Таким образом, имеем три промежутка знакопостоянства функции: $(-\infty,-1),(-1,0),(0,\infty)$. Методом пробных точек или решая неравенства $y<0, y>0$, определяем знак функции в этих промежутках.

Таблица 1

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$y(x)$	–	–	+

Из таблицы видно, что функция меняет знак только при переходе через точку $x=0$.

Следовательно, график функции лежит в 1 и 3 квадрантах ниже оси абсцисс при $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ и выше оси абсцисс при $x\in(0,\infty)$, а при приближении к точке $x=-1$ справа и слева ветви графика вдоль вертикальной асимптоты $x=-1$уходят вниз в $-\infty$.

А.6. Рассмотрим пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)/x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{x^2(1+\frac{1}{x})^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(-2-\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x})^2}=-2.$$

Подставляя найденные значения параметров k и b в общее уравнение прямой $y=kx+b$, находим, что у функции есть одна наклонная асимптота, уравнение которой имеет вид $y=x-2$, при $x\to\pm\infty$ ветви графика функции приближаются к этой прямой.

А.7. Изучим поведение функции при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(\frac{1}{x}+1)^2} = \pm\infty .$$

Следовательно, при $x \to \infty$ функция бесконечно растет, а при $x \to -\infty$ бесконечно убывает.

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

В.1. Найдя производную функции:

$$y' \equiv \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^2} .$$

В.2. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 0, x_2 = -3$. Кроме того, $x = -1$ является точкой разрыва также и для производной. Следовательно, эти критические точки разбивают область определения функции на четыре промежутка: $(-\infty,-3),(-3,-1),(-1,0),(0,\infty)$.

В.3. Методом пробных точек, анализируя знак производной в этих интервалах, и, занося полученные результаты в таблицу 2 , приходим к следующим выводам:

Таблица 2

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,-\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	∞	+	0	+
$y(x)$	↑	$-6{,}75$ *(max)*	↓	∞	↑	0	↑

В.4. Таким образом, в точке $x = -3$ функция имеет максимум, значение которого равно $-6{,}75$; в точке $x = -1$ функция и производная имеют разрыв, а в точке $x = 0$ функция не имеет экстремума, потому, что производная положительна и не меняет знак при переходе через эту точку.

Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить эскиз графика, указывая точки пересечения с координатными осями, асимптоты, точки минимума и максимума, при этом удобно пользоваться таблицами 1и 2.

С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

С.1. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{6x}{(x+1)^4} .$$

С.2. Для нахождения критических точек функции решим уравнение $y''(x) = 0$, которое имеет вид

$$\frac{6x}{(x+1)^4} = 0 .$$

Находим корень $x = 0$. Кроме того, в точке $x = -1$ вторая производная имеет разрыв, учитывая который приходим к выводу о том, что область определения функции распадается на три промежутка вогнутости или выпуклости: $(-\infty,-1),(-1,0),(0,\infty)$. С.3.Методом пробных точек изучим знак второй производной в этих промежутках, и полученные результаты впишем в таблицу 3.

Таблица 3

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$y''(x)$	$-$	∞	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\cap$	∞	$\cap$	0	$\cup$

С.4. Анализируя таблицу 3, приходим к выводам, что график функции выпуклый на интервале $(-\infty,-1)$, функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=-1$, справа от которой график также выпуклый. В интервале $(0,\infty)$ график функции вогнутый.

С.5. Точка $x=0$ является точкой перегиба.

Д. Построение графика функции.

Объединяя результаты исследований, проведенных в предыдущих пунктах, пользуясь таблицами 1-3, строим график функции:

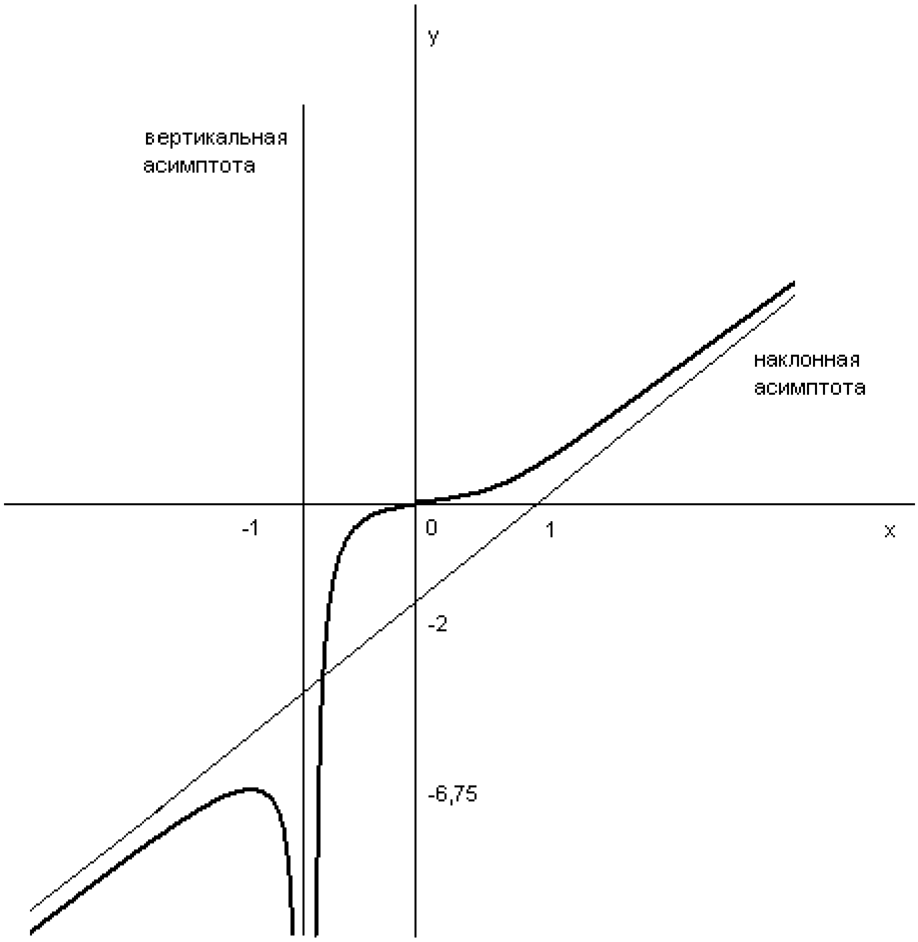


Рис.3. График функции $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

(для удобства воспроизведения взяты разные масштабы делений по осям координат).

Пример № 4.

Исследовать функцию $y = x\sqrt{1-x}$ и построить ее график.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Функция определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $1-x \ge 0$, следовательно, $D(y) = \{x : x \in (-\infty,1]\}$.

А.2. Очевидно, что $y(x) \ne y(-x)$ и $y(x) \ne -y(-x)$, т.е. функция не четная и не нечетная.

Следовательно, $y(x)-$ функция общего вида.

Не существует такого числа *Т*, чтобы выполнялось равенство $y(x+T) = y(x)$:

$y(x)-$непериодическая функция.

А.3. Легко видеть, что $y = 0$ при $x = 0$, или $x = 1$, т.е. график функции пересекает координатные оси в начале координат $O(0,0)$ и в точке $(1,0)$.

А.4. $y(1) = 0$ и точка $x = 1$ является правой границей области определения. Точек разрыва нет, функция не имеет вертикальных асимптот.

А.5. Поскольку точка $x = 1$ правая граница области определения, правее этой точки график функции не имеет продолжения. В точке $O(0,0)$ график пересекает координатные оси, следовательно, только в этой точке функция может изменить знак. Таким образом, возможны два промежутка знакопостоянства функции: $(-\infty,0),(0,1)$. Методом пробных точек определяем знак функции в этих промежутках и заносим результаты в таблицу 1:

Таблица 1

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$
$y(x)$	$-$	$+$

Следовательно, функция действительно меняет знак при переходе через точку $x = 0$, ее график функции лежит в 1 и 3 квадрантах ниже оси абсцисс при $x \in (-\infty,0)$ и выше оси абсцисс при $x \in (0,1)$, а в точке $x = 1$ $y = 0$.

А.6. Предел $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = \infty$ показывает, что функция не имеет наклонных асимптот.

А.7. Изучим поведение функции при $x \to -\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{1-x} = -\infty$, поскольку $\sqrt{1-x} > 0$.

Следовательно, при $x \to -\infty$ функция бесконечно убывает.

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

В.1. Найдем производную функции.

$$y' = \frac{3(\frac{2}{3} - x)}{2\sqrt{1-x}}.$$

Уравнение $y'=0$ имеет единственный конечный корень $x=\frac{2}{3}$, представляющий собой критическую точку, в которой функция может иметь экстремум. Точка $x=1$ не представляет интереса, поскольку она – граница области определения.

В.2. Таким образом, область определения функции разбивается на два промежутка, где производная имеет постоянный знак – $(-\infty,\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},1)$.

В.3. Методом пробных точек, анализируя знак производной в этих интервалах, и, занося полученные результаты в таблицу 2 , приходим к следующим выводам:

Таблица 2

x	$(-\infty,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(-\infty,\frac{2}{3})$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	↑	$\approx 1{,}15$ *(max)*	↓

В.4. В области $(-\infty,\frac{2}{3})$ функция возрастает, а в области $(-\infty,\frac{2}{3})$ убывает.

В.5. Таким образом, в точке $x=\frac{2}{3}$ функция имеет максимум, значение которого примерно равно $1{,}15$.

Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить эскиз ее графика, указывая точки пересечения с координатными осями, точки минимума и максимума, при этом удобно пользоваться таблицами 1и 2.

С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

С.1. Найдем вторую производную функции:

$$y''=\frac{3(x-\frac{4}{3})}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

С.2. Для нахождения критических точек решим уравнение $y''(x)=0$, которое имеет конечный корень $x=\frac{4}{3}$. Но этот корень не принадлежит области определения функции, т.е., в области определения нет критических точек, следовательно, нет точек перегиба графика функции.

С.3. Вторая производная сохраняет знак для всех $x\in(-\infty,1)$, который легко определить, вычислив значение функции в одной точке. Например, $y''(0)=-1$.

С.4. В данном случае во всей области определения график функции выпуклый.

С.5. Точек перегиба нет. Построим таблицу 3, которая из-за отсутствия критических точек принимает крайне простой вид:

Таблица 3

x	$(-\infty,1)$
$y''(x)$	$-$
$y(x)$	$\cap$

Д. Построение графика функции.

11. По таблицам 1-3 строим график функции:

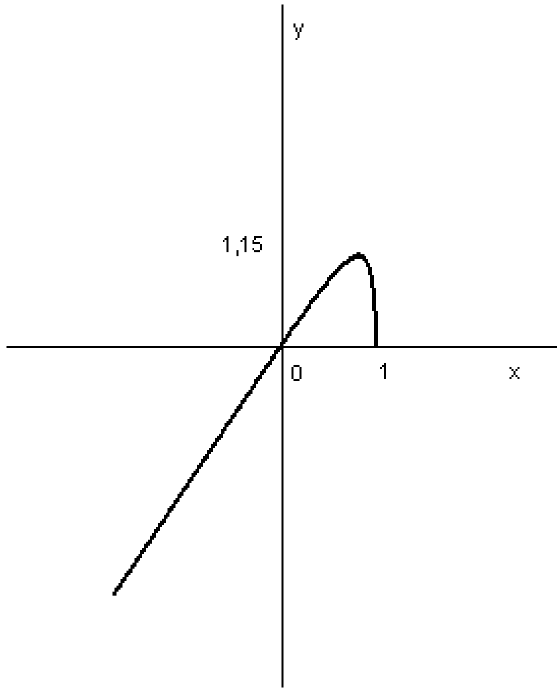


Рис.4. График функции $y = x\sqrt{1-x}$.

Пример № 5.

Исследовать функцию $y = \ln(5 - x^2)$ и построить ее график.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Функция определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $5 - x^2 > 0$, следовательно, $D(y) = \{x : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$.

А.2. Очевидно, что $y(x) = y(-x)$, т.е. функция четная. Следовательно, ее график должен быть симметричным относительно оси ординат.

Не существует такого числа *T*, чтобы выполнялось равенство $y(x+T) = y(x)$: $y(x)-$непериодическая функция.

А.3. $y = \ln 5$, при $x = 0$ и $y = 0$, при $x = \pm 2$, т.е. график функции пересекает координатные оси в точках $(0, \ln 5), (-2{,}0)$ и $(2{,}0)$.

А.4. В области определения у функции нет точек разрыва, но как легко видеть $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}} \ln(5 - x^2) = -\infty$, поэтому прямые $x = \pm\sqrt{5}$ являются вертикальными асимптотами, проходящими через граничные точки области определения.

A.5. График функции пересекает ось абсцисс в точках $(-2,0),(2,0)$. Тогда, поскольку $y(0)=\ln 5>0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}} y(x)=\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}} \ln(5-x^2)=-\infty$, приходим к заключению, что промежутки $(-\sqrt{5},-2),(-2,2)$ и $(2,\sqrt{5})$ являются промежутками знакопостоянства: между значениями $x=\pm 2$ график функции лежит выше оси абсцисс, а правее и левее этих значений – ниже.

A.6. Пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5}}\dfrac{\ln(5-x^2)}{x}=\mp\infty$ показывают, что функция не имеет наклонных асимптот.

A.7. Согласно анализу, проведенному в пункте A.4 функция бесконечно убывает при $x\to\pm\sqrt{5}$:

Занесем полученные результаты в таблицу 1:

Таблица 1

x	$(-\sqrt{5},-2)$	$(-2,2)$	$(2,\sqrt{5})$
$y(x)$	–	+	–

B. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.

B.1. Найдем производную функции:

$$y'=-\frac{2x}{5-x^2}.$$

B.2. Уравнение $y'=0$ имеет единственный корень $x=0$, представляющий собой стационарную точку, в которой функция может иметь экстремум.

B.3. Область определения функции разбивается на два промежутка знакопостоянства – $(-\sqrt{5},0),(0,\sqrt{5})$.

B.3. Анализируя знак производной в этих интервалах, и, занося полученные результаты в таблицу 2 , приходим к следующим выводам:

Таблица 2

x	$(-\sqrt{5},0)$	0	$(0,\sqrt{5})$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	↑	$\ln 5$ *(max)*	↓

B.4. Таким образом, в области $(-\sqrt{5},0)$ функция возрастает, в области $(0,\sqrt{5})$ - убывает. B.5. В точке $x=0$ функция имеет максимум, значение которого равно $\ln 5$.

Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить эскиз графика, указывая точки пересечения с координатными осями и точку максимума, при этом удобно пользоваться таблицами 1 и 2.

C. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

C.1. Найдем вторую производную функции:

$$y''=-\frac{2(5+x^2)}{(5-x^2)^2}.$$

С.2. Вторая производная не определена в точках $x = \pm\sqrt{5}$, но ни где не превращается в нуль.

С.3. Очевидно, для $\forall x \in D(y) \quad y''(x) < 0$.

С.4. График функции выпуклый во всей области определения.

С.5. Точек перегиба нет.

Построим таблицу 3, которая из-за отсутствия точек перегиба принимает крайне простой вид:

Таблица 3

x	$(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$
$y''(x)$	$-$
$y(x)$	$\cap$

Д. Построение графика функции.

По таблицам 1-3 построим график функции:

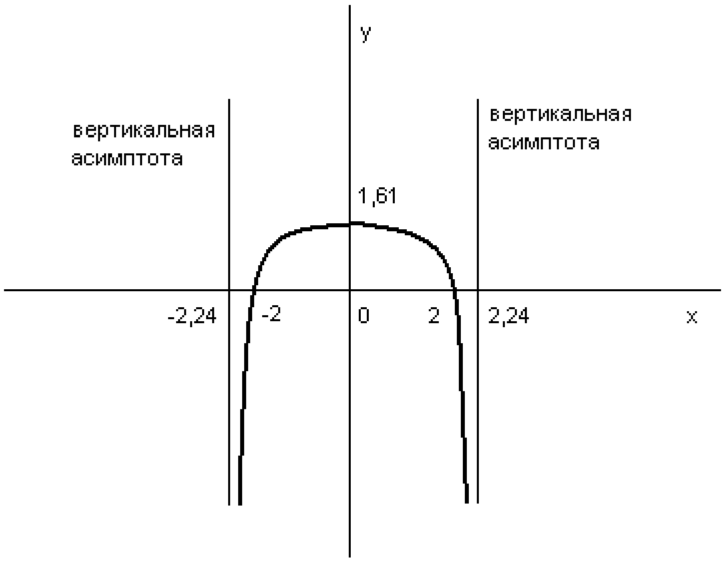


Рис.5. График функции $y = \ln(5 - x^2)$, где взяты значения $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, $\ln 5 \approx 1{,}61$.

Пример 6. Исследовать функцию

$$y(x) = xe^{-\frac{1}{4}x^2}$$

и построить ее график.

А. Общие характеристики функции.

А.1. Функция определена множестве $D(f) = (-\infty, \infty)$.

А.2. Очевидно, что $y(-x) = -xe^{-\frac{1}{4}(-x)^2} = -xe^{-\frac{1}{4}x^2} = -y(x)$, т.е. функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

Не существует такого числа T, чтобы выполнялось равенство

$y(x+T) = y(x)$:

$y(x) -$ непериодическая функция.

А.3. Легко видеть, что $y = 0$ при $x = 0$, т.е. график функции имеет единственную точку пересечения с координатными осями - $(0{,}0)$.

А.4. Функция не имеет точек разрыва, у нее нет вертикальных асимптот.
А.5. $y(x) > 0$ при $x > 0$ и $y(x) < 0$ при $x < 0$. Таким образом, функция имеет два промежутка знакопостоянства $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. На левой полуоси ее график лежит ниже оси абсцисс, на правой – выше.
А.6. Чтобы найти наклонные асимптоты изучим соответствующие пределы при $x \to \pm\infty$: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{xe^{-\frac{x^2}{4}}}{x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$. Следовательно, функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ - ось абсцисс.
А.7. Изучим поведение функции при $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-\frac{1}{4}x^2} = 0$.
Занесем полученные результаты в таблицу 1:

Таблица 1

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$y(x)$	–	+

В. Исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы.
В.1. Найдем производную функции:

$$y' = e^{-\frac{x^2}{4}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

В.2. Уравнение $y' = 0$ имеет корни $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$, представляющие собой стационарные точки, в которых функция может иметь экстремум.
В.3. Область определения функции разбивается на три промежутка $(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$ знакопостоянства производной. Анализируя знак производной в этих интервалах и занося полученные результаты в таблицу 2, приходим к следующим выводам:

Таблица 2

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$y'(x)$	–	0	+	$-\infty$	+
$y(x)$	↓	≈ –0,9 *(min)*	↑	≈ 0,9 *(max)*	↓

В.4. Как видно из таблицы в области $(-\infty, -\sqrt{2})$ функция убывает, в области $(-\infty, -\sqrt{2})$ возрастает, а в области $(\sqrt{2}, \infty)$ функция снова убывает.
В.5. В точке $x = -\sqrt{2}$ функция имеет минимум, значение которого примерно равно -0,9, а в точке $x = \sqrt{2}$ функция имеет максимум, значение которого примерно равно 0,9.
Завершен второй условный раздел исследования функции и можно построить эскиз графика, указывая точки минимума и максимума. При этом пользуемся таблицами 1 и 2.
С. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

С.1. Для изучения выпуклости и вогнутости графика, а также для нахождения точек перегиба найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4}}(x^2 - 6)}{4}.$$

С.2. Уравнение $y''(x) = 0$ имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6}$, $x_3 = -\sqrt{6}$.

С.3. Знаки второй производной в промежутках $(-\infty,-\sqrt{6})$ $(-\sqrt{6},0)$ $(0,\sqrt{6})$ $(\sqrt{6},\infty)$ определяются методом пробных точек. Результаты вписаны в таблицу 3.

Таблица 3

x	$(-\infty,-\sqrt{6})$	$-\sqrt{6}$	$(-\sqrt{6},0)$	0	$(0,\sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6},\infty)$
$y''(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$y(x)$	$\cup$	$\approx -0{,}6$	$\cap$	0	$\cup$	$\approx 0{,}6$	$\cap$

С.4. Анализ таблицы 3 показывает, что в области $(-\infty,-\sqrt{6})$ график функции выпуклый, в точке $(-\sqrt{6};-0{,}6)$ выпуклость переходит в вогнутость, в области $(-\sqrt{6},0)$ график функции вогнутый и в области $(0,\sqrt{6})$ график опять выпуклый.

С.5. График функции имеет три точки перегиба: $(-\sqrt{6};-0{,}6)$, $(0;0)$, $(0{,}6,\sqrt{6})$.

Д. Построение графика функции.

По таблицам 1-3 строим график функции:

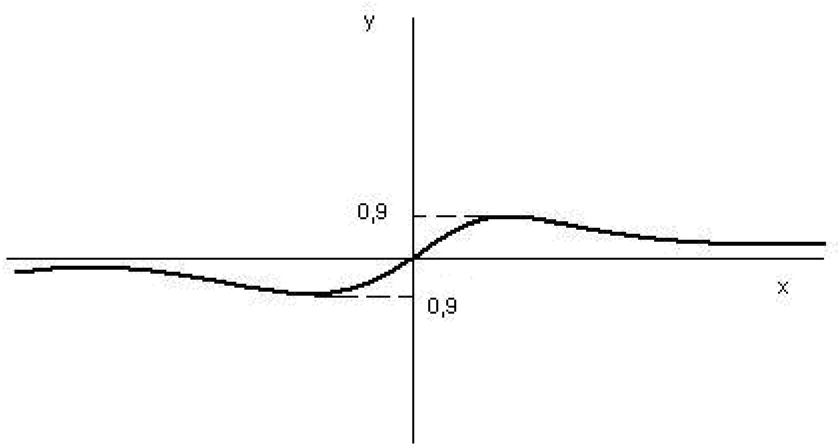


Рис.6. График функции $y(x) = xe^{-\frac{1}{4}x^2}$.

2.6. Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1.

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$; 2. $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x}$; 3. $y = \dfrac{(x-1)e^{3x+1}}{3}$; 4. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

Вариант 2.

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; 2. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$; 3. $y = \dfrac{3(1+\ln x)}{x}$; 4. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

Вариант 3.

1. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$; 2. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$; 3. $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$;

4. $y = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Вариант 4.

1. $y = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$; 2. $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$; 3. $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 4. $y = x\sqrt{3(1-x)}$

Вариант 5.

1. $y = \dfrac{x^3}{2 + x^2}$; 2. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$; 3. $y = x - \ln x$; 4. $y = x\sqrt[3]{4x(x^2 - 3)}$

Вариант 6.

1. $y = (2 - x)(x = 1)^2$; 2. $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 1}$; 3. $y = \dfrac{e^x \ln x}{x}$; 4. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

Вариант 7.

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$; 2. $y = \dfrac{x^4}{(1 + x^3)}$; 3. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 4. $y = x^2 e^{-x}$

Вариант 8.

1. $y = (x^2 - 1)^2$; 2. $y = \dfrac{(x^3 + 4)}{x^2}$; 3. $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 4. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

Вариант 9.

1. $y = 3(x-2)^2(x-1)$; 2. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 3. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$; 4. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

Вариант 10.

1. $y=x^4-8x^2+7$; 2. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 3. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$; 4. $y=(x+2)e^{-x}$.

Вариант 11.

1. $y=2+4x-\dfrac{x^3}{3}$; 2. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; 3. $y=\dfrac{(x-3)^2}{x+2}$; 4. $y=10x^2e^{2x}$.

Вариант 12.

1. $y=6x^2-x^3$; 2. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$; 3. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$; 4. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Вариант 13

1. $y=\dfrac{4x^3+x^4}{9}$; 2. $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$; 3. $y=x^2\ln x$; 4. $y=x+arctgx$.

Вариант 14

1. $y=\dfrac{4+x^3}{x^2}$; 2. $y=1+3x-x^3$; 3. $y=x\ln x$; 4. $y=x+3arcctgx$.

Вариант 15

1. $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+\dfrac{7}{4}$; 2. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; 3. $y=\ln(x^2-4)$; 4. $y=(x+1)\sqrt{-3x}$.

Вариант 16

1. $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$; 2. $y=16x(x-1)^3$; 3. $y=\ln(1+x^4)$; 4. $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{-x}$.

Вариант 17

1. $y=x+\dfrac{4}{x+2}$; 2. $y=3(x-2)^2(x+1)$; 3. $y=10xe^{2x-1}$; 4. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$.

Вариант 18

1. $y=\dfrac{4x^3+x^4}{9}$;   2. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$;   3. $y=x\exp(-\dfrac{x^2}{2})$;   4. $y=(x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Вариант 19.

1. $y=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$;   2. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$;   3. $y=\dfrac{10\ln x}{\sqrt{x}}$;   4. $y=\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.

Вариант 20.

1. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+5$;   2. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$;   3. $y=x\ln^2 x$;   4. $y=\sqrt{x^2-1}$.

Вариант 21.

1. $y=x^3-9x^2+15x+3$; 2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;   3. $y=\exp(\dfrac{x+1}{x})$;   4. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

Вариант 22.

1. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$;   2. $y=\dfrac{4x^3+3x^4}{12}$;   3. $y=\ln(2x^2+3)$;   4. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$.

Вариант 23.

1. $y=\dfrac{(x^2-5)^3}{125}$;   2. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;   3. $y=xe^{1-x}$;   4. $y=\sqrt{x^2+2x+2}$.

Вариант 24.

1. $y=(x+1)(x^2-9)$;   2. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; 3. $y=(x-1)\exp(2-x)$;   4. $y=x-arctgx$.

Вариант 25.

1. $y=(x-1)^3+\dfrac{(x-1)^4}{4}$;   2. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$;   3. $y=\dfrac{0{,}5x^3}{(x+1)^2}$;   4. $y=\sqrt{x^2+1}$.

Вариант 26.

1. $y = 2x^2 - x^4$; 2. $y = \exp\frac{1}{x}$; 3. $y = (3x^4 + 1)x^3$; 4. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Вариант 27.

1. $y = (x+3)x^2$; 2. $y = \frac{x^2}{x-2}$; 3. $y = \frac{\ln x + 1}{x}$; 4. $y = 2x - \arcsin x$.

Вариант 28.

1. $y = (x^2 - 1)^2$; 2. $y = \frac{x^2}{x-1}$; 3. $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$; 4. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.

Вариант 29.

1. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$; 2. $y = \frac{2x+1}{x^2}$; 3. $y = x\exp(-\frac{x^2}{2})$; 4. $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

Вариант 30.

1. $y = e^{-x} + e^{3x}$; 2. $y = x\exp\frac{1}{x^2}$; 3. $y = xarctgx$; 4. $y = |\cos x| - x$.

Примечание: наряду с обозначением e^x используется обозначение $\exp(x)$, которое более удобно в тех случаях, когда в показателе стоит сложная функция.

3. Дополнительные сведения о построении графиков функций

3.1. Преобразования графиков функций

Под *деформацией графика* функции $y = f(x)$ мы имеем в виду построение геометрическими методами графика функции

$$y = A \cdot f\left[k(x \pm a)\right] \pm B, \tag{3.1}$$

исходя из графика функции $y = f(x)$. В формуле (1.1) числа A, B, k, a считаются заданными, причем a и B положительными. Известный нам график функции $y = f(x)$ будем называть *базовым*.

Простейшим преобразованиям графика функции можно сопоставить отвечающие им преобразования координатных осей. Например, параллельный перенос графика в ту или иную сторону относительно системы координат равносилен переносу координатных осей в противоположную сторону относительно графика. Поэтому при решении задачи деформации графика мы будем использовать параллельно два метода:

- преобразования (сжатие, параллельный перенос и др.) графика функции;
- перемасштабирование и перенос координатных осей.

Учитывая порядок выполнения арифметических операций, будем действовать поэтапно, выполняя (на всей области определения базовой функции) сначала действия, связанные с переменной x, а затем – с переменной y.

Напомним, что при симметричном отражении относительно оси OX точка (x,y) переходит в точку $(x,-y)$, т.е. ордината меняет знак, а абсцисса остается прежней. Аналогично, если точку (x,y) симметрично отразить относительно оси OY, то получится точка $(-x,y)$.

График функции $y = f(kx)$

Построим график функции $y = f(kx)$, используя *принцип сохранения ординат* предварительно построенного базового графика. Для этого выясним, в точку с какой абсциссой x перенесется точка (x_0, y_0) этого графика. Приравнивая ординаты, получаем:

$$f(kx) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad kx = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 / k. \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что каждая точка базового графика переносится, вдоль оси OX, на измененное в $1/k$ раз от оси OY расстояние, т.е. исходный график растягивается вдоль оси OX при $k < 1$, но сжимается при $k > 1$.

Таким образом, при построении графика $f(kx)$ происходит деформация графика исходной функции $f(x)$ вдоль оси OX, т.е. по горизонталям (рис. 1*a*).

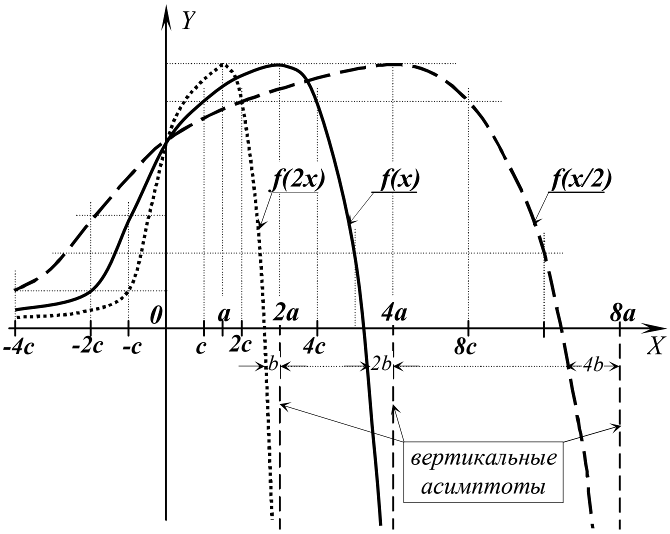


Рис.1*а*. Деформация базового графика $y = f(x)$ вдоль оси OX при $k = 2$ *(сжатие)* и $k = 1/2$ *(растяжение)*.

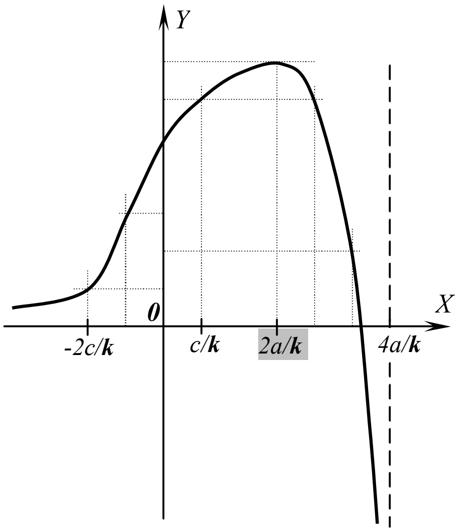


Рис.1*б*. Перемасштабирование оси OX при построении графика $y = f(kx)$.

С другой стороны, такая деформация означает, что любой *горизонтальный* линейный размер изменяется в $1/k$ раз. Как следствие, отрезок единичной длины, т.е. прежняя единица масштаба по оси OX, может рассматриваться теперь как отрезок длины $1/k$. Будем обозначать это так: $1_x \mapsto 1/k$ Горизонтальная деформация графика заменяется, таким образом, <u>перемасштабированием оси</u> OX, и поэтому представленный на рис. 1*б* график является базовым при $k = 1$, но графиком функций $y = f(2x)$ при $k = 2$ или $y = f(2/x)$ при $k = 1/2$.

Перемасштабирование оси OX очень удобно при построении графиков периодических функций: если функция $y_0 = f(x)$ имела период T_0, то функция $y = f(kx)$ будет иметь период $T = T_0/k$. Вследствие этого достаточно, после построения стандартного базового графика на периоде T_0, разделить все ранее отмеченные абсциссы на k.

График функции $\boldsymbol{y = f(x \pm a)}$

Аналогично предыдущему, при построении графиков вида $\boldsymbol{y = f(x \pm a)}$ имеем:

$$y = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x \pm a) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad x \pm a = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 \mp a, \qquad (3.3)$$

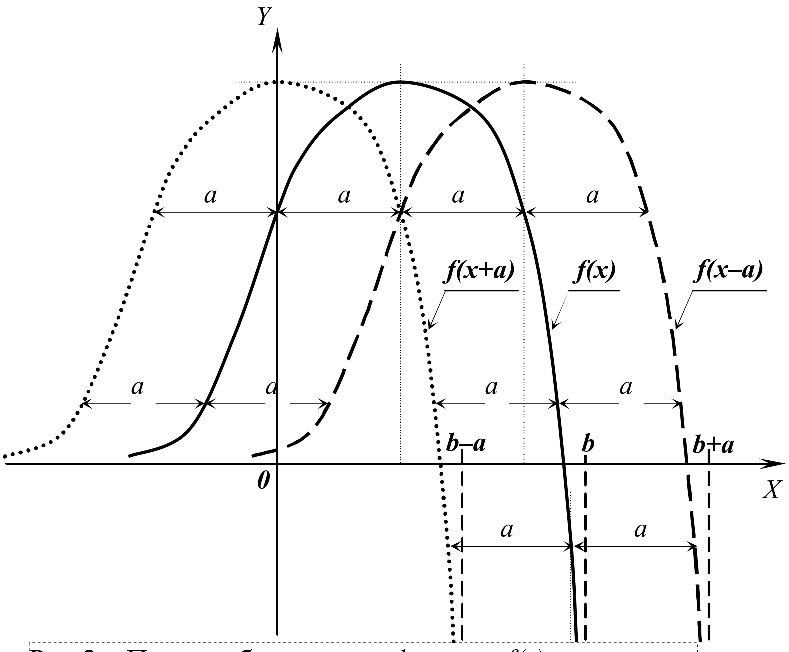


Рис.2*а*. Перенос базового графика *y= f(x)* вдоль оси *OX* на *a* единиц вправо или влево.

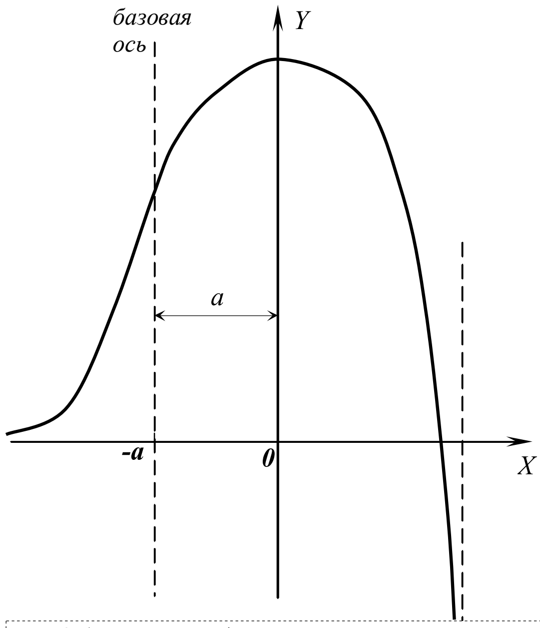


Рис.2*б*. Перенос базовой оси вправо для построения графика *y = f(x +a)*.

что означает, как показано на рис. 2*а*, <u>перенос</u> каждой точки <u>базового графика</u> по соответствующей горизонтали, т.е. вдоль оси OX, на a единиц влево для графика $f\left(x+a\right)$, но вправо для графика $f\left(x-a\right)$.

Вполне очевидно, что перенос базового графика на a единиц влево или вправо относительно оси OY эквивалентен <u>переносу</u> этой <u>оси</u> (т.е. начала координат на оси OX) относительно базового графика на те же a единиц, но в противоположном направлении.

Заметим, что в приведенных в вышеизложенных пунктах выкладках речь шла не о решении соответствующего уравнения, а всего лишь о формальном снятии символа функции (при выполнении этой операции предполагается, что в рассматриваемой области значений аргумента из равенства значений ординат точек графика рассматриваемой функции следует равенство соответствующих значений аргумента).

График функции $y = A \cdot f\left(x\right)$

Здесь, как и в следующем пункте, используется *принцип сохранения абсцисс* базового графика.

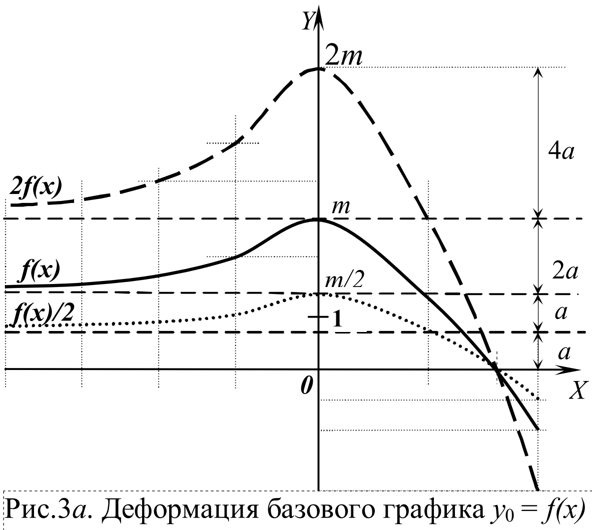


Рис.3*а*. Деформация базового графика $y_0 = f(x)$ вдоль оси *OY* при $A = 1/2$ *(сжатие)* и $A = 2$ *(растяжение)*.

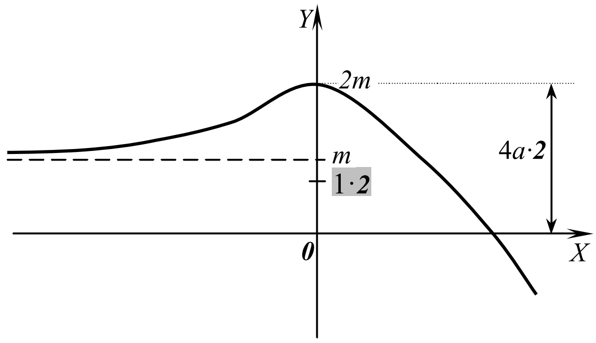


Рис.3*б*. Перемасштабирование оси *OY* при построении графика *y* =**2 *f(x)***; базовый график $y_0 = f(x)$ – *на рис.3а*.

В нашем случае он сводится к тому, что при каждом фиксированном значении x из области определения базовой функции, ордината базового графика *умножается* на A, т.е. в A раз изменяется расстояние от каждой точки базового графика до оси OX. Таким образом, базовый график растягивается вдоль оси OY в A раз при $A>1$, но сжимается в $1/A$ раз при $A<1$, тем самым деформируясь по вертикали (рис.3*а*).

Это аналогично тому, что все линейные размеры по вертикали, в том числе и единица масштаба по оси OY, изменяются в A раз. Следовательно, можно заменить деформацию на перемасштабирование оси OY: $1_Y \mapsto A$ (рис.3*б*).

График функции y = f(x) ± B

Задающая функцию формула показывает, что происходит *изменение ординат* базовой функции $y_0 = f(x)$ на B единиц, в сторону увеличения или уменьшения, при каждом x из области ее определения. Это означает, что происходит перенос базового графика вдоль оси OY на B единиц соответственно вверх либо вниз (рис.4*а*). С другой стороны, такой перенос

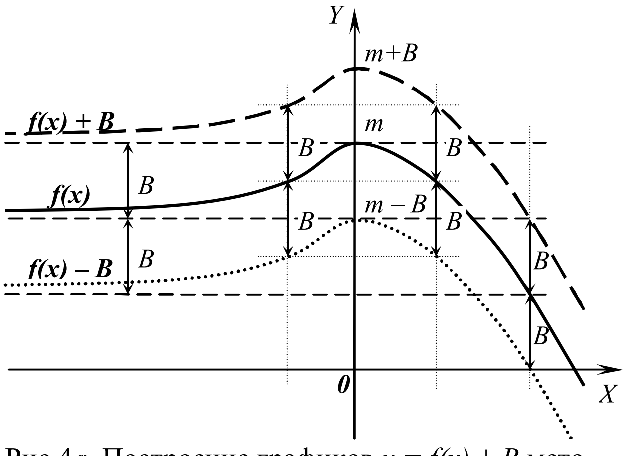


Рис.4*а*. Построение графиков *y = f(x) ± B* методом переноса графика *f(x)* вдоль оси *OY*.

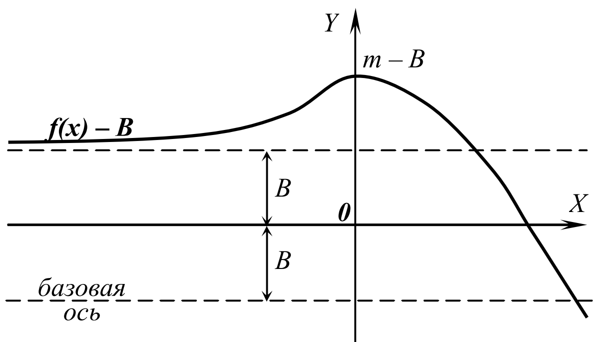


Рис.4*б*. Получение линии *y = f(x) – B* из базового графика *f(x)* (рис.4*а*) переносом базовой оси на *B* единиц вверх.

графика по вертикали можно заменить переносом оси OX относительно графика в направлении, противоположном перемещению графика (рис.4б).

О выборе базового графика

В случае, когда k и A отрицательны, знаки “минус” при них мы будем включать в символ новой базовой функции $\varphi(x)$. Таким образом, базовой может оказаться и одна из функций $f(-x)$, $-f(x)$, либо $-f(-x)$.Что касается построения этих линий, оно легко достигается поворотами исходного графика $y = f(x)$ относительно координатных осей.

Так, при построении графика $\varphi(x)=f(-x)$, согласно (3.2), всякая точка исходной линии с ординатой $y_0=f(x_0)$ переносится с вертикали $x=x_0$ на симметричную ей, относительно оси OY, вертикаль $x=-x_0$, то есть в совокупности происходит *поворот* графика $y=f(x)$ вокруг оси OY на 180°.

При построении графика $\varphi(x)=f(-x)$ всякая точка исходной линии с ординатой $y_0=f(x_0)$ переносится в противоположную ей точку $-y_0$ по вертикали $x=x_0$. Это означает *поворот* (но не отражение!) графика $y=f(x)$ вокруг оси OX. В общем случае получаем следующую таблицу:

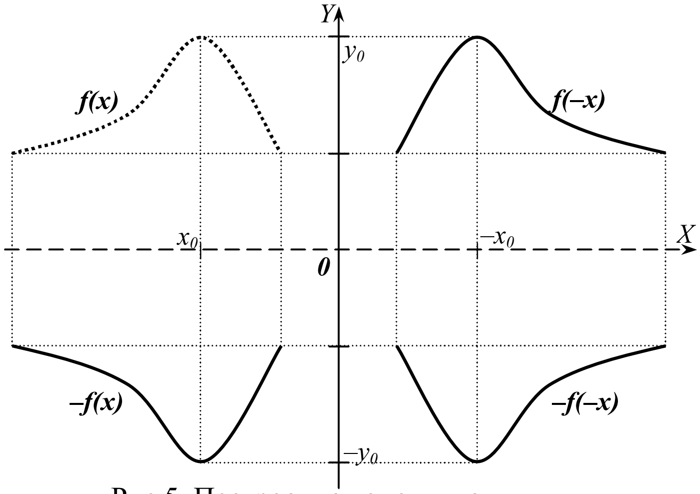


Рис.5. Построение дополнительных базовых графиков.

Знак k	*Знак A*	*Базовая функция*
+	+	$\varphi(x)=f(x)$
+	–	$\varphi(x)=-f(x)$
–	+	$\varphi(x)=f(-x)$
–	–	$\varphi(x)=-f(-x)$

Отметим, что случай $-f(-x)$ есть комбинация двух предыдущих. Все три варианта такого построения графиков показаны на рис.5. Для корректности представления однозначной функции здесь следует считать ось OX линией разреза. Заметим также, что график исходной функции после построений не сохраняется.

3.2. О графиках основных элементарных функций

В силу того, что координатные оси в общем случае подлежат перемасштабированию и последующему перемещению, базовые графики строятся на так называемых *базовых осях*, которые мы будем показывать штриховыми линиями. По этой же причине на базовых графиках показываются только *линейные размеры*, позволяющие легко определить координаты характерных точек того или иного графика относительно *базового начала координат*.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$

Различают два типа графиков степенной функции, соответствующих положительным и отрицательным значениям показателя α.

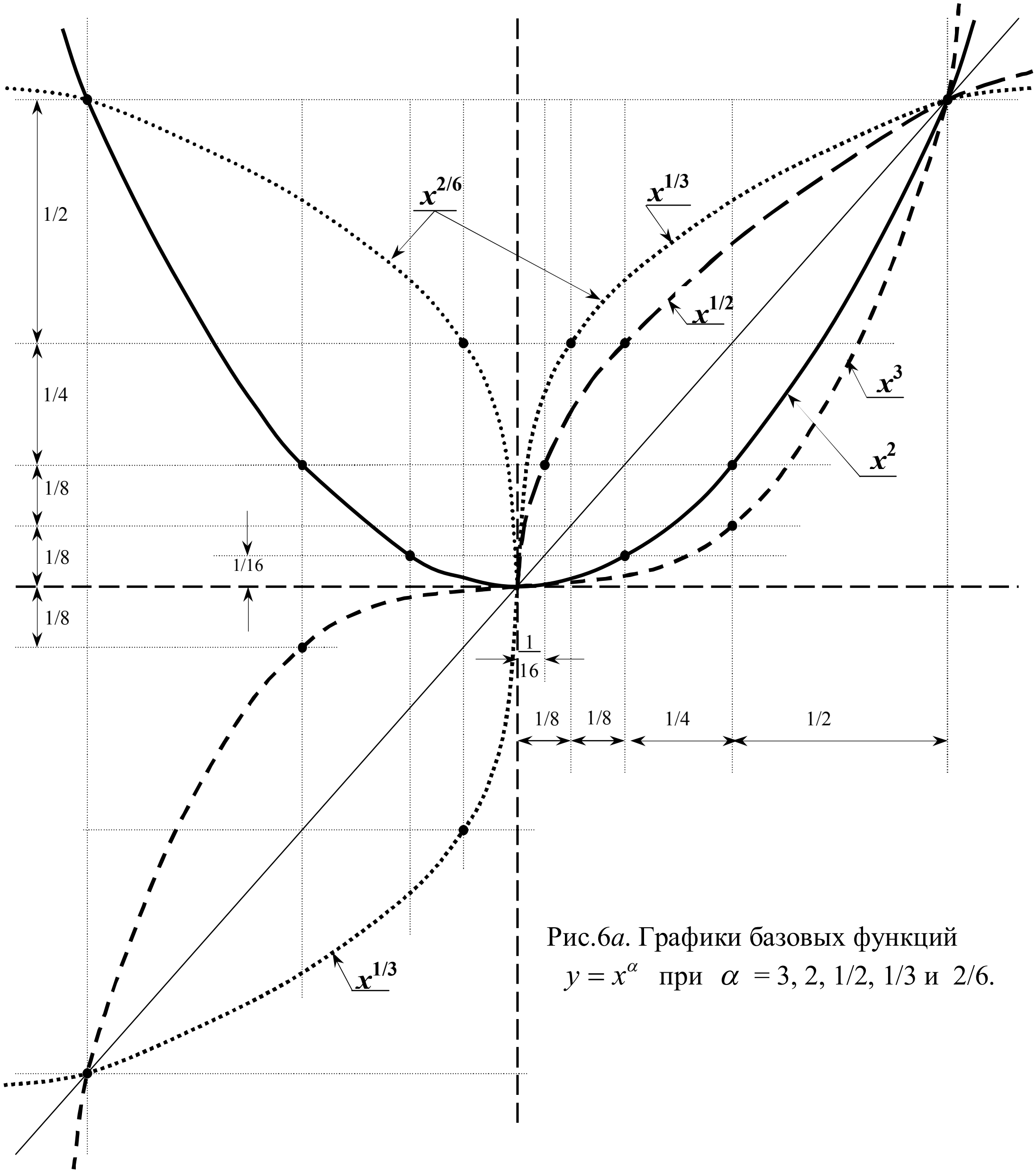


Рис.6*а*. Графики базовых функций
$y = x^{\alpha}$ при α = 3, 2, 1/2, 1/3 и 2/6.

На рис. 6*а* приведены графики базовых функций $y = x^{\alpha}$ при некоторых рациональных значениях $\alpha = m/n$ с положительными m и n. Следует иметь в виду, что выражение $x^{m/n}$ по определению равно $\sqrt[n]{x^m}$, причем операция возведения аргумента x в степень m всегда выполняется в первую очередь, т.е. до извлечения корня степени n.

Напомним также, что, по определению *алгебраического* корня нечетной $(2k+1)$ и четной $(2k)$ степени, где $k \in N$ имеем:

$$y = \sqrt[2n+1]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{2n+1}, \quad \text{но} \quad y = \sqrt[2n]{x} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x = y^{2n}. \end{cases}$$

Из последнего определения вытекает, что $\sqrt[2n]{x^{2n}} = \sqrt[2n]{|x|^{2n}} = |x|$. Отсюда становится очевидным различие между функциями $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{2/6} = \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$, графики которых приведены на том же рисунке.

Гиперболы

Гипербола $\varphi(x) = 1/x$, как и гипербола $\varphi(x) = -1/x$, получаемая поворотом первой вокруг оси *OX,* являются базовыми для дробно-рациональной функции вида $\boldsymbol{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$. Это становится очевидным после преобразования ее к виду (3.1) методом выделения целой части дроби. Построение гиперболы $\varphi(x) = 1/x$ проводится последовательным делением

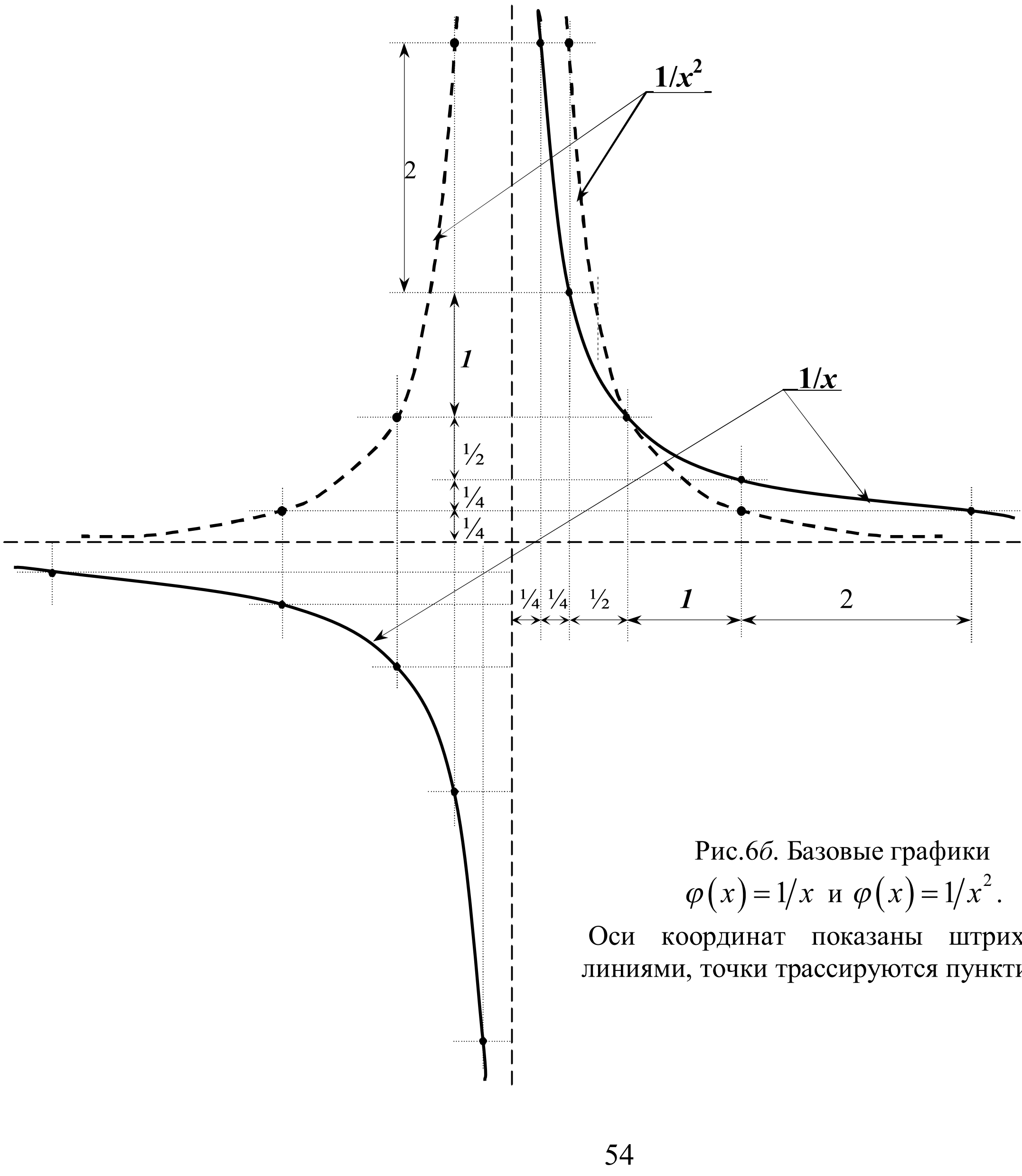


Рис.6*б*. Базовые графики $\varphi(x) = 1/x$ и $\varphi(x) = 1/x^2$.

Оси координат показаны штриховыми линиями, точки трассируются пунктиром.

(а также умножением) на два отрезка единичной длины по одной из осей с одновременным увеличением (соответственно уменьшением) в два раза координаты по другой оси (рис.6*б*).

Базовые оси координат показаны штриховыми линиями; они остаются на конечном графике либо как асимптоты, либо как оси координат.

Гипербола $\varphi(x) = -1/x$ может быть построена аналогично, но по точкам, лежащим во второй и четвертой четвертях. Если функция представлена как $\varphi(x) = -(1/x) = -y_0$, то это соответствует повороту линии $y_0 = 1/x$ на 180° относительно *горизонтальной* базовой оси. Если же функция интерпретируется как $\varphi(x) = 1/(-x) = y_0(-x)$, то линия поворачивается относительно *вертикальной* базовой оси.

На рисунке 6*б* представлен также график четной знакоположительной функции $\varphi(x) = 1/x^2$ (отметим, что эта функция не является гиперболой).

Показательная и логарифмическая функции

По определению, показательная и логарифмическая функции связаны между собой соотношением:

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a y = x, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

При построении базовых графиков этих функций мы воспользуемся одной и той же таблицей, приведенной слева от рис.7*а*. Жирным шрифтом в ней выделены базовые элементы,

x	$y = a^x$
…	…
–3	$1/a^3$
–2	$1/a^2$
–1	$1/a$
0	***1***
1	***a***
2	a^2
3	a^3
…	…
$y = \log_a x$	x

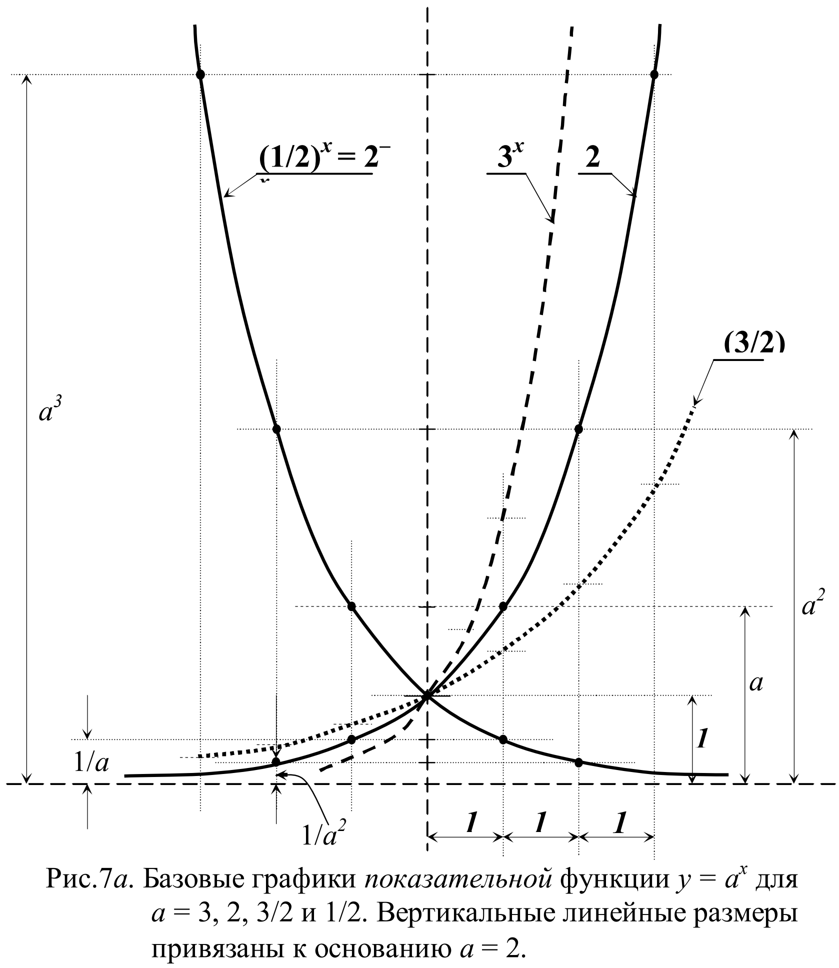


Рис.7*а*. Базовые графики *показательной* функции $y = a^x$ для a = 3, 2, 3/2 и 1/2. Вертикальные линейные размеры привязаны к основанию a = 2.

обязательные для показа на графиках.

На рисунке видно существенное отличие графиков для $0 < a < 1$ и $a > 1$.

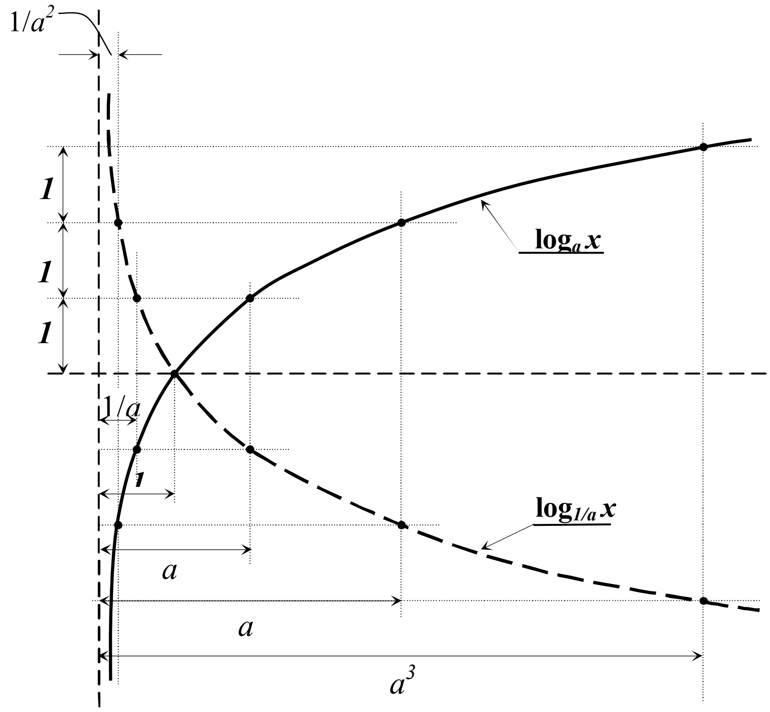


Рис.7*б*. Графики функции $y = \log_a x$ для $a = 2$ и $a = 1/2$.

Обратите внимание на то, что при $b = 1/a$, где $a > 1$, график функции $y = b^x = a^{-x}$ может быть построен поворотом линии $y = a^x$ на 180º относительно *вертикальной* базовой оси.

В случае вертикального перемещения *горизонтальная* базовая ось становится асимптотой.

Графики логарифмической функции $y = \log_a x$, приведенные на рис.7*б*, строятся по той же таблице. Целочисленная градуировка располагается на вертикальной базовой оси. График функции $y = \log_{1/a} x$, где $a > 1$, может быть построен (как и $y = -\log_a x$) поворотом на 180º линии $y = \log_a x$ относительно *горизонтальной* базовой оси. *Вертикальная* же базовая ось при горизонтальном перемещении базового графика $y = \log_a x$ становится асимптотой.

Тригонометрические функции

В силу периодичности функций $\sin(t)$, $\cos(t)$,

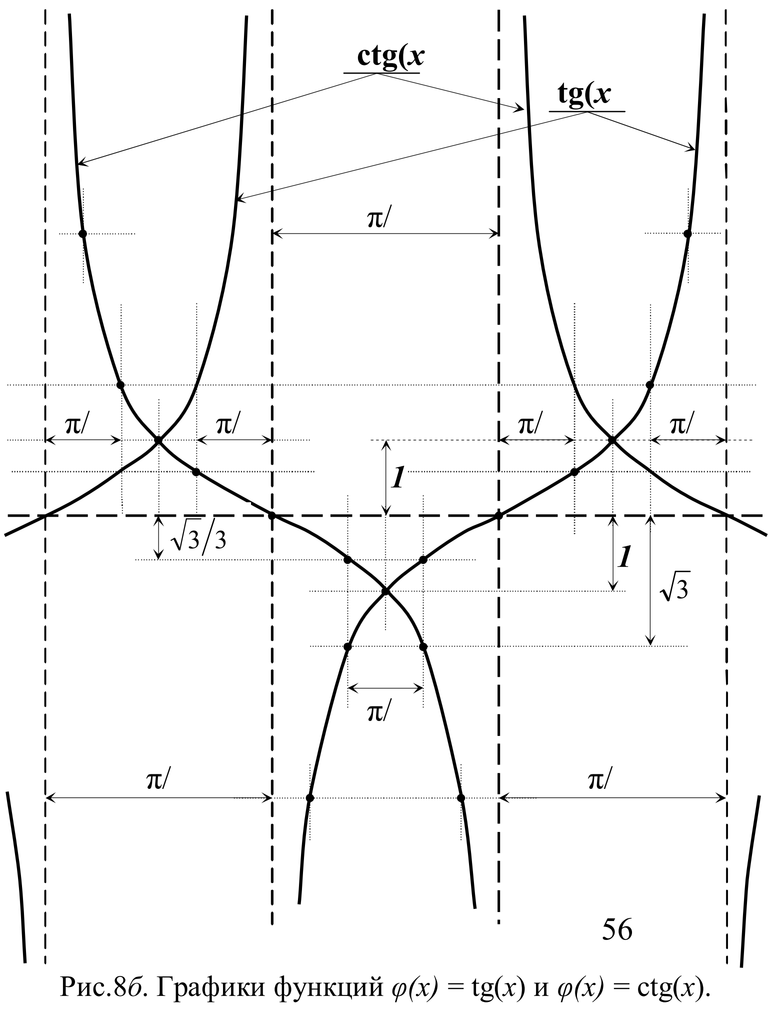


Рис.8*б*. Графики функций $\varphi(x) = \mathrm{tg}(x)$ и $\varphi(x) = \mathrm{ctg}(x)$.

$\mathrm{tg}(t)$ и $\mathrm{ctg}(t)$, базовые графики строятся на промежутке, несколько перекрывающем период T соответствующей функции. Первые две функции к тому же ограничены: $|\sin t| \le 1, |\cos t| \le 1$. Для базовых функций $\varphi(x) = \sin(x)$ и

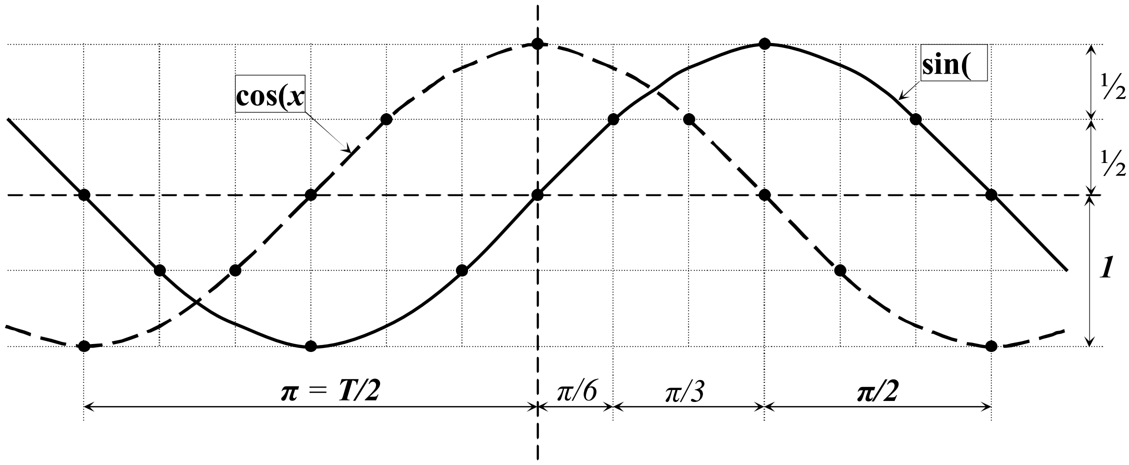


Рис.8*а*. Построение базовых графиков $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$.

$\varphi(x) = \cos(x)$ обычно используется отрезок $[-7\pi/6; 7\pi/6]$, который разбивается на равные части величиной $\pi/6$ с соответствующей трассировкой по вертикали. Горизонтальная трассировка должна соответствовать значениям 0, ±1/2 и ±1 строящейся функции, причем желательно, чтобы единица по вертикали примерно соответствовала $\pi/3$ по горизонтали. Таким образом, возникает стандартная прямоугольная сетка, на которой ведется построение (рис.8*а*). Для уточнения формы кривой рекомендуется привлекать все значения функций, соответствующие градуировке, кратной $\pi/6$.

Графики базовых функций $\varphi(x) = \mathrm{tg}(x)$ и $\varphi(x) = \mathrm{ctg}(x)$, построенные на промежутке, несколько перекрывающем, для наглядности, отрезок $[-\pi; \pi/2]$, показаны на рис.8*б*. При градуировке горизонтальной базовой оси используются значения, кратные $\pi/4$ и $\pi/6$, а вертикальной – значения 0, $\pm\sqrt{3}/3, \pm 1$ и $\pm\sqrt{3}$.

Заметим, что график функции $y = \cos(x)$ может быть построен на основе базовой функции $\varphi(x) = -\sin(x)$ как $y = \varphi(x - \pi/2)$. Аналогично, преобразование $\mathrm{ctg}(x) = -\mathrm{tg}(x - \pi/2)$ позволяет получить график $y = \mathrm{ctg}(x)$ через базовый график $\varphi(x) = -\mathrm{tg}(x)$. В обоих случаях это достигается переносом вертикальной базовой оси на $\pi/2$ влево.

Обратные тригонометрические функции

По определению обратных тригонометрических функций,

$$y = \arcsin(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [-\pi/2; \pi/2], \\ \sin(y) = x; \end{cases} \qquad y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0; \pi], \\ \cos(y) = x; \end{cases}$$

$$y = \mathrm{arctg}(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-\pi/2; \pi/2), \\ \mathrm{tg}(y) = x; \end{cases} \qquad y = \mathrm{arcctg}(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; \pi), \\ \mathrm{ctg}(y) = x. \end{cases}$$

Областью значений для *обратной* функции становится область определения, а областью определения – область значений соответствующей ей тригонометрической функции. Используя в пределах, указанных в определениях, те же стандартные градуиро-вочные сетки, что и в п.2.3, легко построить (рис.9*а,б,в*) соответствующие базовые графики.

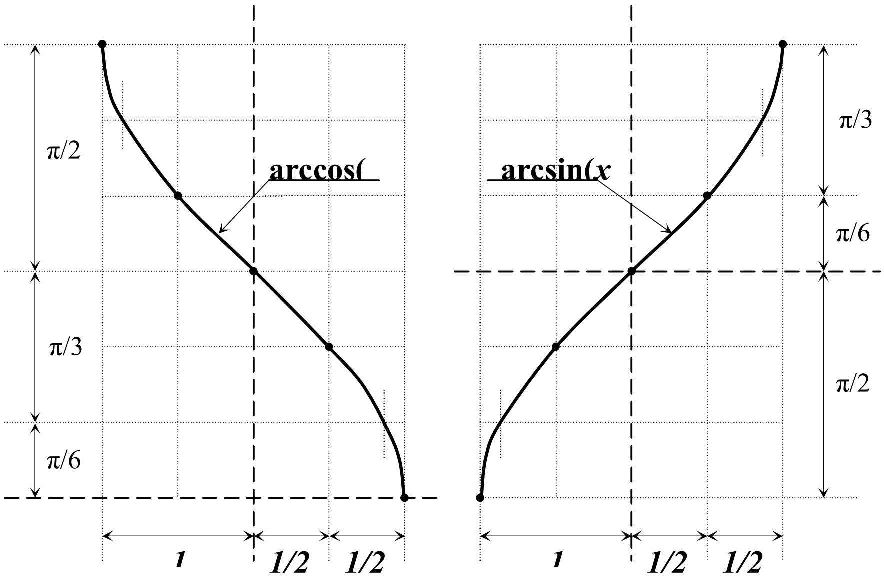


Рис.9*а*. Базовые графики φ(*x*) = arccos(*x*) и φ(*x*) = arcsin(*x*).

Заметим, что в силу известных соотношений: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ $\mathrm{arc\,tg}(x) + \mathrm{arcc\,tg}(x) = \pi/2$ графики функций $\varphi(x) = \arccos(x)$ и $\varphi(x) = \mathrm{arcc\,tg}(x)$ могут быть построены на основе базовых графиков $\varphi(x) = -\arcsin(x)$ и $\varphi(x) = \mathrm{arc\,tg}(x)$ соответственно. Для этого достаточно, после построения базового графика, перенести горизонтальную базовую ось на $\pi/2$ единиц вниз.

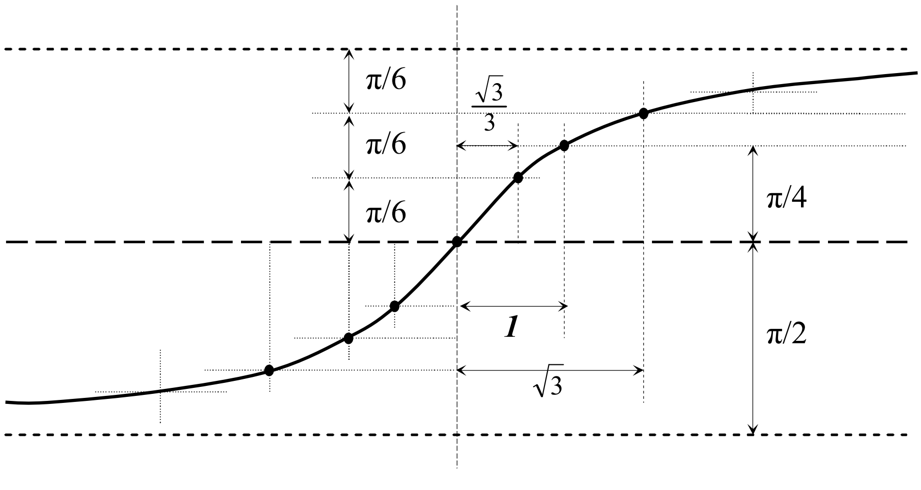


Рис.9*б*. Базовый график φ(*x*) = arctg(*x*).

Обратите внимание на наличие горизонтальных асимптот у линий $\varphi(x) = \mathrm{arc\,tg}(x)$, $\varphi(x) = \mathrm{arcc\,tg}(x)$.

Эти асимптоты должны перемещаться вместе с базовой линией при любых вертикальных перемещениях и деформациях графика. При перемещении же или перемасштабировании вертикальной базовой оси базовый рисунок полностью сохраняется.

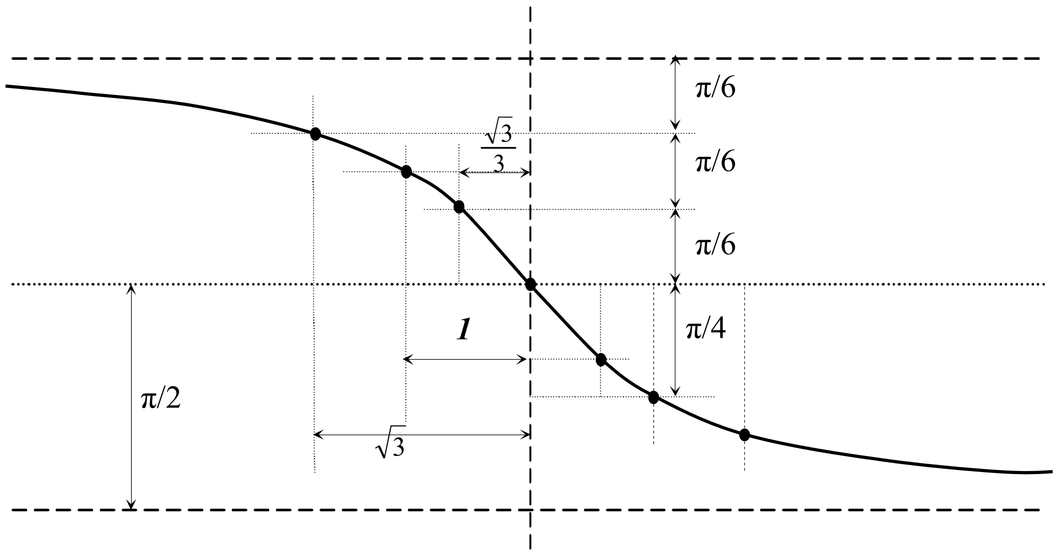


Рис.9*в*. Базовый график φ(*x*) = arcctg(*x*).

3.3. Построение графиков функций методом перемасштабирования и переноса координатных осей.

В общем случае при построении графиков *методом деформации и переноса базового графика* на одном чертеже появляется несколько линий, тем более что вместе с графиком должны перемещаться и все его асимптоты. Это затрудняет чтение чертежа и делает предпочтительным использование *метода перемасштабирования и переноса осей.* Здесь на любом чертеже присутствует только одна, изначально базовая, линия и, в общем случае, две базовые (трафаретные) оси, показываемые штриховой линией.

После приведения функции к виду $y = A \cdot f\left[k(x \pm a)\right] \pm B$ базовой будет одна из функций *φ(x)*, указанных в п. 3.2 . Далее мы будем придерживаться следующего алгоритма:

- построение базового графика *φ(x)*;
- перемасштабирование координатных осей, что дает график $\tilde{\varphi}(x) = A \cdot \varphi(kx)$;
- перенос координатных осей в измененных координатах.

Если перемещение базовой оси не требуется, она становится окончательной координатной осью и показывается сплошной линией. Последнее относится и к перемещенной базовой оси. При этом, как будет видно из примеров, сама базовая ось сохраняется и становится, в зависимости от вида функции, либо асимптотой, либо линией симметрии.

На приводимых ниже примерах мы увидим, что наглядность получаемого изображения будет зависеть от того, насколько удачно выбраны длины единичных отрезков по каждой оси (с учетом переноса осей и необходимости показа всех элементов построения, в том числе точек пересечения линий с осями координат).

Пример 3.3.1. Построим график функции $y = 4 - \sqrt[3]{(8x+5)^2}$.

Приведение функции к виду (3.1) дает:

$$y = 4 - \sqrt[3]{(8x+5)^2} = 4 - \sqrt[3]{8(x+5/8)^2} = 4 - 2\cdot\sqrt[3]{(x+5/8)^2} = 4 + 2\varphi(x+5/8),$$

где $\varphi(x) = -x^{2/3} = -\sqrt[3]{x^2}$ – базовая функция.

Здесь базовый график строится, с учетом четности функции $\varphi(x)$, в IV четверти (относительно базового начала координат) и затем отражается в III четверть. Последующие действия приведены слева от рис.10.

Альтернативный алгоритм состоит в реализации преобразования

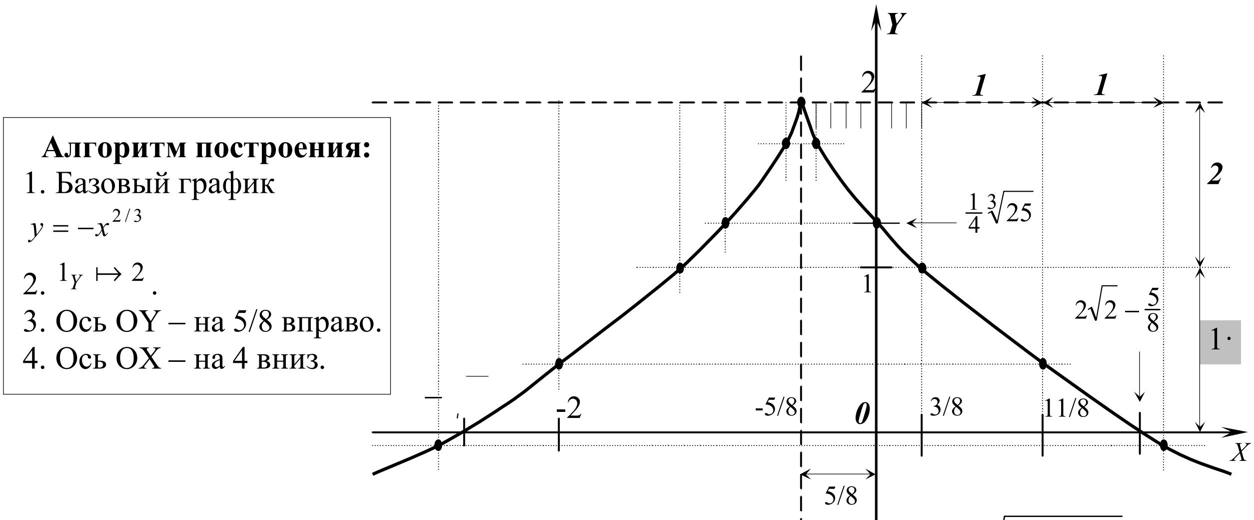


Рис.10. График функции $y = \sqrt[3]{(8x+5)^2}$.

$$y = 4 - \sqrt[3]{(8x+5)^2} = 4 - \sqrt[3]{8(x+5/8)^2} = 4 + \tilde{\varphi}(x+5/8),\ \textit{где}\ \tilde{\varphi}(x) = \varphi(8x),$$

с той же базовой функцией $\varphi(x) = -x^{2/3} = -\sqrt[3]{x^2}$. Он требует изменения масштаба не по оси *OY*, а по оси *OX,* что приводит к иному расположению осей относительно базовой линии (в этом можно будет убедиться на примере 5).

Пример 3.3.2. Построим график дробно-рациональной функции

$$y = \frac{2x-3}{3x+2}\ .$$

Как и в предыдущем примере, приведем функцию к виду (3.1):

$$y=\frac{2x-3}{3x+2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x-3/2}{x+2/3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(x+2/3\right)-13/6}{x+2/3}=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{13}{6}\cdot\frac{1}{x+2/3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{x+2/3}=\frac{13}{9}\cdot\varphi\left(x+2/3\right)+2/3,\quad \text{где}\ \varphi\left(x\right)=-\frac{1}{x}$$ – базовая функция

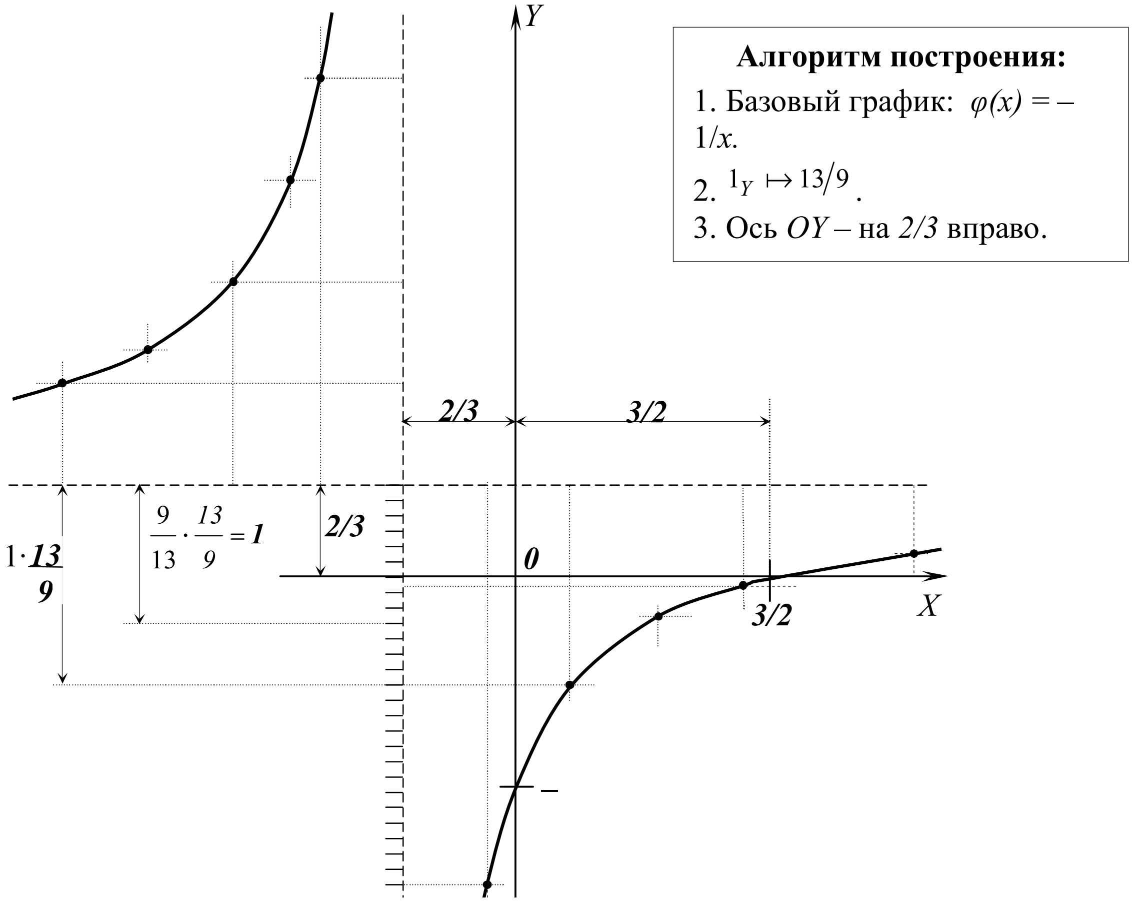


Рис.11. График функции $y=\frac{2x-3}{3x+2}=\frac{2}{3}-\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{x+2/3}=\frac{13}{9}\cdot\varphi\left(x+2/3\right)+2/3$, $\cdot$ (*гипербола*).

где $\varphi\left(x\right)=-\frac{1}{x}$

После построения базового графика $y_0=\varphi\left(x\right)=-1/x$ требуется перемасштабирование только оси OY (у нас $k=1, A=13/9$). Это преобразование мы обозначаем так: $1_Y \mapsto 13/9$. Теперь базовой график стал линией $y_1\left(x\right)=\frac{13}{9}\varphi(x)$. Соответственно, прежний отрезок длины 9/13 переходит в отрезок длиной 1 в новом масштабе. Поэтому фактическую длину 1 для базового графика рекомендуется разделить на 13 равных частей, как это показано на рисунке 11. Далее ось OY переносится на $2/3$ вправо (вместо переноса графика на $2/3$ влево). Теперь базовый график стал линией $y_2(x) = y_1(x + 2/3)$.

Наконец, остается выполнить перенос оси OX на $2/3$ *в новом масштабе* вниз (вместо переноса графика на $2/3$ вверх). Тем самым получен (рис.11) итоговый график функции $y = y_2(x) + 2/3$.

Конечно, можно интерпретировать преобразованную функцию иначе, например как $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{\frac{9}{13}\left(x+\frac{2}{3}\right)} = \varphi\left[\frac{9}{13}\left(x + \frac{2}{3}\right)\right] + \frac{2}{3}$ или как

$$y = \frac{2}{3} - 13 \cdot \frac{1}{9(x+2/3)} = 13 \cdot \varphi\left[9\left(x + \frac{2}{3}\right)\right] + \frac{2}{3}.$$

Базовая функция $\varphi(x) = -1/x$ при этом остается той же, но различаются коэффициенты k и A. Соответственно изменяется и алгоритм построения. График, изображенный на рис.11, оказывается наиболее наглядным – на нем свободно размещаются все элементы, использованные при построении.

Пример 3.3.3. Пусть требуется построить график функции $y = 1 + (1/4)^{2x-1}$.

Здесь возможны два тождественных преобразования, сводящие функцию к виду (3.1):

1) $y = 1 + (1/4)^{2x-1} = 1 + (1/2)^{4x-2} = 1 + (1/2)^{4(x-1/2)} = 1 + \tilde{\varphi}(x - 1/2)$, где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(4x)$
,

2) $y = 1 + 4 \cdot (1/4)^{2x} = 1 + 4 \cdot 2^{-4x} = 1 + 4 \cdot \varphi(4x)$,

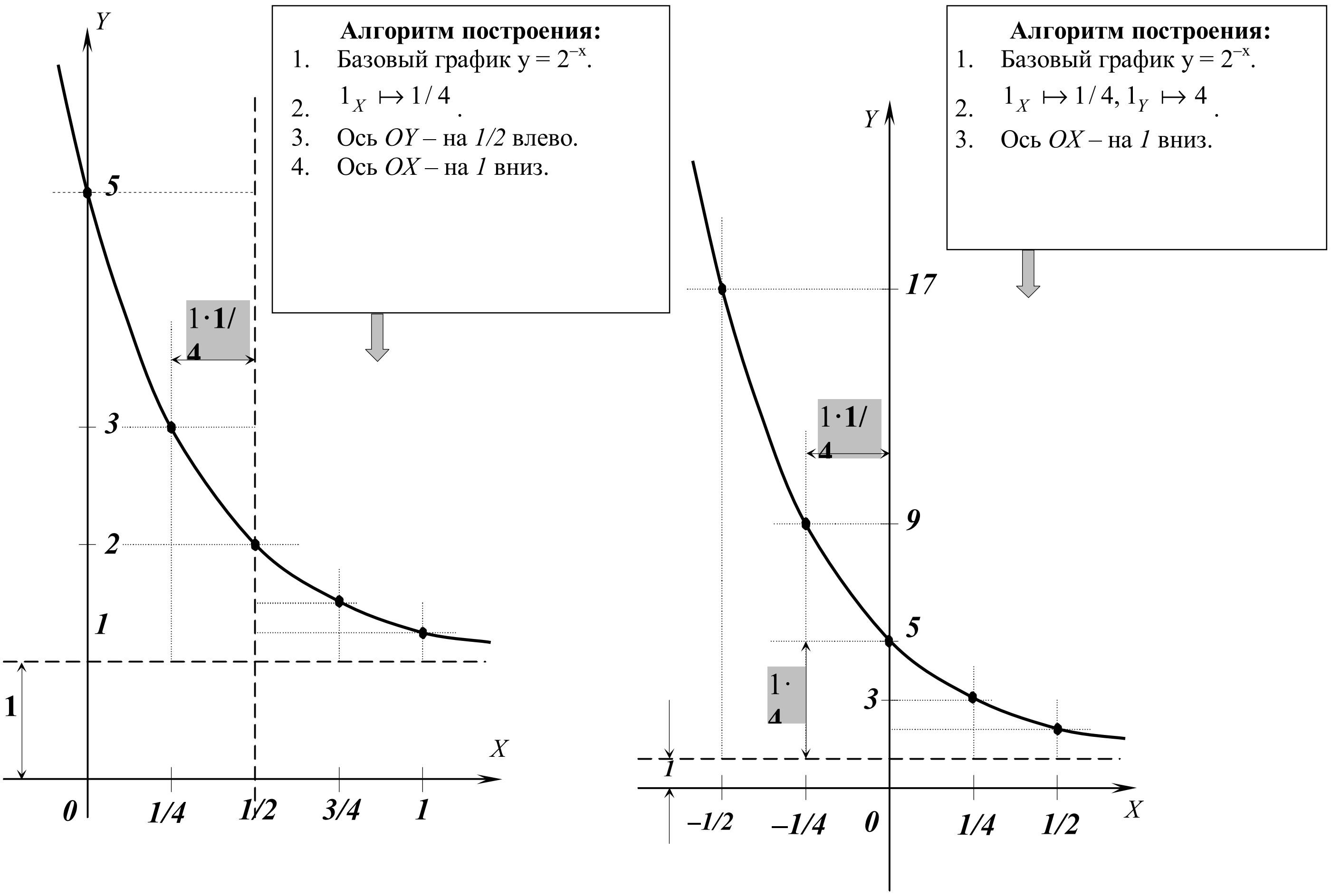


Рис.12. Реализация различных алгоритмов для построения графика функции $y = 1 + (1/4)^{2x-1}$.

с одной и той же базовой функцией $\varphi(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$.

Как видно из рис.12, реализация соответствующих алгоритмов построения приводит к своеобразному выделению различных фрагментов графика.

Пример 3.3.4. Построим график функции $y = 2 + \log_{1/4}(1-2x)$.

Подготовим функцию к построению ее графика, переходя к наиболее удобному для этого основанию 2 и используя при этом известные свойства логарифмов:

$$y = 2 - \tfrac{1}{2} \cdot \log_2(-2(x - \tfrac{1}{2})) = 2 - \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \log_2(-(x - \tfrac{1}{2}))) =$$
$$= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \log_2(-(x - \tfrac{1}{2})) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \varphi(x - \tfrac{1}{2}),$$

где $\varphi(x) = -\log_2(-x) = \log_{1/2}(-x)$ – базовая функция.

Такое преобразование приводит нас к алгоритму, приведенному вместе с графиком исходной функции на рис.13. Обратите внимание на

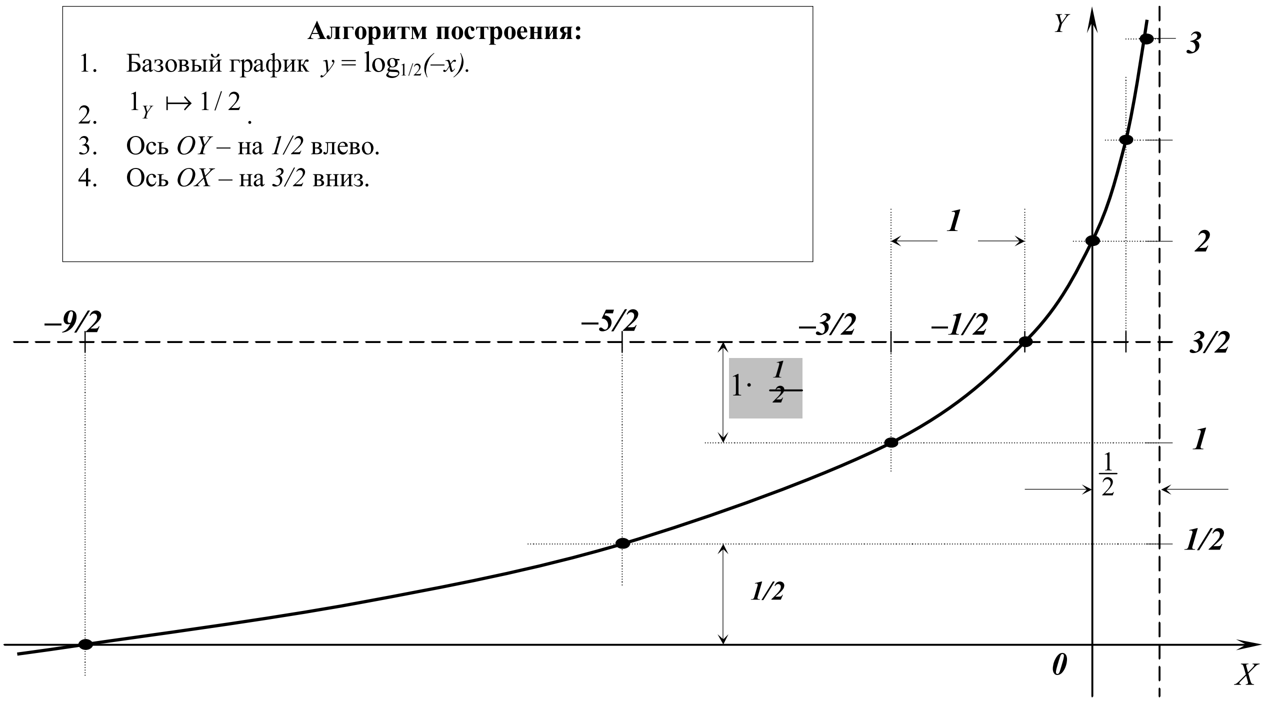


Рис .13. График функции $y = 2 + \log_{1/4}(1 - 2x)$.

нестандартный способ градуировки: она может быть нанесена на любую горизонталь (вертикаль), что полностью заменяет градуировку оси OX (соответственно оси OY).

Пример 3.3.5. Построим график функции $y = 4\sin^2(2x - \pi/3) - 1$.

Приведем данную функцию к виду (3.1):

$$y = 4\mathbf{sin}^2(2x - \pi/3) - 1 = 2(1 - \mathbf{cos}(4x - 2\pi/3)) - 1 = 1 - 2\mathbf{cos}[4(x - \pi/6)] =$$

$$= 1 + \tilde{\varphi}(x - \pi/6), \ \textit{где}\ \tilde{\varphi}(x) = 2\varphi(4x) \text{ с базовой функцией } \varphi(x) = -\cos(x).$$

Далее, после построения базового графика, реализуем соответствующий итоговой формуле алгоритм (рис.14):

- $1_X \mapsto 1/4$ (соответственно отрезок длиной $T = 2\pi \mapsto \pi/2$), $1_Y \mapsto 2$;
- ось OX – на $\pi/6$ влево, ось OX – на 1 вниз (в новых масштабах!).

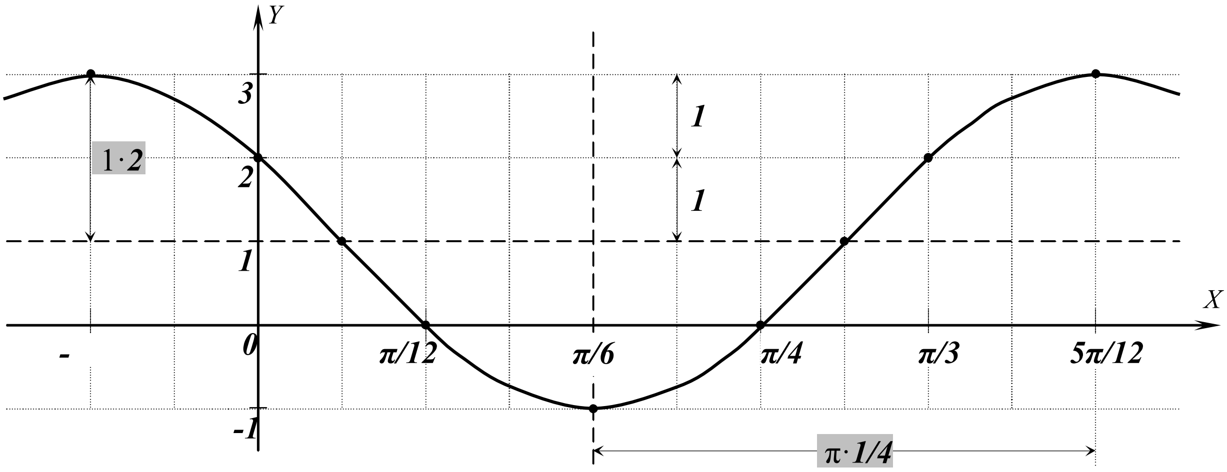


Рис.14. График функции $y = 4\sin^2(2x - \pi/3) - 1$.

Алгоритм построения:

1. Базовый график $y = -\arcsin(x)$.
2. $1_X \mapsto 1/2,\ 1_Y \mapsto 2$.
3. Ось OY – на $\sqrt{3}/2$ вправо.
4. Ось OX – на $2\pi/3$ вверх.

Полученный график будет использован при построении кривой $\rho = 4\sin^2(2\varphi - \pi/3) - 1$ в полярных координатах.

Пример 3.3.6. Покажем, как построить график функции $y = \pi/3 - 2\arccos(-2x - \sqrt{3})$.

Преобразования этой функции с использованием свойств, указанных в п. 2.4, дают:

$$y = \frac{\pi}{3} - 2\cdot(\frac{\pi}{2} - \arcsin(-2(x + \sqrt{3}/2)) = -\frac{2\pi}{3} - 2\arcsin(2\cdot(x + \sqrt{3}/2)) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + 2\tilde{\varphi}(x + \sqrt{3}/2),$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(2x)$, при базовой функции $\varphi(x) = -\arcsin(x)$.

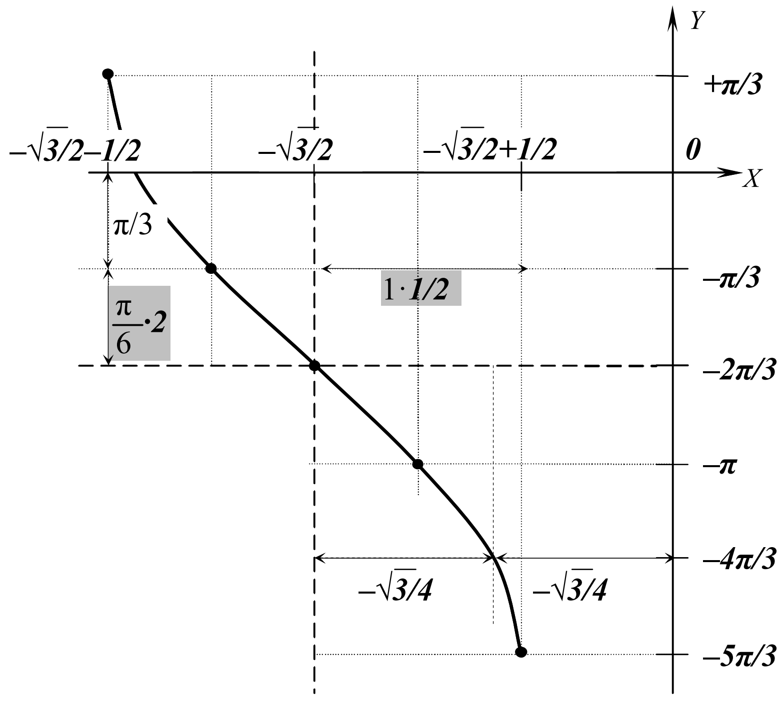


Рис.15. График функции $y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(-2x - \sqrt{3})$.

Соответствующий этому алгоритму график приведен на рисунке 15, справа от алгоритма.

Приведенные примеры показывают, в частности, что при построении графиков следует внимательно на каждом шаге учитывать положение и фактические размеры *уже построенной* линии.

3.4. Построение графиков функций, содержащих модули

Модуль (*абсолютная величина*) произвольного действительного числа w определяется по формуле

$$|w| = \left[\begin{array}{l} w,\ \text{если } w \geq 0; \\ -w,\ \text{если } w \leq 0. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Применяя формулу (3.4), для *функции от модуля ее аргумента* имеем:

$$f(|x|) = \left[\begin{array}{ll} f(x),\ \text{если } x \geq 0 & (\textit{правая полуплоскость}); \\ f(-x),\ \text{если } x \leq 0 & (\textit{левая полуплоскость}). \end{array}\right.$$

Это значит, что всякий находящийся в правой полуплоскости фрагмент линии *f(x)* сохраняется неизменным и, к тому же, *отражается* в левую полуплоскость (рис. 6*а*). В силу четности функции $y = f(|x|)$, ее график симметричен относительно оси *OY*.

Для *модуля функции* в соответствии с (3.4) получаем:

$$\left|f(x)\right| = \left[\begin{array}{l} f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \quad (\textit{верхняя полуплоскость}); \\ -f(x), \text{если } f(x) \leq 0 \quad (\textit{нижняя полуплоскость}). \end{array}\right.$$

Таким образом, при переходе к графику функции $y = |f(x)|$ линия $f(x)$ сохраняется неизменной в верхней (*если она там есть*!)

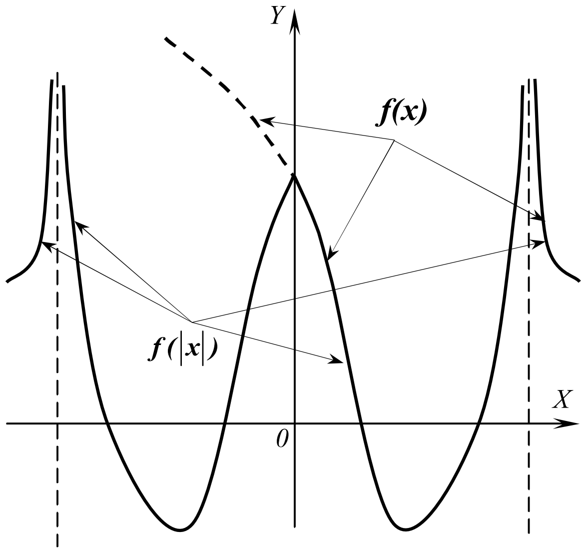


Рис.16*а*. Построение графика функции $f|x|$.

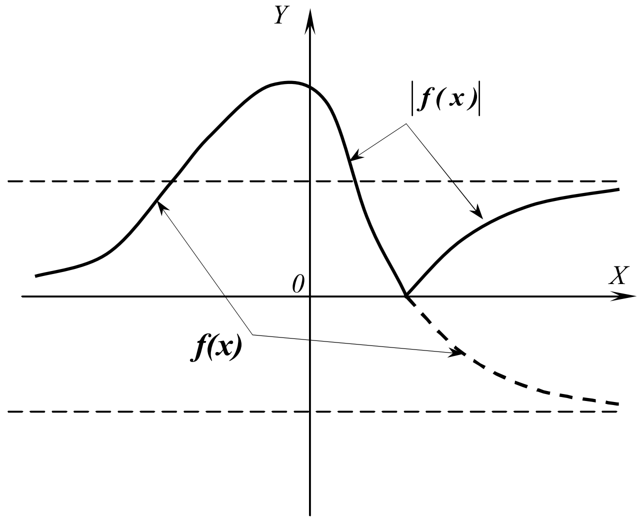


Рис.16*б*. Построение графика функции $|f(x)|$.

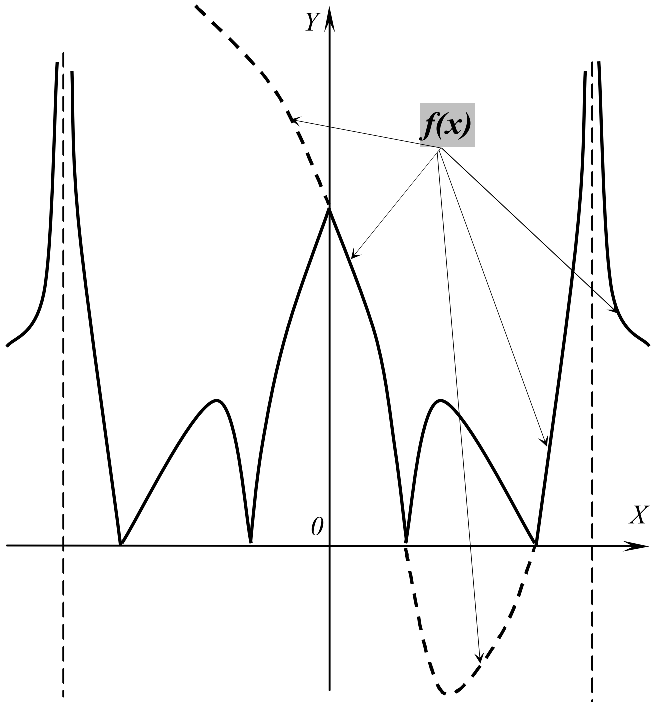
полуплоскости, а вся находящаяся в нижней полуплоскости часть линии *переносится* в верхнюю полуплоскость симметричным отражением относительно оси OX (рис. 16б).

***Получаемые таким методом графики также могут служить базовыми для построения более сложных линий, приведенных к виду* (3.1).**

Основываясь на этих же правилах, нетрудно построить и график $|f|x||$. Здесь базовой может являться функция $f|x|$:

$$\left|f\left|x\right|\right| = \left[\begin{array}{l} f(|x|), \text{если } f(|x|) \geq 0 \quad (\textit{верхняя полуплоскость}); \\ -f(|x|), \text{если } f(|x|) \leq 0 \quad (\textit{нижняя полуплоскость}). \end{array}\right. \qquad (3.5)$$

Прямое прочтение правой части (3.5) означает, что после отражения фрагмента линии $f(x)$ из правой полуплоскости в левую, т.е. после построения графика $f(|x|)$, должно выполняться отражение всех фрагментов полученной линии, находящихся в нижней полуплоскости, относительно оси OX. Тем не менее, рисунки 17а и 17б показывают, что можно, игнорируя находящуюся в левой полуплоскости часть исходной линии, выполнить сначала последнее действие и только после этого – отражение относительно оси OY.



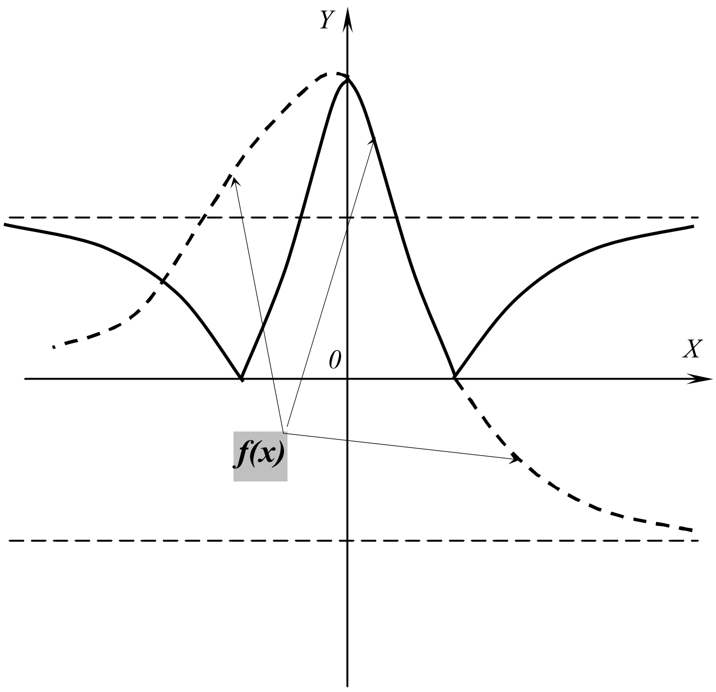


Рис.17*а*. Построение графика функции $\left|f|x|\right|$ по функции $f(x)$ из рис.16 *а*.

Рис.17*б*. Построение графика $\left|f|x|\right|$ по функции $f(x)$ из рис. 16*б*.

Приведем примеры построения графиков функций с модулями.

Прежде всего, рассмотрим ряд примеров функций с модулями, *заданных явно*. Все они приводятся к стандартному виду (3.1) только после раскрытия модулей согласно (3.4).

Область определения функции при этом разбивается на смежные промежутки точками, в которых подмодульные выражения обращаются в нуль. Отдельные фрагменты графика, на этих промежуткам, будем называть ветвями.

Пример 3.4.1. Построим график функции

$$y=\frac{x+1}{|x|-1}=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{x+1}{x-1}=1+2\cdot\dfrac{1}{x-1}, & x\ge 0; \quad (*)\\ -1, & x\le 0,\ x\ne -1. \quad (**)\end{array}\right.$$

Ветвь ($*$) расположена в правой полуплоскости и имеет уравнение вида (3.1), так как $y = 1 + 2\varphi(x-1)$, где $\varphi(x) = 1/x$ – базовая функция.

Построение ведется по стандартному алгоритму: $1_Y \mapsto 2$, ось OY – на 1 влево, ось OX – на 1 вниз. Учитывая ветвь ($**$) в левой полуплоскости, получаем график, представленный на рис.18. Здесь в точке $x = -1$ наблюдается *конечный устранимый разрыв* (в отличие от связанной с вертикальной асимптотой точки $x = 1$ – точки *бесконечного неустранимого* разрыва).

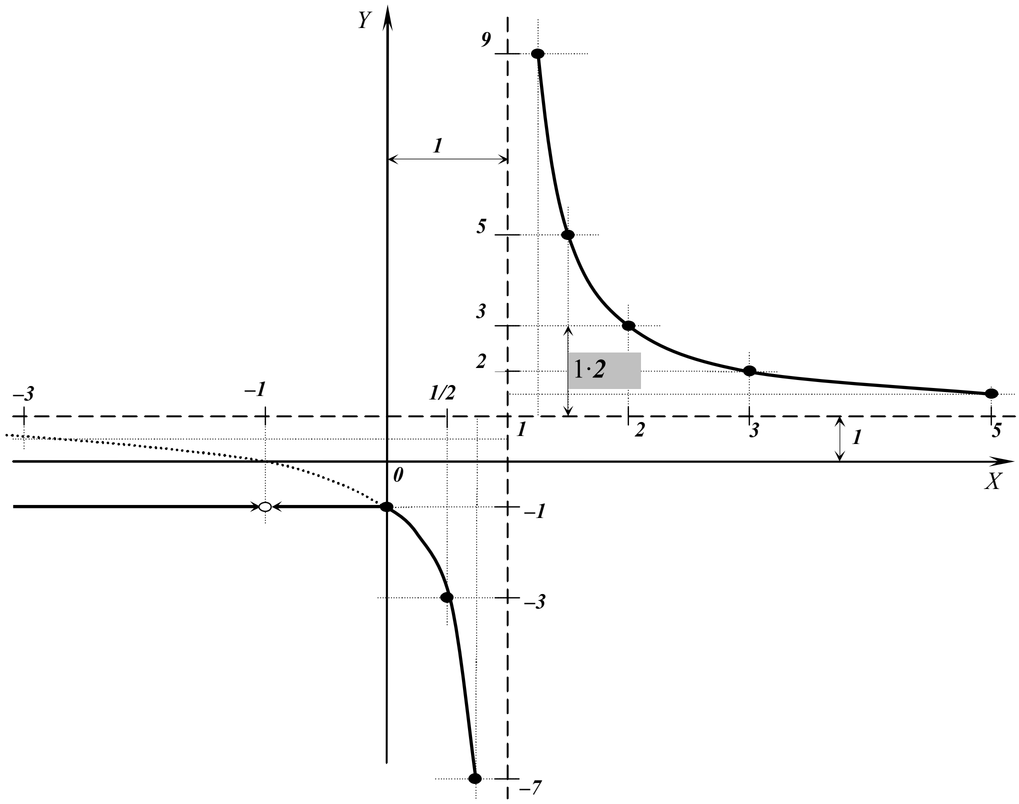


Рис.18. График функции $y = \dfrac{x+1}{|x|-1}$.

Замечание 1. К виду ($*$) приводится в правой полуплоскости и функция $y = \dfrac{|x|+1}{x-1}$; графиком ее будет та же линия (рис.18), за исключением того, что в точке $x = -1$ она непрерывна. Функцию $y = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ можно рассматривать как $y = f(|x|)$, поэтому ее график строится отражением линии ($*$) из правой полуплоскости в левую, что свойственно всем четным функциям.

Замечание 2. В рассмотренных примерах прослеживается возможность использования еще одного общего алгоритма построения графиков функций, приведенных к виду (3.1):

- нанесение и перемасштабирование основных координатных осей с выбором наиболее удобных длин единичных отрезков;
- определение положения базовых осей относительно основного начала координат в новых масштабах;
- построение базового графика.

Такой подход, как мы увидим далее, удобен в случаях, требующих использования нескольких базовых функций на одном графике.

Пример 3.4.2. Построим график функции

$$y=\frac{|2x-1|}{2|x|-3}=\frac{|x-1/2|}{|x|-3/2}=\left[\begin{array}{ll} \dfrac{x-1/2}{x-3/2}=1+\dfrac{1}{x-3/2}, & x\ge 1/2;(*) \\ -\dfrac{x-1/2}{x-3/2}, & 0\le x\le 1/2; \quad (**) \\ \dfrac{x-1/2}{x+3/2}=1-\dfrac{2}{x+3/2}, & x\le 0\ (***) \end{array}\right.$$

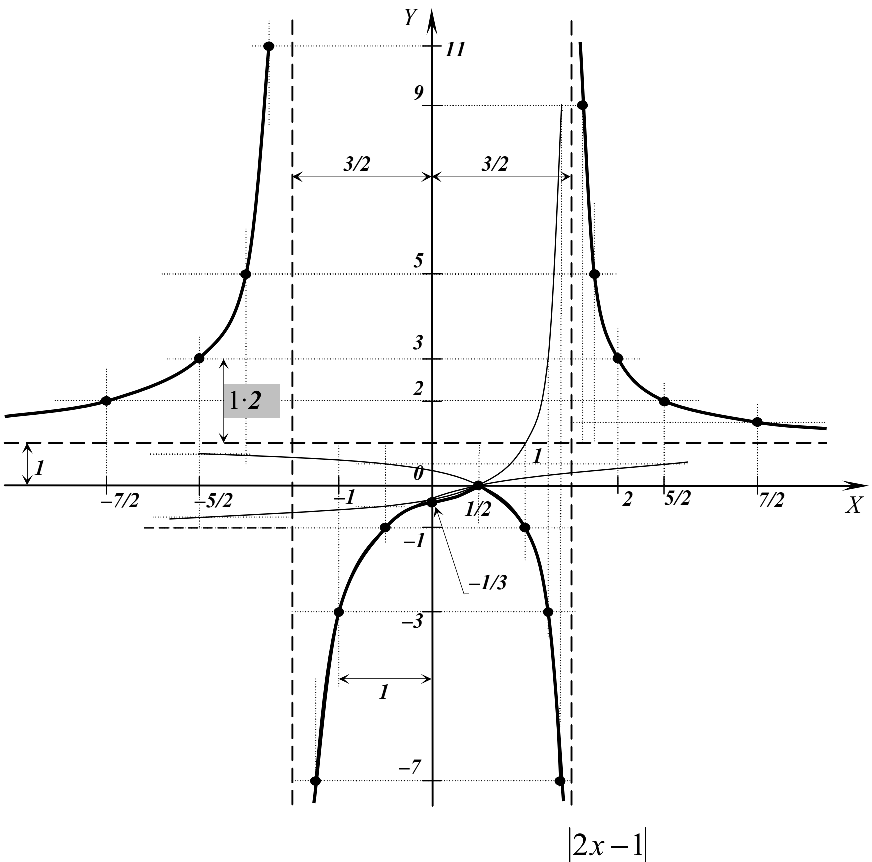


Рис.19. График функции $y=\dfrac{|2x-1|}{2|x|-3}$.

Здесь ветвь ($***$) может быть представлена как $y=1+2\varphi\left(x+3/2\right)$ с базовой функцией $\varphi(x)=-1/x$. Примем эту ветвь за основную, – по ней будет устанавли-ваться общая система координат. Алгоритм построения этой ветви очевиден: изображение базового графика $\varphi(x)=-1/x$, $1_Y\mapsto 2$, ось OY – на $3/2$ вправо, ось OX – на 1 (*в новом вертикальном масштабе*) вниз. Все эти и последующие действия продемонстрированы на рис.18 с полным показом линий и выделением фрагментов, соответствующих областям определения каждой ветви.

Далее, в сформированной теперь новой системе координат, строим ветвь ($*$) как гиперболу с уже имеющейся горизонтальной асимптотой $y=1$ и с вертикальной асимптотой $x=3/2$. Левую ветвь построенной линии поворачиваем на 180º относительно оси OX вместе с ее горизонтальной асимптотой и выделяем фрагмент, относящийся к ветви (**).

Заметьте, что в точке пересечения графика с осью OY линия остается гладкой, а в точке (1/2; 0) – переламывается (в этой точке нет касательной к графику).

Пример 3.4.3. Пусть требуется построить график функции

$$y=\frac{\left||x|-1\right|}{x+1}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{|x|-1}{x+1}=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}, & x\ge 1;\quad (*)\\ -1, & x<-1;\quad (**)\end{array}\right.\\ -\dfrac{|x|-1}{x+1}=\left[\begin{array}{ll}-\dfrac{x-1}{x+1}, & x\in[0;1];\quad (***)\\ +1, & x\in(-1;0]\quad (****)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ветвь (*) расположена в правой базовой полуплоскости. Здесь $y=1+2\varphi(x+1)$, где $\varphi(x)=-1/x$ – базовая функция. После ее построения (на графике – тонкая линия) выполняем действия с осями: $1_Y\mapsto 2$, ось OY – на 1 вправо, ось OX – на 1 вниз. Полученная кривая отражается относительно оси OX, как того требует представление (***).

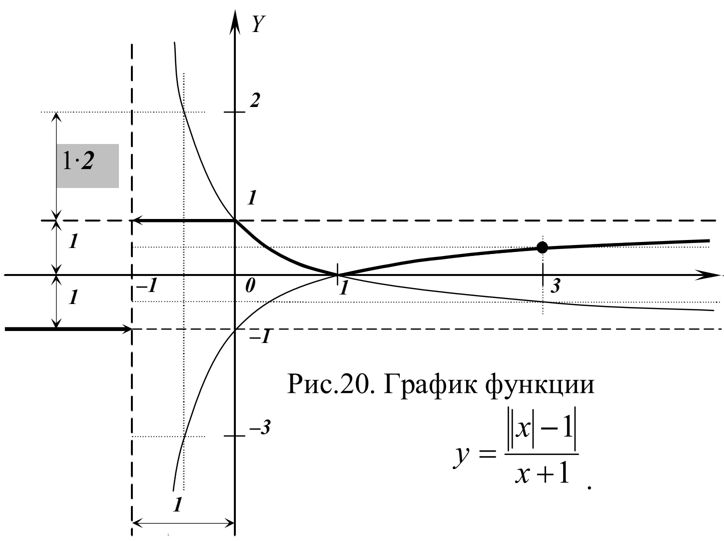


Рис.20. График функции

$$y=\frac{\left||x|-1\right|}{x+1}.$$

Остается выделить на промежутках [0;1] и [1; ∞) фрагменты относящихся к ним линий и показать ветви (**) и (****). Итоговый график представлен на рис.20. Согласно полученному представлению, в точке $x=-1$ наблюдается *неустранимый разрыв*, в точке $x=0$ – *излом*, а точка $x=1$ является *точкой заострения* функции.

3.5. Графики функций в полярных координатах.

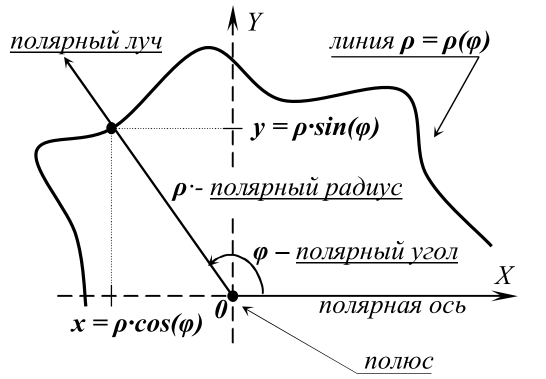


Рис.23. Полярные координаты.

Полярные связаны с декартовой прямоугольной системы координат так, как показано на рис.23.

Полярной осью считается только правая полуось OX. *Полярный угол* φ

измеряется в радианах и может принимать любое действительное значение. Полярный радиус ρ есть расстояние от точки $(x;y)$ до начала координат (полюса), в силу чего является величиной неотрицательной: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. Очевидно, что уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат запишется в полярных координатах как $\rho = R$. Прямая $y = kx$ (как состоящая из двух полупрямых с удаленной точкой О) будет иметь уравнение $\varphi = \mathrm{arctg}(k) + \pi n$, где $n \in \{0;1\}$. С другой стороны, уравнение $\varphi = \varphi_0$ определяет луч, т.е. полупрямую (здесь ρ пробегает все неотрицательные значения при *фиксированном* полярном угле).

В простейшем варианте, графики заданных в полярных координатах функций (вида $\rho = \varphi, \rho = e^{\varphi}$ и т.п.) строятся с вычислением значений ρ при изменении угла φ на достаточном (для показа всех характерных особенностей функции) промежутке с некоторым шагом $\Delta\varphi$. Здесь открытым остается вопрос выбора как величины этого промежутка, так и шага $\Delta\varphi$ в смысле его малости. Однако многие функции либо задаются в стандартном виде $\rho = B + A \cdot \sin\left[k(\varphi - \Delta\varphi)\right]$ или $\rho = B + A \cdot \cos\left[k(\varphi - \Delta\varphi)\right]$, либо могут быть преобразованы к таковому после перехода от некоторого неявно задающего функцию выражения $F(x;y) = 0$ к полярным координатам. Тогда более эффективным становится другой, двухэтапный, подход к построению графиков таких функций.

На первом этапе строится *вспомогательный* график $\rho = \rho(\varphi)$ в декартовой *прямоугольной* системе координат $(\varphi;\rho)$ на одном периоде T заданной функции. По этому графику, исходя из условия $\rho \geq 0$, выясняются промежутки (сектора), в которых функция будет определена или не определена.

Второй этап – это изображение *итогового* графика в системе координат $(x;y)$. Здесь учитывается, что каждой вертикали $\varphi = \varphi_0$ в системе координат $(\varphi;\rho)$ будет соответствовать луч $\varphi = \varphi_0$ в системе $(x;y)$, равно как каждой горизонтали $\rho = \rho_0$ – окружность радиуса ρ_0. Именно поэтому на плоскости XOY показываются все характерные окружности, которые обычно разбиваются лучами на одинаковые сектора. Точки пересечения окружностей с соответствующими лучами и являются точками искомого графика.

Рассмотрим два примера.

Пример 3.5.1. Построим кривую $\rho = 4\sin^2(2\varphi - \pi/3) - 1$.

Поскольку данная функция приводится (пример 3.3.5) к стандартному виду

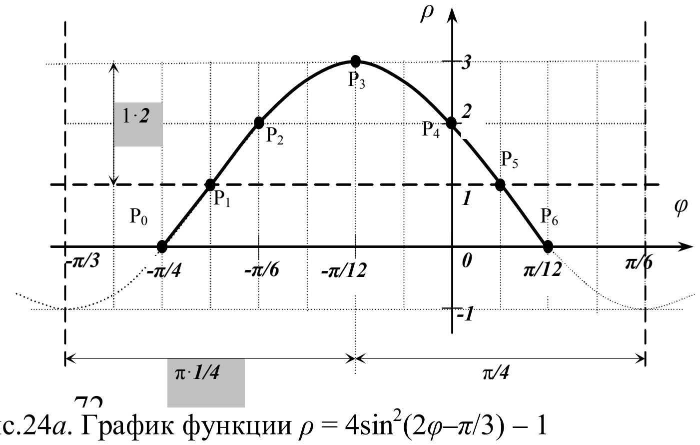


Рис.24*а*. График функции $\rho = 4\sin^2(2\varphi - \pi/3) - 1$ в декартовой системе координат $(\varphi;\rho)$.

$\rho = 1 + \tilde{\psi}(\varphi - \pi/6)$, где $\tilde{\psi}(\varphi) = 2\psi(4\varphi)$, при базовой функции $\psi(\varphi) = -\cos(\varphi)$, то вспомогательный график в системе координат $(\varphi;\rho)$ строится по алгоритму, приведенному в том же примере 3.3.5.

У нас $T = 2\pi/4 = \pi/2$, а сам график (рис. 24*а*) отличается от приведенного на рис.16 только тем, что на нем показан *непрерывный* фрагмент базовой линии, расположенный на отрезке $[-\pi/3;\pi/6]$ длиной T. На отрезке длиной 2π (охватывающем все лучи, покрывающие плоскость) будет наблюдаться четыре таких фрагмента.

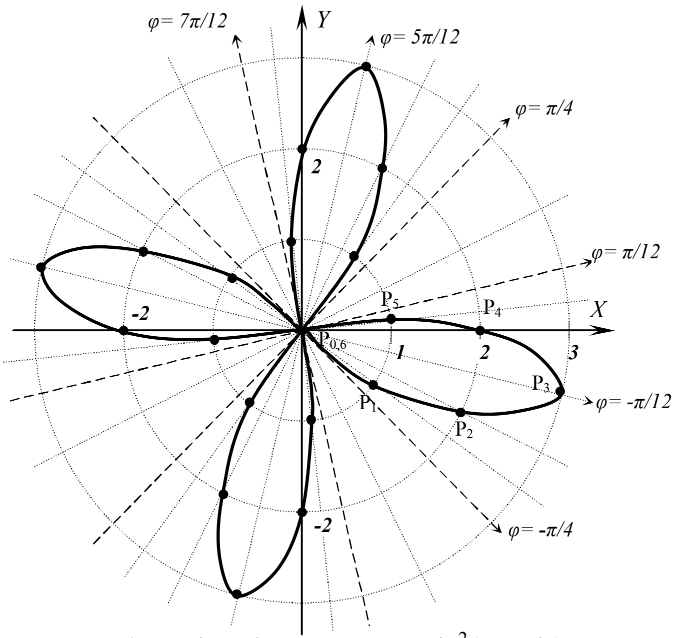


Рис.24*б*. График функции $\rho = 4\sin^2(2\varphi - \pi/3) - 1$.

На втором этапе на плоскости XOY показываются все характерные окружности (у нас – с радиусами 1, 2, и 3). В нашем случае их удобно разбить лучами на одинаковые сектора (рис. 24*б*) по $\pi/12$ каждый. Некоторые из секторов дополнительно делятся пополам для того, чтобы проследить точки, расположенные на окружности $\rho = 1$. Лучи, ограничивающие каждый сектор, в котором расположена линия графика, являются касательными к ней и показаны штриховыми линиями (как, например, лучи $\varphi = -\pi/4$ или $\varphi = \pi/12$). Всего на графике должны быть показаны четыре таких сектора, разделенных «пустыми» секторами величиной $\pi/6$ каждый.

Последовательность построения линии в базовом секторе указана точками $P_0 - P_6$, присутствующими и на вспомогательном графике.

Представленную на рис 24*б* линию часто называют *четырехлепестковой розой*. В принципе, ее можно было строить в промежуточной базовой системе координат как функцию $\rho = 1 - 2\cos(4\varphi)$, с последующим поворотом этого графика на угол $\pi/6$ в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, или же поворотом координатных осей на $\pi/6$ по часовой стрелке. Однако ни то, ни другое не является удобным, поскольку в первом случае на плоскости появляется еще одна дополнительная линия, а во втором – нарушается общепринятое расположение координатных осей.

В общем случае изменение угла φ должно рассматриваться на наименьшем положительном отрезке, кратном 2π и таком, чтобы он целиком покрывался целым числом периодов строящейся функции. Так, например, функция $\rho = 2 - 4a\sin(2\varphi/3)$, имеющая период $T = 3\pi$, строится на отрезке длиной в 6π (три полных оборота луча φ), на котором укладывается два полных периода.

Пример 3.5.2. Построим линию, заданную параметрическим уравнением

$$\rho = 3 - 2\sin(\varphi/3).$$

Вспомогательный график на этапе I строится как линия $\rho = 3 + 2\,\psi(\varphi/3)$ с базовой функцией $\psi(\varphi) = -\sin(\varphi)$. Алгоритм его построения приведен ниже, а чертеж выполнен на рис.25*а*.

Итоговая линия, построенная на втором этапе, показана на рис. 25*б*. При построении угол φ изменяется от -3π до 3π, т.е. луч φ трижды пробегает всю плоскость, последовательно пересекая соответствующие окружности в точках P_0, P_1,..., P_8. Расположенные между ними точки обозначены как P_{01}, P_{12} и т.д. Точки $P_{1,3}$ и $P_{5,7}$ являются точками самопересечения линии графика.

Алгоритм построения:

1. Базовый график: $\rho = -\sin(\varphi)$.
2. $1_\varphi \mapsto 3,\ 1_\rho \mapsto 2.$
3. Ось OX – на 3 единицы вниз.

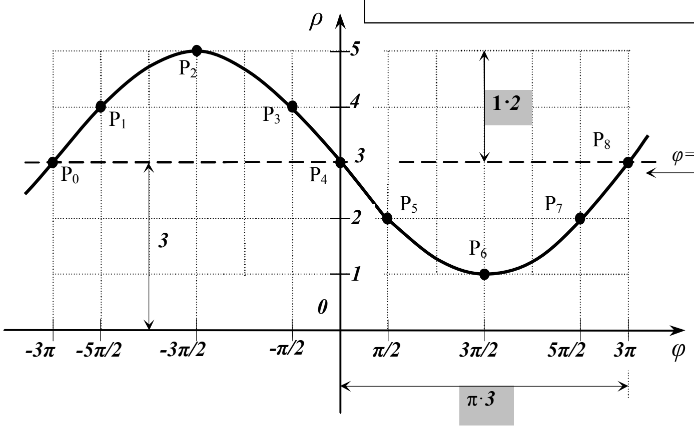


Рис.25*а*. График функции $\rho = 3 - 2\sin(\varphi/3)$ в системе координат $(\varphi; \rho)$.

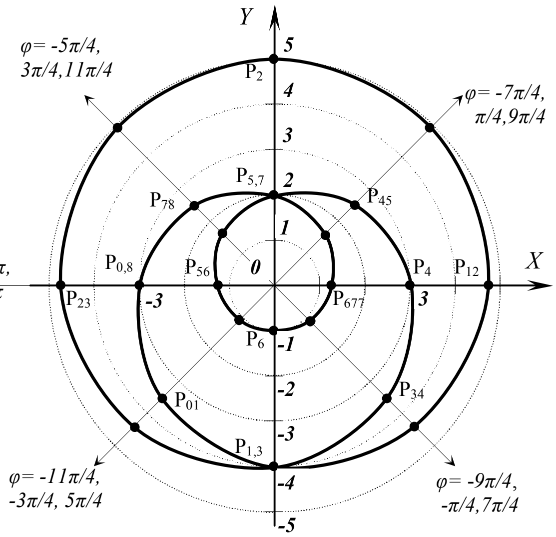


Рис.25*б*. График функции $\rho = 3 - 2\sin(\varphi/3)$ в системе координат $(x; y)$.

Точки P_{12} и P_{23} пересечения графика с осью *OX* имеют координаты $\pm(3+\sqrt{3})$, а P_6 и P_5 – координаты $\pm(3-\sqrt{3})$. Заметим также, что симметрия вспомогательного графика периодической функции $\rho = \rho(\varphi)$ в системе координат $(\varphi;\rho)$ относительно линий $\varphi = 2\pi n \pm \pi/2$ для некоторых $n \in \mathbf{Z}$ означает симметрию итогового графика относительно оси *OY*. Таким образом, неявная функция $F(x, y) = 0$, соответствующая функции $\rho = \rho(\varphi)$, является четной по переменной x. В нашем случае такая симметрия наблюдается относительно $\varphi = \pm 3\pi/2$.

Литература

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: решение типичных и трудных задач.- СПб.: Изд-во “Лань”, 2007.
2. *Болгов В.А., Демидович Б.Н., Ефимов А.В. и др.* Сборник задач по математике для втузов. Часть 1.- М.: Наука, 1993.
3. *Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э.* Функции и графики.- М.: МЦНМО, 2006.
4. *Данько П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 - М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2006.
5. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты,- СПб.: Изд-во “Лань”, 2005.
6. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001.
7. *Никольский С.М.* Элементы математического анализа.- М.: Дрофа, 2002.
8. *Тихомиров В.М.* Дифференциальное исчисление (теория и приложения).- М.: МЦНМО, 2002.
9. *Шипачев В.С.* Основы высшей математики.- М.: Высшая школа, 2004.
10. *Шипачев В.С.* Высшая математика.- М.: Высшая школа, 2007.
11. *Сикорский В.А.* Геологоматематическое моделирование – М.:МГГА, 2000.
12. Гидрогеодинамические расчеты на ЭВМ. *Под редакцией Штенгелова.* - М.: МГУ, 1994.
13. *Соловьев Н.В., Чихоткин В.Ф., Богданов Р.К., Закора А.П.* Ресурсосберегающая технология алмазного бурения в сложных геологических условиях – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», 1997
14. *Каждан А.Б., Гусков О.И.* Математические методы в геологии: Учебник для ВУЗов – М.: Недра, 1990