Методические материалы по теме "Функции, пределы и производные"

1. Понятие числовой функции

В реальном мире часто приходится иметь дело с парами переменных величин, значения одной из которых (зависимой) изменяются в зависимости от значений второй (независимой). Например, при равномерном движении скорость v постоянна, а путь s линейно зависит от времени: $s = vt$. Независимую переменную называют *аргументом*, а зависимую переменную – *функцией*. Поэтому можно сказать, что в приведенном примере s есть функция t.

Напомним определение *числовой функции*. Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть по некоторому определенному закону каждому числу a из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное число b, тогда говорят, что на X задана функция f и пишут $b = f(a)$. Здесь через $f(a)$ обозначено *значение*, принимаемое функцией f в точке a. Множество X, на котором задана функция f, называют *областью определения* функции f (и обозначают $D(f)$). Саму функцию f часто обозначают через $y = f(x)$ (или $f(x)$), где x – независимая переменная или аргумент, а y – зависимая переменная. Независимая переменная x может принимать любое значение из множества $D(f)$. Функция f задана, если, во-первых, указана область определения $D(f)$ этой функции и, во-вторых, указано правило, позволяющее по каждому значению аргумента x из множества $D(f)$ находить соответствующее ему значение y функции f.

Если функция f задана формулой, причем область определения этой функции специально не оговорена, то в качестве $D(f)$ выбирают так называемую *естественную область определения*, т.е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Например, если функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, то полагают $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Множеством значений функции f называют множество $E(f)$, состоящее из всех значений, принимаемых функцией f на множестве $D(f)$ (т.е. $E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$). Например, если $f(x) = \sin x$, то $D(f) = \mathbf{R}$ и $E(f) = [-1, 1]$.

Если функция f задана на множестве X и принимает значения в Y (т.е. $E(f) \subset Y$), то говорят, что f *отображает* множество X в Y и пишут $f : X \to Y$ (термины "функция" и "отображение" используются как синонимы).

Графиком функции f называют множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$. График функции f состоит из точек плоскости Oxy, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями переменной y. Если график функции f пересекает ось Ox, то абсциссы точек пересечения совпадают с корнями уравнения $f(x) = 0$. Если число 0 принадлежит $D(f)$, то график функции f пересекает ось Oy в точке с координатами $x = 0$, $y = f(0)$.

Упражнение. Определите все функции, заданные на множестве $\{0, 1, 2\}$ и принимающие значения на множестве $\{2, 3\}$. Постройте график каждой из этих функций.

Функция f называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции не меняется). График чет-

ной функции симметричен относительно оси Oy. Примеры четных функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = \cos x$.

Функция f называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$ (т.е. при изменении знака аргумента значение функции тоже меняет знак). График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры нечетных функций: $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция f называется *ограниченной*, если существуют числа m и M такие, что

$$m < f(x) < M \quad \text{для всех} \quad x \in D(f)$$

(график такой функции расположен в полосе между прямыми $y = m$ и $y = M$). Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены.

Число $T \neq 0$ называется *периодом* функции f, если для любого $x \in D(f)$ выполнены равенства

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функция f, имеющая период, называется *периодической*. Наименьший положительный период функции f называется *основным* периодом этой функции. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют основной период $T = 2\pi$.

Пусть множество A содержится в области определения функции f (т.е. $A \subset D(f)$). Говорят, что функция f является *возрастающей* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента x на A соответствует большее значение $f(x)$). Например, функция $y = x^2$ является возрастающей на промежутке $[0, \infty)$. Говорят, что функция f является *убывающей* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента x на A соответствует меньшее значение $f(x)$). Например, функция $y = \sin x$ является убывающей на отрезке $[\pi/2, \pi]$.

Историческая справка. В 1718 г. Иоганн Бернулли определял функцию как "переменную величину, заданную аналитическим выражением, составленным из переменной x и постоянных величин". Эйлер отмечал, что "когда некоторое количество зависит от других таким образом, что при изменении последних и сами подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых". Н.И. Лобачевский писал: "Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе". В одной из работ Дирихле (1837 г.) можно прочитать: "Будем понимать под a и b два фиксированных значения, а под x – переменную величину, принимающую все значения, расположенные между a и b. Если теперь каждому x соответствует одно единственное конечное y и притом так, что когда x непрерывно пробегает интервал от a до b, $y = f(x)$ также непрерывно изменяется, то y называется непрерывной функцией от x для этого интервала. При этом совсем необязательно представлять себе ее в виде зависимости, выраженной при помощи математических операций. Геометрически представленная (т.е. если мыслить x и y как абсциссу и ординату), непрерывная функция оказывается связной кривой, на которой всякой содержащейся между a и b абсциссе соответствует только одна точка. Это определение не приписывает какого-либо закона отдельным частям кривой; она может быть составлена из различного рода частей или же может быть мыслима совсем лишенной какого-либо закона. Отсюда вытекает, что такая

функция может рассматриваться как полностью определенная для некоторого интервала, если она или задана графически для всего интервала, или же для отдельных частей его подчинена различным математическим законам. Если функция определена только для одной части интервала, то способ ее продолжения на остающийся интервал оказывается совершенно произвольным". Определение функции как отображения одного множества на другое сформировалось в конце XIX – начале XX вв. и в настоящее время приводится в школьных и университетских учебниках.[1]

2. Операция композиции и класс элементарных функций

Пусть даны две функции f и g, причем множество значений функции f содержится в области определения функции g (т.е. $E(f) \subset D(g)$). Тогда функция h, заданная для $x \in D(f)$ по формуле $h(x) = g(f(x))$, называется *композицией* функций f и g (обозначение: $h = g \circ f$). Иногда функцию $h(x) = g(f(x))$ называют *сложной функцией,* полученной из f и g. Например, если $g(t) = \sin t$ и $f(x) = 7x + 9$, то $h(x) = (g \circ f)(x) = \sin(7x + 9)$.

Функция f называется *элементарной*, если она получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции композиции. При этом к числу *основных элементарных функций* относят:

- функции-константы (т.е. функции вида $f(x) = C$, где C– const);
- степенные функции x^α (показатель α может быть любым действительным числом);
- показательные функции a^x, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмические функции $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Упражнение. Постройте графики следующих элементарных функций:

1) $1 + x^{3/2}$, 2) $3 - \sqrt{x}$, 3) $\log_2(x - 1)$, 4) $\log_{1/2}(x + 1)$, 5) $1 + 2^x$, 6) $2 - (1/3)^x$,
7) $2\sin(x - \pi/4)$, 8) $-\cos(2x + \pi/3)$, 9) $-\arcsin(x + 1)$, 10) $2\arccos(x - 1)$,
11) $1 + \operatorname{arctg} x$, 12) $1 - \operatorname{arcctg} x$, 13) $\arcsin(2x)$, 14) $\operatorname{arctg}(x/2)$.

3. Определение предела функции в точке

Напомним, что *окрестностью* точки a прямой $\mathbf{R}$ называется произвольный интервал с центром в этой точке. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число b называется *пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если предел функции f в точке a равен b, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$) и говорят, что "предел функции $f(x)$ равен b при x, стремящемся к a".

В данном определении условие $0 < |x - a| < \delta$ означает, что $x \neq a$ и расстояние от x до a меньше δ, а неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ показывает, что значение $f(x)$ расположено в ε-окрестности точки b. В случае $f(a) = b$ условие $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ можно интерпретировать так: если значение аргумента x в окрестности точки a известно с точностью δ, то значение функции $f(x)$ в точке a известно с точностью ε.

Геометрическая интерпретация равенства $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ состоит в следующем: каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что все точки (x, y) графика функции

[1] См., например, [Алгебра и начала анализа: учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений; под. ред. А.Н. Колмогорова. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2007, с. 28].

$y = f(x)$, у которых $x \in (a - \delta, a + \delta)$ (за, исключением, быть может, значения $x = a$), расположены в полосе между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. При этом в самой точке a функция f может быть не определена.

Пример 1. Функция $f(x) = C$, где $C = const$, имеет предел, равный C, в любой точке.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

имеет в точке 1 предел, равный 3. Действительно, для всех $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x + 1$$

и, следовательно,

$$|f(x) - 3| = 2|x - 1|.$$

Отсюда видно, что если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать положительное число $\delta < \varepsilon/2$, то

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Пример 3. Функция $\cos x$ имеет в любой точке a предел, равный $\cos a$. Действительно, для всех x

$$\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x + a}{2} \sin \frac{x - a}{2}$$

и

$$|\cos x - \cos a| \leq 2 \left| \sin \frac{x - a}{2} \right|.$$

Но $|\sin t| \leq |t|$ для всех $t \in \mathbf{R}$ (поясните это неравенство геометрически). Поэтому

$$|\cos x - \cos a| \leq |x - a|.$$

Таким образом, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta \leq \varepsilon$, то неравенство $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$. Значит,

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a.$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция f называется *бесконечно малой* в точке a.

Упражнения.

1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$ и $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$. В частности, функции x и $\sin x$ являются бесконечно малыми в точке 0.

2. Докажите, что функция $f(x) = \sin(1/x)$ не имеет предела в точке 0.

3. Докажите, что

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

4. Докажите, что *функция Дирихле*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке числовой прямой.

Пример 4. Докажем, что *функция Римана*

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{если } x = p/q \text{ – несократимая дробь и } \ q > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

в каждой точке $a \in \mathbf{R}$ имеет предел, равный 0. Фиксируем точку a и число $\varepsilon > 0$. На любом конечном интервале числовой прямой может быть лишь конечное множество несократимых дробей p/q со знаменателями, удовлетворяющими условию $0 < q \leq 1/\varepsilon$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что на множестве $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ нет ни одной такой дроби. Тогда для любой дроби $p/q \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ имеет место неравенство $\mathcal{R}(p/q) = 1/q < \varepsilon$ (так как $q > 1/\varepsilon$ в силу выбора δ). А в иррациональных точках функция $\mathcal{R}$ обращается в нуль. Поэтому для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, имеем

$$|\mathcal{R}(x) - 0| = \mathcal{R}(x) < \varepsilon.$$

Этим доказано, что $\lim\limits_{x\to a} \mathcal{R}(x) = 0$.

Говорят, что предел функции f в точке a равен бесконечности (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Если в этом определении заменить $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ (соотв. на $f(x) < -M$), то получится определение для $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (соотв. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Пример 5. Для функции $f(x) = 1/(1-x)$ при $x \neq 1$ и любом $M > 0$ имеем

$$|f(x)| > M \iff |1-x| < \frac{1}{M}.$$

Поэтому, если выбрать $\delta = 1/M$, то

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{1-x}\right| > M.$$

Значит,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \infty.$$

Пример 6. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 1/x, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

неограничена в произвольной окрестности точки 0, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то функция f называется *бесконечно большой* в точке a.

Упражнение. Пусть существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ в том и только в том случае, когда функция $1/f(x)$ является бесконечно малой в точке a.

Сформулируем определения односторонних пределов. Число b называется *правым* (соотв. *левым) пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a+\delta$ (соотв. $a-\delta < x < a$), выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Для правого (соотв. левого) предела используются обозначения $f(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (соотв. $f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$).

Пример 7. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 0, \\ 1+x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

имеем $f(0+0) = 1,\ f(0-0) = 0$.

Упражнение. Объясните смысл равенств $f(a+0) = +\infty$, $f(a+0) = -\infty$, $f(a-0) = +\infty$, $f(a-0) = -\infty$ и проиллюстрируйте их графически.

4. Основные свойства предела функции

Пусть функции f, f_1, f_2 определены в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть $b, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$. Справедливы следующие свойства:

1°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $b \ne 0$, *то в некоторой окрестности точки* a *значения* $f(x)$ *при* $x \ne a$ *имеют такой же знак, что и число* b.

2°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, *то для любых постоянных* c_1 *и* c_2

$$\lim_{x\to a}(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 b_1 + c_2 b_2$$

и

$$\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = b_1 b_2.$$

В частности,

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = b_1 + b_2$$

и

$$\lim_{x\to a}(c_1 f_1(x)) = c_1 \lim_{x\to a} f_1(x).$$

3°. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, *причем* $b_2 \ne 0$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1}{b_2}.$$

4°. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$ *и пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнено неравенство* $f_1(x) \le f_2(x)$. *Тогда* $b_1 \le b_2$.

5°. *Пусть в некоторой окрестности точки* a, *кроме, быть может самой точки* a, *выполнены неравенства* $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ *и в точке* a *существуют равные друг другу пределы функций* f_1 *и* f_2. *Тогда предел функции* f *в точке* a *существует и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Свойство 2° распространяется на любое конечное число функций: если пределы $\lim\limits_{x\to a} f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и конечны, то для любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\lim_{x\to a}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k \lim_{x\to a} f_k(x)$$

и

$$\lim_{x\to a}\Big(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\Big) = \prod_{k=1}^{n}\big(\lim_{x\to a} f_k(x)\big).$$

В частности, для любого натурального n и любого $a \in \mathbf{R}$ имеем

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Докажем равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1}$$

которое называют *первым замечательным пределом.* Из определений функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ следует, что при $0 < x < \pi/2$ верны неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

Так как функции $\cos x$ и $\sin x/x$ четные, то неравенства (2) имеют место также при $-\pi/2 < x < 0$. Выше было доказано, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Полагая $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) \equiv 1$ и применяя свойство 4°, из (2) получаем (1).

Из свойств предела и формулы (1) следует, в частности, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Упражнение. Вычислите пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}.$$

5. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ (обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$)) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если в этом определении заменить $|x| > \delta$ на $x > \delta$ (соотв. на $x < -\delta$), то получится определение для $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (соотв. для $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$). Для этих трех пределов имеют место свойства, аналогичные $1^\circ - 5^\circ$.

Пример 1. Предел функции $f(x) = (x+1)/(2x-1)$ при $x \to \infty$ равен $1/2$. Действительно, если $|2x| > 1$, то $|2x-1| \geq |2x| - 1 > 0$ и, следовательно,

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2(2x-1)}\right| \leq \frac{3}{2(|2x|-1)}.$$

Возьмем $\delta > 3/4\varepsilon + 1/2$. Если $|x| > \delta$, то

$$|2x| - 1 > \frac{3}{2\varepsilon}$$

и $|f(x) - 1/2| < \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Если воспользоваться свойствами пределов, то это равенство можно получить быстрее:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{2-1/x} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{2-\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

называемое *вторым замечательным пределом.* С помощью этого предела выводятся формулы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma,$$

где γ – произвольное действительное число.

Упражнения.

1. Докажите равенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x-1} = \frac{3}{4}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^{1/x} = 1.$$

2. Докажите, что число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда оба предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ существуют и равны b.

Говорят, что *функция $f(x)$ имеет при $x \to \infty$ предел, равный бесконечности* (обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (или $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$)), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$. Заменяя в этом определении $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$ или $f(x) < -M$, получим определения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Аналогично определяются пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Пример 3. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}, \qquad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ a_0/b_0, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

6. Непрерывность функции в точке

Пусть функция f задана на множестве X и точка a расположена в X вместе с некоторой своей окрестностью. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если предел функции f и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Разность $\Delta x = x - a$ называют приращением аргумента x в точке a, а разность $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ – приращением функции f в точке a, вызванным приращением аргумента Δx. Равенство (1) можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(a + \Delta x) = f(a)$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, функция f является непрерывной в точке a тогда и только тогда, когда приращение Δy в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

Упражнение. Пусть функция f непрерывна и положительна в точке a. Докажите, что тогда существует число $c > 0$ такое, что в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > c$.

Из определения непрерывности и основных свойств предела выводится следующее утверждение: *если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f + g$, $f - g$, fg также непрерывны в этой точке; если же $g(a) \neq 0$, то и функция f/g непрерывна в точке a.* Действительно, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

то, например, для функции $f + g$ имеем

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = f(a) + g(a),$$

что и означает непрерывность функции $f + g$ в точке a.

Композиция двух непрерывных функций непрерывна. Действительно, пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0 и принимает в этой точке значение $x_0 : \varphi(t_0) = x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 определена функция $f(\varphi(t))$ и с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ имеем

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\varphi(t_0))$$

(здесь $x \to x_0$ при $t \to t_0$ в силу непрерывности функции φ).

7. Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Функция f называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Например, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Функция f называется *непрерывной справа* в точке x_0, если при некотором δ_0 промежуток $[x_0, x_0 + \delta_0)$ содержится в области определения функции f и выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

т.е. $f(x_0+0)=f(x_0)$. Аналогично вводится понятие функции f, *непрерывной слева* в точке x_0 (в этом случае $f(x_0-0)=f(x_0)$). Непосредственно из определений видно, что если функция f непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке. Функция $[x]$ (целая часть числа x) непрерывна справа в каждой точке $k \in \mathbf{Z}$.

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Например, функция $\arcsin x$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$.

Часто применяются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.*

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \textit{для всех} \quad x \in [a,b].$$

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то в интервале (a,b) существует по крайней мере одна точка, в которой функция f обращается в нуль.*

Теорему 2 называют *теоремой Вейерштрасса об экстремальных значениях.* Согласно этой теореме функция f принимает в точках x_1 и x_2 значения $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ и $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ соответственно. С помощью теоремы 3 покажем, что *образом отрезка* $[a,b]$ *при непрерывном отображении f является отрезок* $[m,M]$ (в случае, когда $f=const$, этот отрезок вырождается в точку).

Предположим, что $m<M$, $m=f(x_1)$, $M=f(x_2)$, где $x_1,x_2 \in [a,b]$ и $x_1<x_2$ (в случае $x_1>x_2$ рассуждения аналогичны). Выберем произвольное число $y_0 \in (m,M)$. Вспомогательная функция $\varphi(x)=f(x)-y_0$ непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$ и принимает на его концах значения разных знаков:

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)=(m-y_0)(M-y_0)<0.$$

По теореме 3 существует точка $x_0 \in (x_1,x_2)$ такая, что $\varphi(x_0)=0$, т.е. $f(x_0)=y_0$. Таким образом, *если непрерывная на $[a,b]$ функция f принимает какие нибудь два значения y_1 и y_2, то она принимает на $[a,b]$ все значения, заключенные между y_1 и y_2.*

Упражнение. Приведите пример функции, непрерывной в интервале $(0,1)$ и неограниченной на этом интервале.

8. Понятие производной

Пусть точка x_0 лежит в области определения функции $f(x)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 находят по следующему алгоритму.

1) Вычисляют $y_0=f(x_0)$.

2) Составляют приращение функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$.

3) Составляют отношение этих приращений

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

4) Находят предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Если предел (1) существует и конечен, то он обозначается $f'(x_0)$ и называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0, а функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0. Таким образом, производная $f'(x_0)$ определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Из определений видно, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке (обратное неверно: функция $|x|$ непрерывна в точке 0, но не имеет в этой точке производную).

Пример 1. Если $f(x)=C$, где $C=const$, то $f'(x_0)=0$ в любой точке x_0.

Пример 2. Найдем производную функции $f(x)=x^2$ в точке x_0. Для данной функции имеем

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Следовательно,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

Если предел (1) существует при любом выборе точки x_0 на некотором множестве X, то говорят, что функция $y=f(x)$ *дифференцируема на множестве* X. В этом случае на множестве X определена функция $f'(x)$, называемая *производной* функции $f(x)$. Например, функция $f(x)=x^2$ дифференцируема на прямой $\mathbf{R}$ и $f'(x)=2x$ для всех $x\in\mathbf{R}$.

Пример 3. Докажем, что $(\sin x)'=\cos x$ в любой точке x. Возьмем произвольную точку $x_0\in\mathbf{R}$. Применяя формулу

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

имеем

$$\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\,\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1\quad\text{и}\quad\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x_0,$$

получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\cos x_0.$$

Таким образом, если $f(x)=\sin x$, то $f'(x)=\cos x$ для всех $x\in\mathbf{R}$.

Упражнение. Докажите, что $(\cos x)'=-\sin x$ в любой точке x.

Имеют место формулы

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\quad (a^x)'=a^x\ln x,\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Производные обратных тригонометрических функций вычисляются по формулам

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Из определения производной и основных свойств предела выводятся следующие *правила дифференцирования*:

$$(Cf(x))' = Cf'(x), \quad (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Кроме того, если $f(x) = F[u(x)]$, где функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то

$$f'(x_0) = F'(u_0)u'(x_0).$$

Пользуясь этими правилами и приведенными выше формулами, можно вычислить производные многих элементарных функций.

Упражнение. Найдите производные следующих элементарных функций:

1) $1 + x^{3/2}$, 2) $3 - \sqrt{x}$, 3) $\log_2(x-1)$, 4) $\log_{1/2}(x+1)$, 5) $1 + 2^x$, 6) $2 - (1/3)^x$,
7) $2\sin(x - \pi/4)$, 8) $-\cos(2x + \pi/3)$, 9) $-\arcsin(x+1)$, 10) $2\arccos(x-1)$,
11) $1 + \operatorname{arctg} x$, 12) $1 - \operatorname{arcctg} x$, 13) $\arcsin(2x)$, 14) $\operatorname{arctg}(x/2)$.

Сравните графики полученных производных с графиками самих функций.

Геометрический смысл производной: значение $f'(x_0)$ совпадает с угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$; при этом уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В случае $f'(x_0) = 0$ касательная параллельна оси Ox, а в случае $f'(x_0) \neq 0$ имеет место равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси Ox (точнее, α – угол, на который надо повернуть ось Ox против часовой стрелки до совпадения с касательной).

Механический смысл производной: если $s = s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой M за время t, то $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ – путь, пройденный M за время $\Delta t = t - t_0$, $\Delta s/\Delta t$ – средняя скорость движения за время от t_0 до t, а производная

$$s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

– значение скорости точки M в момент времени t_0. Коротко говорят: производная от пути по времени есть скорость.