Российский государственный геологоразведочный университет
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Ю.А.Фарков

Функции, пределы и непрерывность

Москва 2008

С О Д Е Р Ж А Н И Е

§ 1. Начальные сведения о множествах, действительных числах и функциях

1.1. Операции над множествами

Множество задано, если известно, из каких элементов оно состоит. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ (иначе $a \notin A$). Множества обычно задают либо перечислением элементов, либо указанием характеристического признака для них.

Если множество A состоит из элементов a, b, $c, \ldots, m$, то пишут

$$A = \{a,\, b,\, c, \ldots, m\}.$$

Если множество A состоит из всех элементов x, обладающих свойством $P(x)$, то пишут

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

(читается: A состоит из x таких, что выполнено $P(x)$).

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называют *подмножеством* множества B и пишут $A \subset B$.

Множества A и B называются *равными* (обозначение: $A = B$), если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Например, множество

$$A = \{x \mid x \text{ – целое число, квадрат которого равен } 1\}$$

равно множеству $B = \{-1,\, 1\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, и состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Иначе говоря,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$, и состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Иначе говоря,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Справедливы равенства:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Для объединения и пересечения n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ применяются обозначения

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \quad \text{и} \quad \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

соответственно.

Разность множеств A и B определяется равенством

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В частности, $A \setminus B = \emptyset$, если $A \subset B$. Например, если $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{2, 3\}$, то

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{0, 1\}.$$

Справедливы включения:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$

где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел. Натуральные числа: 1, 2, 3, ... возникли при счете предметов. Множество $\mathbf{Z}$ получается присоединением к множеству $\mathbf{N}$ числа 0 и целых отрицательных чисел. Каждое рациональное число представимо в виде обыкновенной дроби m/n, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, а также в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ состоит из иррациональных чисел. Каждое иррациональное число представимо в виде бесконечной десятичной *непериодической* дроби. Например, числа $\sqrt{2}$, π, e иррациональны.

Упражнение 1. Повторите определения числовых промежутков

$$(a, b),\ [a, b],\ (a, b],\ [a, b),\ (a, +\infty),\ (-\infty, a) \text{ и } (-\infty, +\infty).$$

Действительные числа принято изображать точками числовой прямой (поэтому действительные числа часто называют точками). *Окрестностью* точки x_0 называют произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку.

1.2. Свойства арифметических операций и понятие абсолютной величины числа

На множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел определены операции сложения и умножения, а также обратные им операции вычитания и деления. Эти операции (кроме деления на нуль) на множестве $\mathbf{R}$ всегда выполнимы. Для сложения и умножения справедливы следующие законы:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba \quad \text{(коммутативность)},$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(ac) \quad \text{(ассоциативность)},$$
$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{(дистрибутивность)}.$$

Из этих законов выводятся *формулы сокращенного умножения*:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

На множестве $\mathbf{R}$ определено *отношение порядка,* т.е. для любых $a, b \in \mathbf{R}$ имеет место одно из соотношений

$$a < b \quad \text{или} \quad a > b \quad \text{или} \quad a = b.$$

Неравенства

$$a > b \quad \text{и} \quad a - b > 0$$

равносильны. Справедливы свойства:

1) если $a > b$, то $a + c > b + c$ для любого $c \in \mathbf{R}$;

2) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

3) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Абсолютная величина (или *модуль*) действительного числа a определяется по формуле

$$|a| = \max\{a, -a\}.$$

Значение $|a|$ совпадает с расстоянием от a до 0 на числовой прямой. Справедливы равенства

$$|a| = |-a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Кроме того,

$$|a + b| \le |a| + |b| \quad \text{и} \quad ||a| - |b|| \le |a - b|$$

для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Значение $|a - b|$ равно расстоянию между точками a и b.

1.3. Грани числовых множеств и вложенные отрезки

Пусть $X \subset \mathbf{R}$ и $c \in \mathbf{R}$. Число c называется *верхней гранью* множества X, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство $x \le c$. Множество X называется *ограниченным сверху,* если оно имеет верхнюю грань.

Аналогично, число c называется *нижней гранью* множества X, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство $x \ge c$. Множество X называется *ограниченным снизу,* если оно имеет нижнюю грань.

Множество X называется *ограниченным,* если оно ограничено и сверху, и снизу.

Примеры:

1) $\mathbf{N}$ – ограниченное снизу множество;

2) $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$ – ограниченное множество;

3) $\mathbf{Z} \cap (-\infty, 5)$ – ограниченное сверху множество;

4) $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$ – множества, не ограниченные ни снизу, ни сверху.

Число c называется *точной верхней гранью* множества X (обозначение: $c = \sup X$), если выполнены два условия:

1) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $x \le c$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ на промежутке $(c - \varepsilon; c]$ имеется хотя бы один элемент из X.

Иначе говоря, $\sup X$ – это наименьшая из верхних граней множества X.

Аналогично, *точная нижняя грань* множества X обозначается $\inf X$ и совпадает с наибольшей из нижних граней множества X. Равенство $c = \inf X$ означает, что выполнены два условия:

1) для любого $x \in X$ имеет место неравенство $x \ge c$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ на промежутке $[c; c + \varepsilon)$ имеется хотя бы один элемент из X.

Всякое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань. Аналогично, всякое множество действительных чисел, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань.

Последовательность отрезков

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots$$

называется *вложенной,* если выполнены два условия:

1) $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$,

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 (зависящий от ε) такой, что для всех натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $n > n_0$, выполнено неравенство $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Это утверждение (называемое *принципом Кантора*) эквивалентно сформулированному выше утверждению о существовании точных граней и выражает *свойство непрерывности* множества $\mathbf{R}$.

1.4. Начальные сведения о функциях

Пусть даны два множества X и Y. Говорят, что на множестве X задана *функция* f, принимающая значения в Y, если для любого элемента a из множества X существует единственный элемент b из Y, такой, что $b = f(a)$. Здесь через $f(a)$ обозначено *значение*, принимаемое функцией f в точке a. Множество X, на котором задана функция f, называют *областью определения* функции f (и обозначают $D(f)$). Саму функцию f часто обозначают через $y = f(x)$ (или $f(x)$), где x – независимая переменная или *аргумент*, а y – зависимая переменная. Независимая переменная x может принимать любое значение из множества $D(f)$. Функция f задана, если, во-первых, указана область определения $D(f)$ этой функции и, во-вторых, указано правило, позволяющее по каждому значению аргумента x из множества $D(f)$ находить соответствующее ему значение y функции f.

Если функция f задана на множестве X и принимает значения в Y, то говорят, что f *отображает* множество X в Y и пишут $f : X \to Y$ (термины "функция" и "отображение" используются как синонимы).

Пусть $A \subset X$ и $B \subset Y$. Говорят, что функция $f : X \to Y$ осуществляет *взаимно однозначное отображение* множества A на B, если выполнены два условия:

1) для любого a из A значение $f(a)$ принадлежит множеству B;

2) для любого b из B существует единственный элемент $a \in A$, такой, что $b = f(a)$.

Например, функция $y = x^2$ отображает интервал (0,2) на интервал (0,4) взаимно однозначно, а множество $\mathbf{R}$ эта функция отображает на $[0, +\infty)$ не взаимно однозначно.

Функцию $f : X \to Y$ называют *функцией действительного переменного*, если $X \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$ (в дальнейшем рассматриваются только такие функции).

Если функция f задана формулой, причем область определения этой функции специально не оговорена, то в качестве $D(f)$ выбирают так называемую *естественную область определения*, т.е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Например, если функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, то полагают $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Множеством значений функции f называют множество $E(f)$, состоящее из всех значений, принимаемых функцией f на множестве $D(f)$ (т.е. $E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$). Например, если $f(x) = \sin x$, то $D(f) = \mathbf{R}$ и $E(f) = [-1, 1]$.

Функция f называется *ограниченной*, если множество значений $E(f)$ этой функции ограничено. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены.

Графиком функции f называют множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$. График функции f состоит из точек на плоскости Oxy, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями переменной y.

Упражнение 2. Определите все функции, заданные на множестве $X = \{0, 1, 2\}$ и принимающие значения на множестве $Y = \{2, 3\}$. Для каждой из этих функций постройте график и укажите множество значений.

Упражнение 3. Повторите графики линейной функции, прямой и обратной пропорциональности, квадратичной функции. Верно ли, что все эти функции заданы на всей числовой прямой $\mathbf{R}$?

Функция f называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции не меняется). График четной функции симметричен относительно оси Oy. Примеры четных функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = \cos x$.

Функция f называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции тоже меняет знак). График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры нечетных функций: $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Число $T \neq 0$ называется *периодом* функции f, если для любого $x \in D(f)$ выполнены равенства

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функция f, имеющая период, называется *периодической*. Наименьший положительный период функции f называется *основным* периодом этой функции. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют основной период $T = 2\pi$.

Пусть даны две функции f и g, причем множество значений функции f содержится в области определения функции g (т.е. $E(f) \subset D(g)$). Тогда функция h, заданная для $x \in D(f)$ по формуле $h(x) = g(f(x))$, называется *суперпозицией* (или *композицией*) функций f и g (обозначение: $h = g \circ f$). Иногда функцию $h(x) = g(f(x))$ называют *сложной функцией,* полученной из f и g. Например, если $g(t) = \sin t$ и $f(x) = 7x + 9$, то $h(x) = (g \circ f)(x) = \sin(7x + 9)$.

Функция f называется *элементарной*, если она получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции суперпозиции. При этом к числу *основных элементарных функций* относят:

- функции-константы (т.е. функции вида $f(x) = C$, где C– const);
- степенные функции x^α, $\alpha \in \mathbf{R}$;
- показательные функции a^x, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмические функции $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Графиками функций-констант являются прямые, параллельные оси Ox. Если график функции f пересекает ось Ox, то абсциссы точек пересечения совпадают с корнями уравнения $f(x) = 0$. Если число 0 принадлежит $D(f)$, то график функции f пересекает ось Oy в точке с координатами $x = 0$, $y = f(0)$.

Упражнение 4. Постройте графики следующих элементарных функций:

1) $1 + x^{3/2}$, 2) $3 - \sqrt{x}$, 3) $\log_2(x - 1)$, 4) $\log_{1/2}(x + 1)$, 5) $1 + 2^x$, 6) $2 - (1/3)^x$,
7) $2\sin(x - \pi/4)$, 8) $-\cos(2x + \pi/3)$, 9) $-\arcsin(x + 1)$, 10) $2\arccos(x - 1)$,
11) $1 + \operatorname{arctg} x$, 12) $1 - \operatorname{arcctg} x$, 13) $\arcsin(2x)$, 14) $\operatorname{arctg}(x/2)$.

Замечание. Определение функции как отображения одного множества на другое сформировалось[1] в конце XIX - начале XX вв. В 1718 г. Иоганн Бернулли определял функцию как "переменную величину, заданную аналитическим выражением, составленным из переменной x и постоянных величин". В 1834 г. Н.И. Лобачевский писал: "Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной. Например, x^3 функция от x, которая выражается аналитически; но корень в уравнении пятой степени будет функция последнего члена, для которой аналитического выражения еще не найдено и которая определяется самим уравнением, как условием... Кажется нельзя сомневаться ни в истине того, что все в мире может быть представлено числами; ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе". В одной из работ Дирихле (1837 г.) можно прочитать: "Будем понимать под a и b два фиксированных значения, а под x – переменную величину, принимающую все значения, расположенные между a и b. Если теперь каждому x соответствует одно единственное конечное y и притом так, что когда x непрерывно пробегает интервал от a до b, $y = f(x)$ также непрерывно изменяется, то y называется непрерывной функцией от x для этого интервала. При этом совсем необязательно представлять себе ее в виде зависимости, выраженной при помощи математических операций. Геометрически представленная (т.е. если мыслить x и y как абсциссу и ординату), непрерывная функция оказывается связной кривой, на которой всякой содержащейся между a и b абсциссе соответствует только одна точка. Это определение не приписывает какого-либо закона отдельным частям кривой; она может быть составлена из различного рода частей или же может быть мыслима совсем лишенной какого-либо закона. Отсюда вытекает, что такая функция может рассматриваться как полностью определенная для некоторого интервала, если она или задана графически для всего интервала, или же для отдельных частей его подчинена различным математическим законам. Если функция определена только для одной части интервала, то способ ее продолжения на остающийся интервал оказывается совершенно произвольным".

§ 2. Предел последовательности

2.1. Понятие последовательности

Последовательностью называется функция, заданная на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Если $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ – некоторая последовательность и ее значение $f(n)$ обозначено a_n, то число $a_n = f(n)$ называют *n-м членом* данной последовательности. Саму последовательность обозначают $\{a_n\}$ или

$$a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n,\, \ldots$$

Члены последовательности $\{a_n\}$ можно указать на числовой оси, а ее график, т.е. множество $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$, изображают на декартовой плоскости Oxy (конечно, в реальном масштабе можно построить только часть графика последовательности).

Последовательность задана, если для каждого натурального числа n указан метод вычисления n-го члена этой последовательности. Приведем некоторые способы задания последовательности.

[1]История развития понятия функции изложена в главе 2 книги: *Ф.А. Медведев.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М., 2006.

1. Зададим последовательность $\{a_n\}$ формулой, положив, например, $a_n = (-1)^n/n$. Видно, что

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ \ldots,\ a_n = \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots.$$

Эту последовательность обозначают так: $\{(-1)^n/n\}$.

2. Зададим последовательность $\{x_n\}$, считая x_n равным n-й цифре в записи числа $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби. Применяя любой из алгоритмов извлечения квадратного корня, найдем, что

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4,\ x_5 = 2,\ x_6 = 1,\ \ldots.$$

3. *Рекуррентный способ* задания последовательности состоит в том, что указываются несколько первых членов последовательности и правило, позволяющее находить по известным членам последовательности следующий ее член. Например, первые два члена $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ и рекуррентное соотношение

$$c_{n+1} = c_{n-1} + c_n \quad \text{для} \quad n \geq 2,$$

задают последовательность *чисел Фибоначчи* [2]:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется:

– *возрастающей,* если $a_{n+1} > a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
– *убывающей,* если $a_{n+1} < a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
– *невозрастающей,* если $a_{n+1} \leq a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
– *неубывающей,* если $a_{n+1} \geq a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными.*

Пример 1. Последовательность

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

является возрастающей. Действительно, если

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

то для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Пример 2. Последовательность $\{a_n\}$, где a_n обозначает количество натуральных чисел, делящихся на 3 и не превышающих n, неубывающая:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 1,\ a_6 = 2, \ldots.$$

[2] О замечательных свойствах чисел Фибоначчи можно прочитать, например, в книге: *Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник.* Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд. М., 2006.

Последовательность $\{a_n\}$ называется:
– *ограниченной сверху,* если существует число M такое, что $a_n < M$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
– *ограниченной снизу,* если если существует число m такое, что $a_n > m$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
– *ограниченной,* если она ограничена и сверху, и снизу.

Например, последовательность $\{1 - 2n\}$ ограничена сверху, $\{(-1)^n/n\}$ – ограничена, а $\{n^2\}$ – ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в том и только в том случае, когда все ее члены расположены в некотором интервале числовой прямой.

Упражнение 1. Каждой последовательности $\{a_n\}$ можно сопоставить график ступенчатой функции, равной a_n на полуинтервале $[n, n+1)$. Как на этом графике отражаются свойства монотонности и ограниченности последовательности $\{a_n\}$? Как располагаются члены монотонных последовательностей на числовой оси?

Упражнение 2. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$, где a_n есть n-я цифра в десятичной записи произвольного иррационального числа, не может быть монотонной.

Упражнение 3. Приведите примеры последовательностей а) монотонных, но не ограниченных и б) ограниченных, но не монотонных.

Целой частью $[a]$ действительного числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $[5] = 5$, $[7,2] = 7$, $[\pi] = 3$, $[-3,1] = -4$.

Упражнение 4. Докажите, что последовательность $\{[nx]/n\}$ при каждом фиксированном $x \in \mathbf{R}$ ограничена. Постройте графики функций $f(x) = [x]$ и $g(x) = x - [x]$.

Пусть дана последовательность $\{a_n\}$ и возрастающая последовательность $\{k_n\}$ натуральных чисел. Тогда последовательность

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ \ldots, a_{k_n},\ \ldots$$

называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$. Например, если $a_n = 1/n$ и $k_n = 2n$, то из последовательности $1,\ 1/2,\ \ldots, 1/n,\ \ldots$ получается подпоследовательность $1/2,\ 1/4,\ \ldots, 1/2n,\ \ldots$. Если же выбрать $k_n = 3n$, то получится подпоследовательность $1/3,\ 1/6,\ \ldots, 1/3n,\ \ldots$.

2.2. Определение предела последовательности

Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $n > n_0$, выполнено неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то говорят, что "предел последовательности $\{a_n\}$ равен a при n, стремящемся к бесконечности" или что "последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a;" при этом пишут также, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Геометрическая интерпретация равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ состоит в следующем: каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ для всех $n > n_0$; соотвественно, на декартовой плоскости Oxy все точки (n, a_n) при $n > n_0$ лежат между прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$. При уменьшении ε номер n_0 обычно растет (и для данной последовательности иногда возможно его задать как функцию переменного $\varepsilon:\ n_0 = n_0(\varepsilon)$).

Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки a. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ имеет место в том и только в том случае, когда вне произвольной ε-окрестности точки a может находится только конечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Пример 3. Докажем, что при любом $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0. \tag{1}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$$

Следовательно, полагая

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right] + 1,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть, будем иметь

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon,$$

и поэтому верно равенство (1).

При вычислении некоторых пределов полезно неравенство

$$(1+\alpha)^n \;\geq\; 1 + n\alpha. \tag{2}$$

Для произвольного $\alpha \geq 0$ и любого натурального n это неравенство следует из формулы бинома Ньютона

$$(1+\alpha)^n \;=\; 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^2 + \cdots + \alpha^n.$$

Пример 4. Покажем, что при любом $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{3}$$

Положим $|\,q| = 1/(1+\alpha)$, где $\alpha > 0$. В силу (2) при любом натуральном n имеем

$$|\,q^n| = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Отсюда видно, что если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать номер

$$n_0 > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right),$$

то для всех $n > n_0$ выполнено неравенство $|\,q^n - 0| < \varepsilon$ и поэтому верна формула (3).

Обратим внимание, что в последнем примере мы не указывали явную зависимость n_0 от ε, но это можно сделать по аналогии с примером 3 (причем не единственным способом, так как при доказательстве равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ совсем необязательно для произвольного $\varepsilon > 0$ указывать соответствующий *минимальный* номер n_0).

Говорят, что *последовательность* $\{a_n\}$ *имеет предел, равный бесконечности* (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), если для любого $M > 0$ существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $n > n_0$, выполнено неравенство $|\,a_n| > M$. Если в этом определении заменить $|\,a_n| > M$ на $a_n > M$ (соотв. на $a_n < -M$), то получится определение для $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (соотв. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Геометрически, например, условие $n > n_0 \Rightarrow |a_n| > M$ означает, что при $n > n_0$ точки (n, a_n) на плоскости Oxy лежат за пределами полосы, ограниченной прямыми $y = -M$ и $y = M$.

Пример 5. Если $q > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty. \tag{4}$$

Действительно, положим $q = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Для произвольного $M > 0$ выберем номер n_0 так, чтобы $1 + n_0\alpha > M$. Ввиду (2) для любого $n > n_0$ имеем $q^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > M$ и, значит, верно равенство (4).

Упражнение 5. Пусть все члены последовательности $\{a_n\}$ отличны от нуля. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a_n) = 0$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся;* последовательность, имеющая бесконечный предел или не имеющая предела, называется *расходящейся.*

Теорема 1. *Всякая монотонная и ограниченная последовательность является сходящейся.*

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Соглано теореме 1 справедливы утверждения:

1. Всякая неубывающая (в частности, возрастающая) последовательность, ограниченная сверху, имеет конечный предел.

2. Всякая невозрастающая (в частности, убывающая) последовательность, ограниченная снизу, имеет конечный предел.

С помощью теоремы 1 обосновывается корректность определения площади круга как предела последовательности площадей правильных вписанных многоугольников, а также понятие степени положительного числа с иррациональным показателем. Например,

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n},$$

где $\{r_n\}$ – последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по недостатку (существование предела гарантируется тем, что последовательность $\{3^{r_n}\}$ возрастает и ограничена сверху).

2.3. Свойства сходящихся последовательностей

Имеют место следующие свойства:

1°. *Любая подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к числу a, сходится к этому же числу.*

2°. *Сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ ограничена.*

3°. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a \neq 0$, то существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ все члены последовательности $\{a_n\}$ имеют такой же знак, что и число a.*

4°. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то для любых постоянных α и β*

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n.$$

5°. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, *причем* $b\neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

6°. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ *и существует номер* n_0 *такой, что* $a_n\le b_n$ *при всех* $n\ge n_0$. *Тогда* $a\le b$.

7°. *Пусть для всех* n, *начиная с некоторого номера, выполнены неравенства* $a_n\le b_n\le c_n$, *а пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ *существуют и равны одному и тому же числу. Тогда последовательность* $\{b_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n.$$

Докажем, например, свойства 1° – 4°.

1°. При любом $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_0, что $|a_n-a|<\varepsilon$ при $n>n_0$. Возьмем произвольную подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ последовательности $\{a_n\}$. Так как $k_n\ge n$, то $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$ при $n>n_0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$.

2°. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Для $\varepsilon=1$ найдется такой номер n_0, что $a_n\in(a-1,a+1)$ при $n>n_0$. Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее из чисел

$$a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_{n_0},\ a-1,\ a+1.$$

При любом натуральном n имеем $m\le a_n\le M$ и, значит, последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

3°. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $a\neq 0$. Возьмем $\varepsilon=|a|/2$. Существует такой номер n_0, что при $n>n_0$ числа a_n расположены в интервале $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, т.е.

$$a-|a|/2<a_n<a+|a|/2.$$

Отсюда видно, что при $n>n_0$ числа a_n имеют такой же знак, что и число a.

4°. Для любого $n\in\mathbf{N}$ имеем

$$|(\alpha a_n+\beta b_n)-(\alpha a+\beta b)|=|\alpha(a_n-a)+\beta(b_n-b)|\le|\alpha||a_n-a|+|\beta||b_n-b|.$$

Рассмотрим случай, когда обе постоянные c_1 и c_2 отличны от нуля. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\varepsilon_1=\varepsilon/|c_1|$, $\varepsilon_2=\varepsilon/|c_2|$. Существуют такие номера n_1 и n_2, что $|a_n-a|<\varepsilon_1/2$ при $n>n_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon_2/2$ при $n>n_2$. Если $n>\max\{n_1,n_2\}$, то эти неравенства выполняются одновременно и, следовательно,

$$|(c_1a_n+c_2b_n)-(c_1a+c_2b)|<|c_1|\varepsilon_1/2+|c_2|\varepsilon_2/2=\varepsilon.$$

Осталось доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab.$$

По свойству 2° последовательность $\{a_n\}$ ограничена, т.е. при любом n выполнено неравенство $|a_n| < c$, где c – некоторое положительное число. Но тогда для всех $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) - b(a_n - a)| < c|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Предположим, что $b \neq 0$ (в случае $b = 0$ рассуждение аналогично). Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что при $n > n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \quad \text{и} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Но тогда $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ для всех $n > n_0$ и свойство 4° доказано.

Пример 6. Применяя свойства 4°, 5° и формулу (1), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 7n - 2}{3n^2 - 5n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 7/n - 2/n^2}{3 - 5/n + 1/n^2} = \frac{1 + 7 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{3 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0} = \frac{1}{3}.$$

Пример 7. Пользуясь свойством 4° и формулой (3), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 + 2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}\right) = 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

При любом $|q| < 1$ справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1 - q}. \tag{5}$$

Действительно, в тождестве

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и воспользоваться формулой (3).

Основание натуральных логарифмов (число e) определяется по формуле

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{6}$$

Известно, что число e иррациональное и что $e \approx 2.718281828$.

Докажем, что предел в правой части формулы (6) существует. Для этого заметим, что последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ограничена снизу (например, числом 1) и убывает. Действительно, для всех $n \geq 2$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{1 + 1/n}{1 + 1/(n-1)}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n < 1$$

(здесь было использовано неравенство (2) при $\alpha = 1/n^2$). Последовательность $\{a_n\}$ по теореме 1 имеет конечный предел. Остается заметить, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Упражнение 6. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулами

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbf{N},$$

где a – произвольное положительное число, сходится к $\sqrt{2}$.

§ 3. Предел функции

3.1. Определение предела функции в точке

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a прямой $\mathbf{R}$, кроме, быть может, самой точки a. Число b называется *пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если предел функции f в точке a равен b, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$) и говорят, что "предел функции $f(x)$ равен b при x, стремящемся к a".

В данном определении условие $0 < |x-a| < \delta$ означает, что $x \neq a$ и расстояние от x до a меньше δ, а неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ показывает, что значение $f(x)$ расположено в $\varepsilon-$окрестности точки b. В случае $f(a) = b$ истинность импликации $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ можно интерпретировать так: если значение аргумента x в окрестности точки a известно с точностью δ, то значение функции $f(x)$ в точке a известно с точностью ε.

Геометрическая интерпретация равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ состоит в следующем: каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что все точки (x, y) графика функции $y = f(x)$, у которых $x \in (a-\delta, a+\delta)$ (за, исключением, быть может, значения $x = a$), расположены в полосе между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. При этом в самой точке a функция f может быть не определена.

Пример 1. Функция $f(x) = C$, где $C = const$, имеет предел, равный C, в любой точке a.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

имеет в точке 1 предел, равный 3. Действительно, для всех $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x + 1$$

и, следовательно,

$$|f(x) - 3| = 2|x - 1|.$$

Отсюда видно, что если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать положительное число $\delta < \varepsilon/2$, то

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

Пример 3. Функция $\cos x$ имеет в любой точке a предел, равный $\cos a$. Действительно, для всех x

$$\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}$$

и

$$|\cos x - \cos a| \le 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right|.$$

Но $|\sin t| \le |t|$ для всех $t \in \mathbf{R}$ (поясните это неравенство геометрически). Поэтому

$$|\cos x - \cos a| \le |x - a|.$$

Таким образом, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta \le \varepsilon$, то неравенство $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$. Значит, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция f называется *бесконечно малой* в точке a.

Упражнение 1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$ и $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$. В частности, функции x и $\sin x$ являются бесконечно малыми в точке 0.

Упражнение 2. Докажите, что если функция f имеет (конечный) предел в точке a, то существует $\delta > 0$ такое, что f ограничена на множестве $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Предложение 1. *Пусть X – область определения функции f и пусть некоторая окрестность точки a (за исключением, быть может, самой точки a) содержится в X. Для того чтобы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы из условий*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \in X, \quad x_n \ne a, \tag{1}$$

следовало, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое,что

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{2}$$

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям (1). Для числа δ из (2) существует номер n_0 такой, что $0 < |x_n - a| < \delta$ при $n > n_0$. Но тогда (в силу (2)) для всех $n > n_0$ выполнено неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Обратно, предположим, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) \ne b$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x\ (0 < |x - a| < \delta \text{ и } |f(x) - b| \ge \varepsilon_0). \tag{3}$$

Возьмем последовательность

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \frac{1}{2},\ \ldots,\ \delta_n = \frac{1}{n},\ \ldots.$$

Согласно (3) для каждого $\delta_n = 1/n$ существует точка x_n такая, что

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(x_n) - b| \ge \varepsilon_0.$$

Полученная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям (1), но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Предложение 1 доказано.

Пример 4. Функция $f(x) = \sin(1/x)$ не имеет предела в точке 0. В самом деле, предположим, что предел $f(x)$ в точке 0 равен некоторому числу b. Тогда, по утверждению 1, для любой последовательности $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, должно быть $f(x_n) \to b$ при $n \to \infty$ (число b не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$). Однако последовательности $x'_n = 1/(-\pi/2 + 2\pi n)$ и $x''_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ обе сходятся к нулю, и для них $f(x'_n) = -1$ и $f(x''_n) = 1$. Получено противоречие.

Упражнение 3. Докажите, что

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Упражнение 4. Докажите, что *функция Дирихле*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке числовой прямой.

Пример 5. Докажем, что *функция Римана*

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{если } x = p/q \text{ – несократимая дробь и } \ q > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

в каждой точке $a \in \mathbf{R}$ имеет предел, равный 0. Фиксируем точку a и число $\varepsilon > 0$. На любом конечном интервале числовой прямой может быть лишь конечное множество несократимых дробей p/q со знаменателями, удовлетворяющими условию $0 < q \leq 1/\varepsilon$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что на множестве $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ нет ни одной такой дроби и тогда

$$0 < |\,a - p/q| < \delta \Rightarrow \mathcal{R}(p/q) = 1/q < \varepsilon$$

(так как $q > 1/\varepsilon$ в силу выбора δ). Но в иррациональных точках функция $\mathcal{R}$ обращается в нуль, и поэтому для указанного δ верна импликация

$$0 < |\,a - x| < \delta \Rightarrow 0 \leq \mathcal{R}(x) < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to a} \mathcal{R}(x) = 0$.

Говорят, что предел функции f в точке a равен бесконечности (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |\,x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Если в этом определении заменить $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ (соотв. на $f(x) < -M$), то получится определение для $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (соотв. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Пример 6. Для функции $f(x) = 1/(1-x)$ при $x \neq 1$ и любом $M > 0$ имеем

$$|f(x)| > M \iff |\,1 - x| < \frac{1}{M}.$$

Поэтому, если выбрать $\delta = 1/M$, то

$$0 < |\,x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{1-x}\right| > M.$$

Значит,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

Пример 7. Функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – рациональное число,}\\ 1/x, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,}\end{cases}$$

неограничена в произвольной окрестности точки 0, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq\infty$.

Упражнение 6. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ в том и только в том случае, когда функция $1/f$ является бесконечно малой в точке a.

3.2. Основные свойства предела функции

Пусть функции f, f_1, f_2 определены в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть $b, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$. Справедливы следующие свойства:

1°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ *и* $b\neq 0$, *то в некоторой окрестности точки* a *значения* $f(x)$ *при* $x\neq a$ *имеют такой же знак, что и число* b.

2°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$, *то для любых постоянных* c_1 *и* c_2

$$\lim_{x\to a}(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))=c_1b_1+c_2b_2$$

и

$$\lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x)=b_1b_2.$$

В частности,

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=b_1+b_2$$

и

$$\lim_{x\to a}(c_1f_1(x))=c_1\lim_{x\to a} f_1(x).$$

3°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$, *причем* $b_2\neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{b_1}{b_2}.$$

4°. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$ *и пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнено неравенство* $f_1(x)\le f_2(x)$. *Тогда* $b_1\le b_2$.

5°. *Пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнены неравенства* $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ *и в точке* a *существуют равные друг другу пределы функций* f_1 *и* f_2. *Тогда предел функции* f *в точке* a *существует и*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x).$$

Свойство 2° распространяется на любое конечное число функций: если пределы $\lim\limits_{x\to a} f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ существуют и конечны, то для любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\lim_{x\to a}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_kf_k(x)\Big)=\sum_{k=1}^{n} c_k\lim_{x\to a} f_k(x)$$

и

$$\lim_{x\to a}(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)) = \prod_{k=1}^{n}(\lim_{x\to a} f_k(x)).$$

В частности, для любого натурального n и любого $a \in \mathbf{R}$ имеем

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Свойства $1^\circ - 5^\circ$ выводятся из аналогичных свойств предела последовательности с помощью предложения 1. Например, для доказательства свойства 2° достаточно заметить, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \in X, \quad x_n \neq a,$$

выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 f_1(x_n) + c_2 f_2(x_n)) = c_1 \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) + c_2 \lim_{n\to\infty}(f_2(x_n)) = c_1 b_1 + c_2 b_2$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) f_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = b_1 b_2.$$

Свойства $1^\circ - 5^\circ$ могут быть получены также непосредственно из определения 1. Выведем, например, из этого определения свойство 3°. Заметим, что

$$(\lim_{x\to a} f(x) = b) \iff (f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0).$$

Поэтому

$$f_1(x) = b_1 + \alpha_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = b_2 + \alpha_2(x),$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые в точке a функции. Так как $b_2 \neq 0$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$0 < |x - a| < \delta_0 \implies |\alpha_2(x)| < |b_2|/2,$$

и, следовательно,

$$0 < |x - a| < \delta_0 \implies |f_2(x)| \geq |b_2| - |\alpha_2(x)| > |b_2|/2.$$

При этом число δ_0 можно выбрать так, что множество $(a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)$ содержится в области определения функции f_1. Тогда для всех $x \in (a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0)$ имеем

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{b_1}{b_2}\right| = \frac{|b_2(b_1 + \alpha_1(x)) - b_1(b_2 + \alpha_2(x))|}{|f_2(x)||b_2|} < \frac{2}{|b_2|^2}(|b_2||\alpha_1(x)| + |b_1||\alpha_2(x)|). \tag{4}$$

Так как $\lim_{x\to a}\alpha_1(x) = \lim_{x\to a}\alpha_2(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное $\delta < \delta_0$ такое, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ правая часть в (4) меньше ε. Но тогда

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{b_1}{b_2}\right| < \varepsilon$$

и свойство 3° доказано.

Докажем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{5}$$

которое называют *первым замечательным пределом.* Из определений функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ следует, что при $0 < x < \pi/2$ верны неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{6}$$

Так как функции $\cos x$ и $\sin x/x$ четные, то неравенства (6) справедливы также при $-\pi/2 < x < 0$. Согласно примеру 3, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Полагая $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) \equiv 1$ и применяя свойство 4°, из (6) получаем (5).

Из свойств предела, примера 3 и формулы (5) следует, в частности, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

и

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Упражнение 7. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^n}$$

для натуральных значений $n \neq 2$.

3.3. Односторонние пределы

Число b называется *правым* (соотв. *левым) пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$ (соотв. $a - \delta < x < a$), выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Для правого (соотв. левого) предела используются обозначения $f(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (соотв. $f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$).

Пример 8. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 0, \\ 1 + x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

имеем $f(0+0) = 1,\ f(0-0) = 0$ (проиллюстрируйте эти равенства графически).

Пример 9. Для произвольного $x \in \mathbf{R}$ определим значение функции f формулой

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ при $x^2 < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty$ при $x^2 > 1$, то

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \\ 1/2, & \text{если } |x| = 1 \end{cases}$$

Для этой функции $f(-1+0) = 1,\ f(-1-0) = 0$ и $f(1+0) = 0,\ f(1-0) = 1$.

Упражнение 8. Докажите, что число b является пределом функции f в точке a тогда и только тогда, когда оба односторонних предела $f(a+0)$ и $f(a-0)$ существуют и равны b.

Говорят, что функция f имеет в точке a *правый предел, равный бесконечности* (обозначения: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $f(a+0) = \infty$), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Аналогично понимаются выражения $f(a+0) = +\infty$, $f(a+0) = -\infty$, $f(a-0) = \infty$, $f(a-0) = +\infty$ и $f(a-0) = -\infty$.

Пример 10. Для функции $f(x) = 1/(1-x)$ имеем $f(1+0) = -\infty$ и $f(1-0) = +\infty$ (сравните с примером 6).

Пример 11. Справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{1/x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-0} 2^{1/x} = 0$$

и

$$\lim_{x\to 0+0} \log_2 x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+0} \log_{1/2} x = +\infty.$$

Для *конечных* односторонних пределов имеют место свойства, аналогичные приведенным выше свойствам $1^\circ - 5^\circ$.

3.4. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ (обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$)) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если в этом определении заменить $|x| > \delta$ на $x > \delta$ (соотв. на $x < -\delta$), то получится определение для $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (соотв. для $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$). Для этих трех пределов имеют место свойства, аналогичные $1^\circ - 5^\circ$.

Упражнение 9. Докажите, что число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда оба предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ существуют и равны b.

Пример 12. Предел функции $f(x) = (x+1)/(2x-1)$ при $x \to \infty$ равен $1/2$. Действительно, если $|2x| > 1$, то $|2x-1| \geq |2x| - 1 > 0$ и, следовательно,

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3}{2(2x-1)} \right| \leq \frac{3}{2(|2x|-1)}.$$

Возьмем $\delta > 3/4\varepsilon + 1/2$. Если $|x| > \delta$, то

$$|2x| - 1 > \frac{3}{2\varepsilon}$$

и $|f(x) - 1/2| < \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Упражнение 10. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x-1} = \frac{3}{4}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1.$$

Вторым замечательным пределом называют равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{7}$$

Его доказательство начнем со случая $x \to +\infty$. Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$, $\alpha = x - [x]$. Тогда $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbf{N}$, $0 \le \alpha < 1$ (n и α зависят от x). Так как $n \le x < n+1$, то

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{8}$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$ и, как было показано в конце предыдущей лекции, левая и правая части неравенства (8) стремятся к числу e. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть теперь $x < -1$. Тогда $y = -x > 1$ и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Из полученных формул ввиду упражнения 8 следует равенство (7).

Говорят, что *функция $f(x)$ имеет при $x \to \infty$ предел, равный бесконечности* (обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (или $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$)), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Заменяя в этом определении $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ или $f(x) < -M$, получим определения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Аналогично определяются пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Упражнение 11. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}, \qquad a_0 \ne 0, \quad b_0 \ne 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ a_0/b_0, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

3.5. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – две бесконечно малые функции в точке a. Функции α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми* функциями (обозначение: $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$), если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Из приведенных выше формул следуют соотношения

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x \to 0. \tag{9}$$

Ниже будет показано, что при $x \to 0$ верны также формулы

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\gamma - 1 \sim \gamma x, \quad \gamma \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Функции α и β называются *бесконечно малыми одного порядка* в точке a (или при $x \to a$), если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$

Например, функции $1 - \cos x$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 0$.

В случае, когда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

говорят, что α является *бесконечно малой более высокого порядка,* чем β, и пишут $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$ (читается: α равно "о малое" от β при $x \to a$). Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

Если функции α и β являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) = 0$$

и, следовательно, $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta)$, или

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta), \quad x \to a. \tag{11}$$

Применяя (11) к (9), получаем асимптотические формулы:

$$\sin x = x + o(x),$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

где $x \to 0$.

При вычислении пределов часто пользуются тем, что если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \tag{12}$$

Для доказательства этой формулы достаточно в равенстве

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}.$$

перейти к пределу при $x \to a$.

Пример 13. Ввиду (9) и (10) при $x \to 0$ имеем

$$1 - \cos 2x \sim 2x^2 \qquad \text{и} \qquad \ln(1 + 3x^2) \sim 3x^2,$$

и, по формуле (12),

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\ln(1+3x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

Пример 14. Согласно (10) при $x\to +0$ имеем

$$\ln(1+7\sqrt{x})\sim 7\sqrt{x}\qquad \text{и}\qquad \sqrt[3]{1+x}-1\sim x/3.$$

Применяя (12), отсюда получаем

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{x}\ln(1+7\sqrt{x})}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x/3}=21.$$

§ 4. Непрерывные функции

4.1. Непрерывность функции в точке, на интервале и на отрезке

Пусть функция f задана на множестве $X\subset\mathbf{R}$ и точка x_0 расположена в X вместе с некоторой своей окрестностью. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции f и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Из приведенных выше свойств пределов следует, что условие (1) эквивалентно следующему: для любой последовательности точек $\{x_n\}$ из X, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.

Разность $\Delta x=x-x_0$ называют приращением аргумента x в точке x_0, а разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращением функции f в точке x_0, вызванным приращением аргумента Δx. Равенство (1) можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Таким образом, функция f является непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее приращение Δy в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x\to 0$.

Из приведенных выше примеров и упражнений следует, в частности, что функции x^n $(n\in\mathbf{N})$, $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в каждой точке прямой $\mathbf{R}$.

Упражнение 1. Пусть функция f непрерывна и положительна в точке x_0. Докажите, что тогда существует число $c>0$ такое, что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)>c$.

Из определения непрерывности и основных свойств предела легко выводится следующее утверждение: *если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции $f+g$, $f-g$, fg также непрерывны в этой точке; если же $g(x_0)\neq 0$, то и функция f/g непрерывна в точке x_0*. Действительно, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\quad \text{и}\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0),$$

то, например, для функции $f+g$ имеем

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=f(x_0)+g(x_0),$$

что и означает непрерывность функции $f+g$ в точке x_0.

Пример 1. Многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ является функцией, непрерывной в любой точке числовой прямой, а рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

непрерывна во всех точках, где она определена.

Суперпозиция двух непрерывных функций непрерывна. Действительно, пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0 и принимает в этой точке значение $x_0 : \varphi(t_0) = x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 определена функция $f(\varphi(t))$ и с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ имеем

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\varphi(t_0))$$

(здесь $x \to x_0$ при $t \to t_0$ в силу непрерывности функции φ).

Из непрерывности основных элементарных функций и из отмеченной выше замкнутости класса непрерывных функций относительно арифметических операций и операции суперпозиции следует, что *всякая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.*

Функция f называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Например, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Функция f называется *непрерывной справа* в точке x_0, если при некотором δ_0 промежуток $[x_0, x_0 + \delta_0)$ содержится в области определения функции f и выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

т.е. $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Аналогично вводится понятие функции f, *непрерывной слева* в точке x_0 (в этом случае $f(x_0 - 0) = f(x_0)$). Непосредственно из определений видно, что если функция f непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке. Например, функция $[x]$ (целая часть числа x) непрерывна справа в каждой точке $k \in \mathbf{Z}$.

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Например, функция $\arcsin x$ непрерывна на отрезке [-1,1].

4.2. Точки разрыва функции

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции f, если в этой точке функция f не является непрерывной. Различают три вида точек разрыва функции f :

1) x_0 – *точка устранимого разрыва,* если предел функции f в точке x_0 существует, но не равен значению f в точке x_0 (в частности, f может быть не определена в точке x_0);

2) x_0 – *точка разрыва первого рода,* если оба односторонних предела $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ существуют и конечны, но $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$;

3) x_0 – *точка разрыва второго рода,* если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 + 0)$ или $f(x_0 - 0)$ не существует или бесконечен.

Если x_0 – точка устранимого разрыва функции f и $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то функция

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ b, & x = x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0 (за новой функцией f_1 обычно сохраняют обозначение f).

Пример 2. Функция $f(x) = \sin x/x$ становится непрерывной в точке 0, если ее доопределить в этой точке равенством $f(0) = 1$.

Пример 3. Функция Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{если } x = p/q \text{ – несократимая дробь и } \ q > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

в каждой рациональной точке имеет устранимый разрыв, а в каждой иррациональной точке она непрерывна (это свойство было доказано выше).

Если x_0 – точка разрыва первого рода функции f, то разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называют *скачком* функции f в точке x_0.

Пример 4. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x_0 = 0$ скачок, равный 2.

Пример 5. Для функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$$

имеем $f(0+0) = 0$ и $f(0-0) = 1$ и, значит, скачок данной функции в точке 0 равен -1.

Пример 6. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

точка 0 является точкой разрыва второго рода, так как односторонние пределы этой функции в точке 0 не существуют.

4.3. Две теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

Следующие две теоремы, первую из которых называют *теоремой Вейерштрасса*, выражают фундаментальные свойства непрерывных функций и играют важную роль во многих приложениях.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих экстремальных значений, т.е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка, в которой функция f обращается в нуль.*

По теореме 1 функция f принимает на $[a,b]$ значения $m = \min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ и $M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. С помощью теоремы 2 покажем, что *образом отрезка* $[a,b]$ *при непрерывном отображении* f *является отрезок* $[m,M]$ (в случае, когда $f = const$, этот отрезок вырождается в точку).

Предположим, что $m < M$, $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$ (в случае $x_1 > x_2$ рассуждения аналогичны). Выберем произвольное число $y_0 \in (m,M)$. Вспомогательная функция $\varphi(x) = f(x) - y_0$ непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$ и принимает на его концах значения разных знаков:

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = (m - y_0)(M - y_0) < 0.$$

По теореме 2 существует точка $x_0 \in (x_1,x_2)$ такая, что $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = y_0$. Отсюда следует, что $f([a,b]) = [m,M]$. Значит, *если непрерывная на* $[a,b]$ *функция* f *принимает какие нибудь два значения* y_1 *и* y_2, *то она принимает на* $[a,b]$ *все значения, заключенные между* y_1 *и* y_2.

Упражнение 2. Приведите пример функции, непрерывной в интервале $(0,1)$ и неограниченной на этом интервале.

При условиях теоремы 2 для нахождения одного из корней уравнения

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

на отрезке $[a,b]$ с точностью ε часто применяют *метод половинного деления.* В случае, когда

$$f(a) > 0, \qquad f(b) < 0$$

(иначе обе части уравнения (4) можно умножить на (-1)) этот метод имеет следующий алгоритм:

1. Вычислить $x = (a+b)/2$ и $f(x)$.
2. Если $f(x) = 0$, то принять $c = x$ и закончить вычисления.
3. Если $f(x) > 0$, то принять $a = x$, иначе $b = x$.
4. Если $b - a \ge \varepsilon$, то перейти к п.1, иначе принять $c = x$ и закончить вычисления.

Если условие $f(x) = 0$ в п.2 не выполняется, то в ходе реализации алгоритма получаются точки

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad f(a_k) > 0, \quad f(b_k) < 0 \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

где $a_0 = a$, $b_0 = b$. При $k = 0$ вычисляются $x_0 = (a+b)/2$ и $f(x_0)$. Если $f(x_0) > 0$, то $a_1 = x_0$, $b_1 = b$; если же $f(x_0) < 0$, то $a_1 = a$, $b_1 = x_0$. При $k = 1$ вычисляются $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ и $f(x_1)$ и т.д. Каждый последующий отрезок получается делением предыдущего отрезка пополам, причем на концах выбранных отрезков функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

Для любого k имеем $c \in [a_k, b_k]$ и $x_k \in [a_k, b_k]$. Поэтому

$$|\, c - x_k| \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \tag{5}$$

Вычисления проводятся до тех пор пока не будет выполнено условие $b_k - a_k < \varepsilon$. Из неравенства (5) следует оценка числа шагов k, достаточных для достижения точности ε :

$$k \ge \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right).$$

Например, если $b-a=1$ и $\varepsilon=10^{-6}$, то $k \geq \log_2 10^6 = 6\log_2 10 > 18$, т.е. $k \geq 19$.

Упражнение 3. Построив графики функций $y=x^3$ и $y=1-3x^2$, убедитесь, что уравнение

$$x^3+3x^2-1=0$$

имеет на отрезке $[0,1]$ единственный корень и найдите этот корень с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ методом половинного деления.

4.4. Примеры вычисления пределов

Покажем как из второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{6}$$

выводятся формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\gamma-1}{x} = \gamma, \tag{9}$$

где γ – произвольное действительное число.

Полагая в (6) $x=1/t$, имеем

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

Отсюда, пользуясь непрерывностью логарифмической функции, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1,$$

т.е. верна формула (7). Для вывода (8) из (7) положим $y=e^x-1$. В силу непрерывности функции e^x имеем $y\to 0$ при $x\to 0$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

Для доказательства (9) положим $z=(1+x)^\gamma-1$. В силу непрерывности функции $(1+x)^\gamma$ имеем $z\to 0$ при $x\to 0$. Кроме того,

$$\gamma\cdot\ln(1+x) = \ln(1+z).$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\gamma-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{z}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}\cdot\gamma\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \gamma,$$

т.е. верна формула (9). Таким образом, при $x\to 0$ справедливы соотношения

$$\ln(1+x)\sim x, \quad e^x-1\sim x, \quad (1+x)^\gamma-1\sim\gamma x.$$

Пример 7. Пользуясь формулами (8) и (9), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{2^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}-1}\cdot\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}.$$

Упражнение 4. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4-3x^2+2}{2x^3-4x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-8x+5}{1-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{1/x}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1+\log_3(1-2x)}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^3+2x+12}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{2+x}}{4x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-3x^2+2}{x^3-3x^6}$;

14) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$;

15) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+2}{x+5}\right)^x$;

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin 7x}$;

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Темы для упражнений в системе Mathcad

1. Графические иллюстрации понятий предела, непрерывности и точек разрыва.
2. Поиск значений δ по заданным убывающим значениям ε для различных пределов (составление таблиц).
3. Графические иллюстрации "замечательных пределов" и их следствий (с построением графиков соответствующих функций в окрестности предельных точек).
4. Вычисление порядков бесконечно малых функций.
5. Компьютерная проверка вычисленных "вручную" пределов.

Рекомендуемая литература

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: решение типичных и трудных задач. – СПб.: Изд-во "Лань", 2007.

2. *Болгов В.А., Демидович Б.Н., Ефимов А.В. и др.* Сборник задач по математике для втузов. Часть 1. – М.: Наука, 1993.

3. *Босс В.* Лекции по математике. Анализ. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнеиях и задачах. Часть 1. – М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2006.

5. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.

6. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 1. – М.: МЦНМО, 2007.

7. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – СПб.: Изд-во "Лань", 2005.

8. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2001.

9. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001.

10. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т.1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

11. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

12. *Тихомиров В. М.* Дифференциальное исчисление (теория и приложения). – М.: МЦНМО, 2002.

13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

14. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2007.