МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНАЯ АКАДЕМИЯ

Методические указания и контрольные задания
к контрольной работе

# Тема: ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Составитель: Ваксман К.Г.

Москва 2001

# С О Д Е Р Ж А Н И Е



## РАСПОЛОЖЕНИЕ В ТЕКСТЕ ПРИМЕРОВ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ





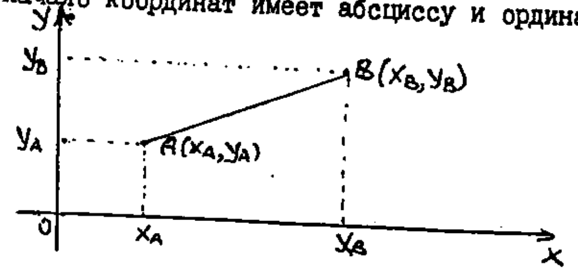
# Э Л Е М Е Н Т Ы А Н А Л И Т И Ч Е С К О Й Г Е О М Е Т Р И И Н А П Л О С К О С Т И

## ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для определения положения точки на плоскости вводят прямоугольную декартову систему координат: задают две оси: ось $X$ и ось $Y$, которые пересекаются под прямым углом в точке $O$ -начале координат. Необходимо задать положительное направление осей и масштабные отрезки на осях.

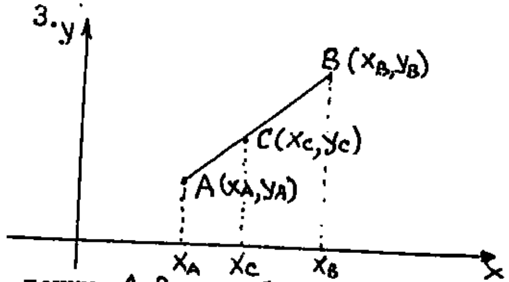
I. Любой точке $M$ плоскости соответствуют два числа: абсцисса - $X_M$ и ордината - $Y_M$. Запись: $M(x_m, y_m)$.

Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю $O(0,0)$.




2. Расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ определяется формулой $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (по теореме Пифагора).

3.




Деление отрезка в данном отношении $\lambda$. $AC/CB = \lambda$.

Даны координаты точек $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Координаты точки $C$, делящей отрезок $AB$ в данном отношении $\lambda$ найдем, спроектирова[в] точки $A, B$ и $C$ на оси $X$ и $Y$.

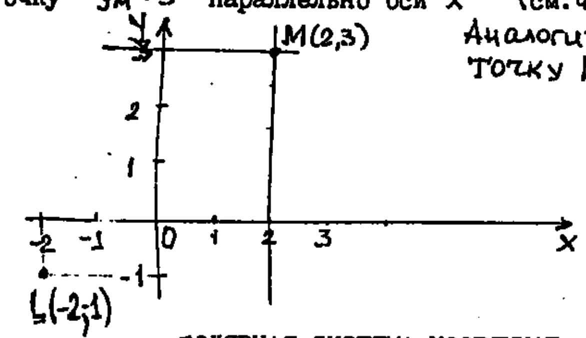
Например: $\dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \lambda$, откуда $x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$

Аналогично: $y_C = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$.

Если точка $C$ есть середина отрезка $AB$ $(\lambda = 1)$, т.е.

$$y_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Пример I. Построить в декартовой системе точки: $M(2;3)$, $L(-2;-1)$
Решение. Проведем оси $X$ и $Y$ под углом 90°. Выберем единицу масштаба. Точка $M$ находится на пересечении двух прямых: прямой $x_M=2$, проходящей через точку $x_M=2$ параллельно оси $Y$, и прямой $y_M=3$, проходящей через точку $y_M=3$ параллельно оси $X$ (см.чертеж).

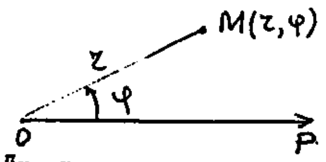



Аналогично строим точку $L(-2;-1)$.

## ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Задается полярная ось, её начало называется полюсом. Задается положительное направление $OP$ полярной оси, а отрицательного направления у нее нет. На полярной оси указывают единицу масштаба.

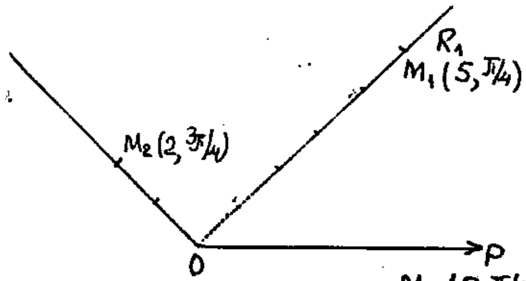
Положение точки $M$ плоскости определяют двумя числами (координатами). Первая координата - полярный радиус $r$ - длина отрезка $OM$, т.е. расстояние точки $M$ от полюса $r=|OM|$. Вторая координата - это полярный угол $\varphi$ - угол между полярной осью и отрезком $OM$.




Для полярных координат приняты следующие интервалы изменения
$0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$ или $-\pi<\varphi\le\pi$.
Для полюса: $r=0$, $\varphi$ -произвольный.
Пример. Построить точки
$M_1(5,\pi/4)$, $M_2(2,3\pi/4)$.
Решение. Строим полярную систему координат. Для этого выбираем полюс - точку $O$, проводим полярную ось $OP$, выбираем единицу масштаба.





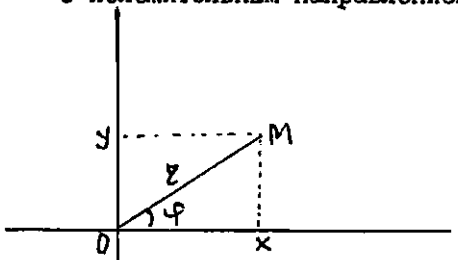



I. Для построения точки $M(r,\varphi)$ в полярной системе координат надо: а) провести луч $OR$ под углом $\varphi$ к полярной оси $OP$; б) отложить на луче $OR$ от полюса $O$ отрезок, длина которого равна $r$.
Для построения точки $M_1(5,\pi/4)$ проводим луч $OR_1$ под углом $\varphi=\pi/4\sim(45^\circ)$ к полярной оси, откладываем на луче $OR_1$ от полюса $O$ отрезок, равный 5 единицам масштаба. Отмечаем точку $M_1(5,\pi/4)$.
Для построения точки $M_2(2,3\pi/4)$ - строим луч $OR_2$ под углом $\varphi=3\pi/4\sim(135^\circ)$ к оси $OP$ и откладываем на луче $OR_2$ от точки $O$ отрезок $OM_2=2$ единицам масштаба. Отмечаем точку $M_2(2,3\pi/4)$.

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ И ПОЛЯРНЫМИ КООРДИНАТАМИ ТОЧКИ M.

Построим декартову систему координат. Совместим полюс $O$ полярной системы с началом координат. Полярную ось совместим с положительным направлением оси $X$. Единицы масштаба в обеих системах координат возьмем одинаковыми. Тогда прямоугольные координаты точки $M(x,y)$ выражаются через полярные координаты $r$ и $\varphi$ по формулам

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi. \qquad (1)$$




Формулы (I) позволяют найти декартовы координаты точки $M$, если известны ее полярные координаты.

Пример. Найти декартовы координаты точек
$M_1(5;\pi/4)$, $M_2(2;5\pi/4)$, $M_3(1;\pi/2)$.

Решение. Применяя формулы (I), найдем
$x_{M_1}=5\cdot\cos\pi/4=5\cdot\frac{\sqrt2}{2}$; $y_{M_1}=5\cdot\sin\pi/4=5\cdot\frac{\sqrt2}{2}$; $M_1(\frac{5\sqrt2}{2},\frac{5\sqrt2}{2})$

$x_{M_2} = 2\cos 5\pi/6 = 2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$; $y_{M_2} = 2\cdot \sin 5\pi/6 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$; $M_2(-\sqrt{3};1)$.

$x_{M_3} = 1\cdot\cos \pi/2 = 1\cdot 0 = 0$; $y_{M_3} = 1\cdot \sin \pi/2 = 1\cdot 1 = 1$; $M_3(0;1)$.

Пусть теперь известны декартовы координаты точки $M(x,y)$. Полярные координаты точки $M(r,\varphi)$ выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}; \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}; \qquad /2/$$

Часто вместо вычисления $tg\,\varphi$ применяют вычисление $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad\qquad /3/$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

Формулы ( I ),(2)( 3 ) получаются из рассмотрения прямоугольного треугольника $OMx$.

Пример 2. Найти полярные координаты точек

$A(2;0)$, $B(0;2)$, $C(-1;1)$

Решение. Применяем формулы ( 2 ) и ( 3 ). $A(2;0)$:

$r_A = \sqrt{2^2+0^2} = 2$; $\sin\varphi = \frac{0}{2}$; $\cos\varphi = \frac{2}{2} = 1$;

по численным значениям синуса и косинуса с учетом их знаков определяем угол $\varphi_A = 0$ . Следовательно, в полярной системе координат : $A(2;0)$. т. $B(0;2)$; $r_B = \sqrt{0^2+2^2} = 2$;

$\sin\varphi = \frac{2}{2} = 1$; $\cos\varphi = \frac{0}{2} = 0$; $\Rightarrow \varphi_B = \pi/2$;

точка $B$ в полярной системе координат : $B(2,\frac{\pi}{2})$. $C(-1;1)$.

$r_C = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Учитывая значения и знаки синуса и косинуса, получим $\varphi = 5\pi/4$

Точка $C$ в полярной системе координат : $C(\sqrt{2}, 5\pi/4)$



## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: "Линия в полярной системе координат".

Пример I. Линия задана уравнением $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ в полярной системе координат (это уравнение лемнискаты).

Требуется: I) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ , придавая $\varphi$ значения через промежуток $\pi/8$
2) привести уравнение линии к уравнению в декартовой системе координат.

Уравнением линии называется уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Входящие в это уравнение координаты произвольной точки линии называются текущими координатами точек этой линии.

Если уравнение линии представляет собой непрерывную функцию, то, построив некоторые точки линии, можно затем соединить их непрерывной линией.

Как известно, в полярной системе координат на плоскости положение точки $M(r,\varphi)$ задается двумя координатами - расстоянием $r$ точки от полюса $O$ и углом $\varphi$ между полярной осью и направлением $OM$ .

Области изменения этих координат

$$0 \le r < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

причем $r$ измеряется в линейных единицах, а $\varphi$ - в угловых, в частности в радианной мере.

Напомним, что углы можно измерять в градусной и радианной мере. I радиан соответствует центральному углу, опирающемуся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

Угол в $360^\circ$ соответствует в радианной мере $2\pi$ радианам, угол $180^\circ$ - $\pi$ радианам, угол $90^\circ$ - $\pi/2$ радианам, угол $45^\circ$ соответствует $\pi/4$ радианам, угол $22{,}5^\circ$ соответствует $\pi/8$ радиана.

Решение.

I). Будем придавать $\varphi$ значения от $0$ через $\pi/8$ до $2\pi$, т.е. значения $\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi/8,\ \varphi_3=\pi/8+\pi/8=\pi/4,\ \varphi_4=\pi/4+\pi/8=3\pi/8,$

и т.д. или в градусной мере $\varphi_1=0^\circ,\ \varphi_2=22{,}5^\circ,\ \varphi_3=45^\circ,\ \varphi_4=67{,}5^\circ$ и т.д.

Вычислим соответствующие значения $r$ по формуле: $r=\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Например $\varphi_1=0,\ r_1=\sqrt{2\cos(2\cdot 0)}=\sqrt{2}$ так как $\cos 0=1$.

Вспомним, что $\cos\pi/4=\sqrt{2}/2,\ \cos\pi/2=0,\ \cos 2\pi=\cos 0=1$

Воспользуемся формулами, характеризующими свойства тригонометрических функций - периодичности $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$ и формулами приведения $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$

Составим таблицу соответствующих значений $\varphi$ и $r$.

Для удобства немного увеличим в ней количество строк.

I строка таблицы - значение $\varphi$ градусной мере, это нам пригодится для построения линии.

II строка таблицы - значение $\varphi$ в радианах.

III строка таблицы - значение $\theta=2\varphi$ в радианах, так в формуле участвует $\cos 2\varphi=\cos\theta$.

IУ строка - значение $\cos\theta$.

У строка - значение $r=\sqrt{2\cos\theta}$.

Так как квадратный корень из отрицательного числа не имеет смысла, то как видно из таблицы, в интервалах $\pi/4<\varphi<3\pi/4$ и $5\pi/4<\varphi<7\pi/4$ точек линии нет.

ТАБЛИЦА

| $\varphi^\circ$ | 0 | 22,5 | 45 | 67,5 | 90 | 112,5 | 135 | 157,5 | 180 | 202,5 | 225 | 247,5 | 270 | 292,5 | 315 | 337,5 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ радиан | $0$ | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $5\pi/8$ | $3\pi/4$ | $7\pi/8$ | $\pi$ | $9\pi/8$ | $5\pi/4$ | $11\pi/8$ | $3\pi/2$ | $13\pi/8$ | $7\pi/4$ | $15\pi/8$ | $2\pi$ |
| $\theta=2\varphi$ радиан | $0$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ | $2\pi$ | $9\pi/4$ | $5\pi/2$ | $11\pi/4$ | $3\pi$ | $13\pi/4$ | $7\pi/2$ | $15\pi/4$ | $4\pi$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| $r$ | $\sqrt{2}$ | $1$ | $0$ | – | – | – | $0$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $1$ | $0$ | – | – | – | $0$ | $1$ | $\sqrt{2}$ |

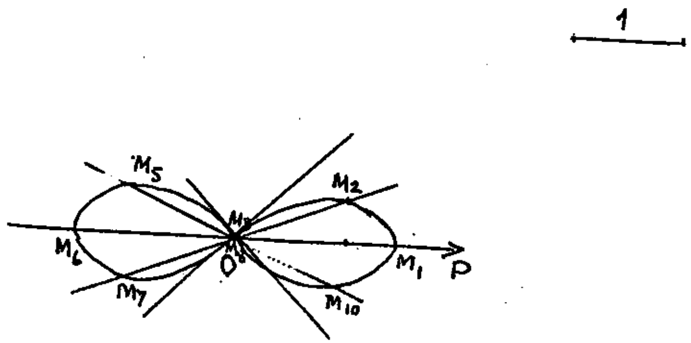


ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ

Построим полярную систему координат: полюс $O$ и полярную ось. Выберем масштаб для $r$. Будем строить лучи $OM_1$, $OM_2$, $OM_3\ \cdots$, составляющие с полярной осью углы $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=22{,}5^\circ$, $\varphi_3=45^\circ\ldots$. Углы отсчитываются от полярной оси против часовой стрелки. На лучах будем откладывать соответствующие значение $r$ (в масштабе), на луче $OM_1$: $r_1=\sqrt{2}$, на луче $OM_2$: $r_2=1$ на луче $OM_3$: $r_3=0$ и так далее. Получим точки лемнискаты $M_1(\sqrt{2},0),\ M_2(1,\pi/8),\ M_3(0,\pi/4)\ldots$

Соединим точки плавной линией.

Ч е р т е ж - г р а ф и к лемнискаты




2). Привести уравнение линии к уравнению в декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс - с полярной осью.

Воспользуемся формулами перехода от полярной системы координат к декартовой.

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Наше уравнение $r=\sqrt{2\cos 2\varphi}$

Из тригонометрии: $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi.$

Тогда $\cos 2\varphi = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Уравнение:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} \quad \text{или}$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{2(x^2-y^2)}$$

Итак, уравнение лемнискаты в декартовой системе координат в неявной форме: $x^2+y^2 = \sqrt{2(x^2-y^2)}$

Пример 2.

I). Построить линию $r = 3\varphi$ (спираль Архимеда) по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая $\varphi$ значения через промежуток $\pi/8$.

2). Привести уравнение линии к уравнению в декартовой системе координат.

Решение.

I). Построим таблицу. Она будет содержать 3 строки.

I строка - значение $\varphi$ в градусах (для построения линии).

II строка - значение $\varphi$ в радианах.

III строка - значение $r = 3\varphi$.

При вычислениях будем пользоваться значением $\pi \approx 3.14$, $\pi/2 \approx 1.57$, $\pi/4 \approx 0.78$, $\pi/8 \approx 0.39$...

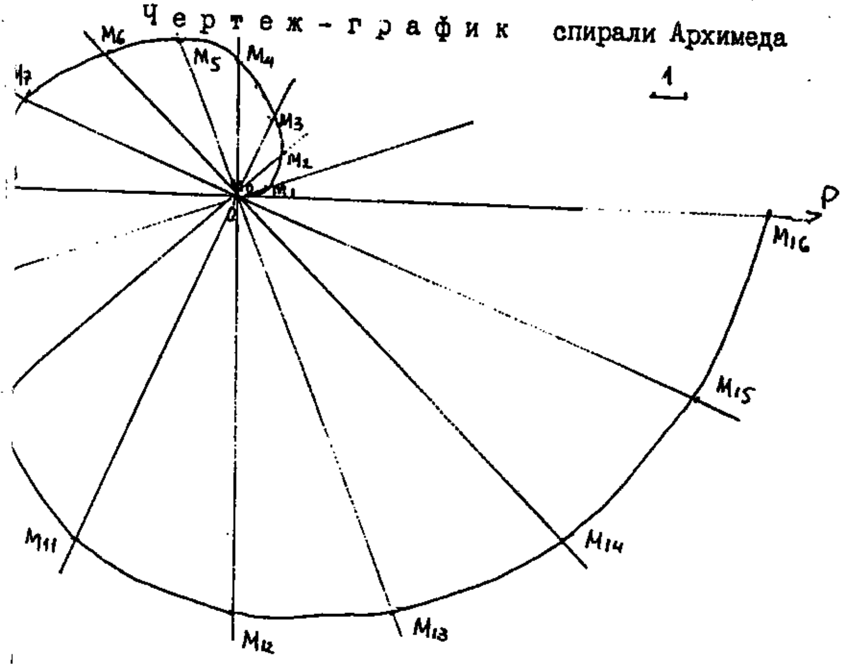
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi^0$ | 0 | 22.5 | 45 | 67.5 | 90 | 112.5 | 135 | 157.5 | 180 | 202.5 | 225 | 247.5 | 270 | 292.5 | 315 | 332.5 | 360 |
| $\varphi$ радиан | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $5\pi/8$ | $3\pi/4$ | $7\pi/8$ | $\pi$ | $9\pi/8$ | $5\pi/4$ | $11\pi/4$ | $3\pi/2$ | $13\pi/8$ | $7\pi/4$ | $15\pi/8$ | $2\pi$ |
| $r$ | 0 | 1.13 | 2.26 | 3.39 | 4.71 | 5.56 | 6.78 | 8.29 | 9.42 | 10.55 | 11.3 | 13.0 | 14.13 | 15.26 | 16.58 | 17.71 | 18.84 |

Замечаем, что с возрастанием $\varphi$ возрастает и полярный радиус $r$. Строим полярную ось. Выбираем единицу масштаба для $r$. Проводим лучи под углами 0, 22,5°, 45°, 67,5° и откладываем на них значение $r$ сообразуясь с таблицей. Строим точки $M_1(1.13; \pi/8)$, $M_2(2.26; \pi/4)$, $M_3(3.39; 3\pi/8)$ и т.д., которые соединяем плавной линией.

Замечание: подробно построение описано в предыдущем примере.



Ч е р т е ж - г р а ф и к спирали Архимеда




2). Привести уравнение линии $r = 3\varphi$ к уравнению в декартовой системе координат. Воспользуемся формулами перехода от полярной системы координат к декартовой

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} y/x.$$

Получим: $\sqrt{x^2+y^2} = 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, или $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right)$

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right)$$

Замечание: Последнее уравнение спирали Архимеда в декартовой системе координат в неявной форме позволяет избежать неопределенности, когда $x_{M_0} = 0$ и $y_{M_0} = 0$.

## ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1). Рассмотрим декартову система координат.

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ (1)

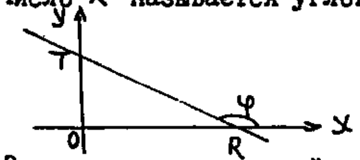
Отметим, что переменные $x$ и $y$ находятся в этом уравнении в первой степени – говорят, что прямая задается линейным уравнением.

2). Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

В случае, если $B \neq 0$, уравнение ( I ) можно преобразовать

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}; \quad -\frac{A}{B}=k; \; -\frac{C}{B}=b \Rightarrow y=kx+b \quad (2)$$

Число $k$ называется угловым коэффициентом прямой.




Выясним геометрический смысл $k$ и $b$.

Найдем координаты точки $T$ –точки пересечения прямой с осью $y$

Подставим в уравнение ( 2 ) $x_T=0; \Rightarrow y_T=k\cdot 0+b \Rightarrow y_T=b;$

Найдем координаты точки $R$ –точки пересечения прямой с осью $x$

Подставим в уравнение ( 2 ) $y_R=0; \Rightarrow 0=k\cdot x_R+b \Rightarrow x_R=-b/k;$

Обозначим через $\varphi$ угол между осью $x$ и прямой (имея в виду угол, на который надо повернуть ось $x$ вокруг точки $R$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки).

Угол $\angle ORT=\pi-\varphi$, $tg\angle ORT=\frac{OT}{OR}$, $OT=y_T=b$, $OR=x_R=-b/k;$

$$tg(\pi-\varphi)=\frac{b}{-b/k}=-k; \quad tg\varphi=-tg(\pi-\varphi)=k;$$
$$\Rightarrow tg\varphi=k;$$

Итак, $k$ –это тангенс угла наклона прямой к оси $x$.

$b$ – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси $y$.

Если $b>0$, то прямая пересекает ось $y$ выше оси $x$ (на положительной полуоси $y$ ).

Если $b<0$, то точка пересечения ниже оси $x$ (на отрицательной полуоси $y$ ).

Если $k>0$, то $tg\varphi>0$, угол $\varphi$ – острый, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

Если $k<0$, то $tg\varphi<0$, угол $\varphi$ – тупой, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$

Задавая $k$ и $b$ разные значения, получим разные прямые

Пример I. Составить уравнение прямой, имеющей угол наклона $\varphi=60^\circ$



и отсекающей на оси $y$ отрезок $b=-5$;

Решение: $k=tg\,60^\circ=\sqrt{3}$;

Уравнение прямой $y=\sqrt{3}\cdot x-5$;

Пример 2. Определить угол наклона и отрезок, отсекаемый прямой $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$ на оси $y$.

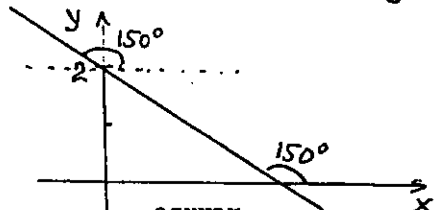
Решение. Сравнивая заданное уравнение с уравнением ( 2 ) получим $b=2$, $tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\varphi=\frac{5\pi}{6}$ или $150^\circ$;

Ответ: угол наклона прямой $\varphi=150^\circ$ (или $5\pi/6$ ), она отсекает отрезок на оси $y$ выше оси $x$ равный 2.

Пример 3. Построить прямую $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$;

Решение. Отложим на оси $y$ выше оси $x$ отрезок, равный 2 и проведем прямую под углом $150^\circ$ к оси $x$.




3). Частные случаи уравнения прямой.

1. Если в уравнении ( 2 ) $k=0$, то $tg\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \Rightarrow y=b$ следовательно, прямая параллельна оси $x$ и проходит выше или ниже ее на расстоянии, равном $b$ (см. стр 10)

2. Пусть прямая параллельна оси $y$. Тогда для нее не существует уравнение вида ( 2 ). Воспользуемся уравнением вида (I )

$$Ax+By+C=0$$

В этом случае $B=0$ и уравнение имеет вид $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}$; Пусть $-\frac{C}{A}=a \Rightarrow x=a$;

Эта прямая $x=a$ проходит параллельно оси $y$ левее ее (при $a<0$) или правее ее (при $a>0$ ).

3. Уравнение оси $x$ есть: $y=0$.

Уравнение оси $y$ есть: $x=0$.

4). Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (например через точку $M(x_M, y_M)$ в заданном направлении (пусть $tg\varphi=k\neq 0$ ). Так как точка лежит на прямой, то значит, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Подставим их в уравнение ( 2 ) $y_M=kx_M+b$.

Отсюда $b=y_M-kx_M$. Подставим это значение в уравнение

$$\rightarrow y=kx+y_M-kx_M;$$

Преобразуем: $y-y_M=k(x-x_M)$;

5) Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки: $A(x_A,y_A)$ и $B(x_B,y_B)$.

Для его получения воспользуемся уравнением ( 3 ).
Прямая проходит через точку $A(x_A,y_A)$

$$y-y_A=k(x-x_A). \qquad (3')$$

Точка $B$ лежит на прямой, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению ( 3' )

$$y_B-y_A=k(x_B-x_A),$$

Отсюда найдем величину $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
и подставим в уравнение ( 3' ):

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$$

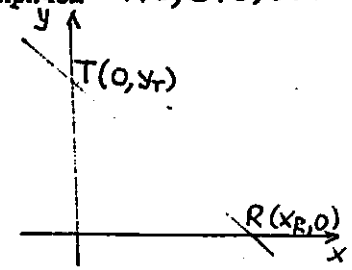
или:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \qquad (4)$$

Замечание. Если в уравнении ( 4 ) один из знаменателей обращается в нуль, то это значит, что соответствующий числитель тоже следует приравнять нулю.

6) ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ОСЯМИ КООРДИНАТ

Дано уравнение прямой $Ax+By+C=0$
причем $A\neq0, B\neq0, C\neq0$




Ордината точки $R$ – точки пересечения прямой с осью $x$ равна нулю (смотри рисунок).
Подставим это значение в уравнени
и найдем абсциссу точки $R$: $x_R$ .

$$A\cdot x_R+B\cdot 0+C=0$$
$$x_R=-C/A\,;$$

Итак координаты точки $R(-C/A, 0)$.
Точка $T$ –точка пересечения прямой с осью $y$ имеет абсциссу $x_T=0$ . Подставим это значение в уравнение и найдем

$$A\cdot 0+B\cdot y_T+C=0 \Rightarrow y_T=-C/B\,;$$

Итак, координаты точки $T(0,-C/B)$.



7) Уравнение прямой в отрезках

Пусть дано общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$,
причем $A\neq0, B\neq0, C\neq0$.
тогда $Ax+By=-C$, $\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1$
Обозначим $-\frac{C}{A}=a, -\frac{C}{B}=b \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$
$a$ и $b$ - отрезки, отсекаемые прямой (5)
на осях координат.

8) Угол между прямыми

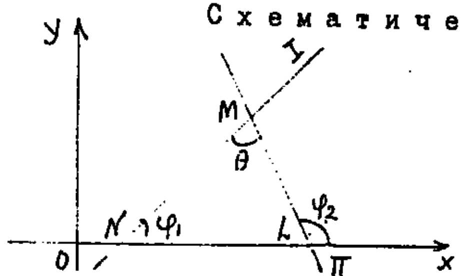
Пусть заданы прямые их общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad (\mathrm{I})$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad (\mathrm{II})$$

Эти уравнения можно привести к виду уравнений с угловым коэффициентом ( 2 ).
Если $B_1\neq0, C_1\neq0, B_2\neq0, C_2\neq0$,
Тогда ( I ): уравнения прямых:

$$(\mathrm{I})\quad y=k_1x+b_1,\ \text{где } k_1=-\frac{A_1}{B_1},\ b_1=-\frac{C_1}{B_1},$$
$$(\mathrm{II}):\ y=k_2x+b_2,\ \text{где } k_2=-\frac{A_2}{B_2},\ b_2=-\frac{C_2}{B_2}.$$

Схематический чертеж




Нам надо определить угол $\theta$ между прямыми I и II, их угловые коэффициенты $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$.
Для треугольника $MNL$ угол $\varphi_2$ - внешний. Из геометрии известн $\varphi_2=\varphi_1+\theta$ , отсюда $\theta=\varphi_2-\varphi_1$ . По известной формуле тригонометрии

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}. \qquad (6)$$

Замечание I. Если не указан порядок, в котором рассматриваются прямые, то его можно установить произвольно. Изменение порядка влечет измен ние знака тангенса угла.

$$\theta = arctg\,\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Замечание 2. Если одна из прямых параллельна оси $x$, то ее угловой коэффициент равен нулю и угол между прямыми равен углу наклона второй прямой.

Замечание 3. Если одна из прямых (пусть первая) параллельна оси $y$, то формула ( 5 ) не имеет смысла. Тогда угол между прямыми $\theta = \varphi_2 - \pi/2$ (или $-\theta$) или в градусах $\theta^\circ = \varphi_2^\circ - 90^\circ$ (или $-\theta$)

### 9) Условие параллельности двух прямых

Оно заключается в равенстве их углов наклона, т.е. в равенстве угловых коэффициентов

$$k_1 = k_2 \qquad (7)$$

Если прямые заданы в общем виде ( I ), то подставив вместо $k_1$ и $k_2$ их выражения, получим условие параллельности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (7')$$

### 10) Условие перпендикулярности двух прямых

Если прямые перпендикулярны, то $ctg\,\theta = ctg\,\pi/2 = 0$

$$ctg\,\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}; \quad ctg\,\frac{\pi}{2} = 0,$$

Значит $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$

Отсюда $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ $\qquad (8)$

или, если прямые заданы в общем виде: $-\dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{B_1}{A_1}$

или:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (8')$$

### 11) Точка пересечения двух прямых

Даны 2 прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad ( I )$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad ( II )$$

Они не параллельны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

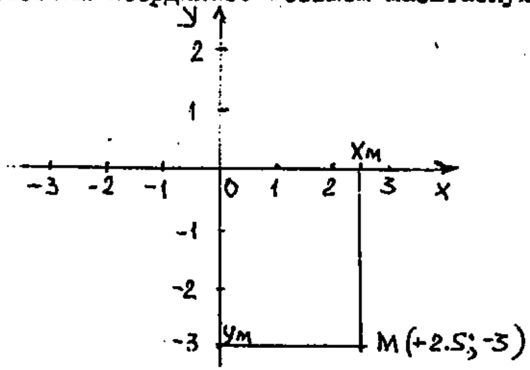
Точка пересечения принадлежит и первой и второй прямым. Значит, ее координаты можно найти, решив систему уравнений ( I, II )



Пример решения контрольного задания.

I. а) Построить точку $M(+2.5; -3)$ в декартовой системе координат на плоскости.

Решение. Проведем под углом $90^\circ$ ось $x$ и ось $y$ декартовой системы координат. Возьмем масштабную единицу:



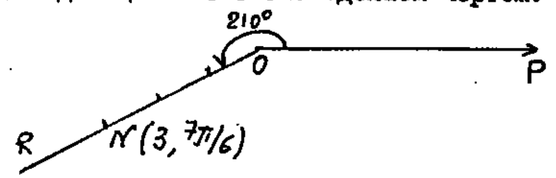

Отметим несколько значений на положительных и отрицательных полуосях $x$ и $y$. Отметим на оси $x$ точку $x_M = 2.5$ на оси $y$ точку $y_M = -3$.

Восставим в точке $x_M$ перпендикуляр к оси $x$, восставим в точке $y_M$ перпендикуляр к оси $y$. В точке пересечения этих перпендикуляров находится точка $M(2.5; -3)$.

б) Построить точку $N(3; 7\pi/6)$ в полярной системе координат.

Решение. Выберем полюс - точку $O$, проведем полярную ось $OP$. Выберем единицу масштаба. Проведем луч $OR$ под углом $\varphi = 7\pi/6$ (в градусной мере это $7/6 \cdot 180^\circ = 210^\circ$).

Отложим на луче $OR$ от полюса $O$ отрезок, длина которого равна 3 единицам масштаба. Сделаем чертеж. 1




II. Дано уравнение прямой в декартовой системе координат

$$4x - 5y - 10 = 0$$

и точки $M(-1; 1.5)$ и $N(4; 3)$.

1. Привести уравнение прямой к уравнению с угловым коэффициентом

$5y = 4x - 10; \quad y = 4/5\,x - 2.$

Угловой коэффициент $k = \frac{4}{5}$; $tg\varphi = \frac{4}{5}$

Угол наклона прямой к оси $x$: $\varphi = arctg\,4/5.$

2. Определить отрезки, которая прямая отсекает на осях $X$ и $Y$
Из уравнения ( 2 ) сразу определяем отрезок, который прямая отсекает на оси $Y$: $b=-2$ , т.е. прямая пересекает ось $y$ ниже оси $x$ на 2 единицы. Чтобы определить отрезок, который прямая отсекает на оси $x$, положим в уравнении ( I ) $y_T=0$, тогда $4\cdot x_T-5\cdot 0-10=0$, $x_T=\frac{10}{4}=2.5$;
т.е. прямая пересекает ось $X$ на 2,5 единицы правее оси $Y$ .
Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{2.5}+\frac{y}{-2}=1$;

3. Написать уравнение второй прямой, проходящей через точку $M(-1;1.5)$ и параллельной данной прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку $M$: $y-y_M=k_2(x-x_M)$.
Так как прямая параллельна данной прямой, то $k_2=k_1=\frac{4}{5}$.
Уравнение второй прямой $y-1.5=\frac{4}{5}(x-(-1)) \Rightarrow y=\frac{4}{5}x+2.3$;

Эта прямая проходит через точку на оси $Y$ равную $2.3$ , т.е. выше оси $X$ на $2.3$ .

4. Написать уравнение третьей прямой, проходящей через точку $M$ и перпендикулярной данной прямой.
Уравнение прямой $y-1.5=k_3(x+1)$.
Условие перпендикулярности $k_3=-\frac{1}{k_1}$; $k_3=-\frac{5}{4}$;
Подставим вместо $k_3$ это значение $\to y-1.5=-\frac{5}{4}(x+1)$,
или: $y=-1.25x+0.25$.
Третья прямая проходит перпендикулярно первой через точку на оси $Y$ на $0.25$ выше оси $X$ .

5. Написать уравнение четвертой прямой, проходящей через точки $M(-1;1.5)$ и $N(4;3)$: $\frac{x-x_M}{x_N-x_M}=\frac{y-y_M}{y_N-y_M}$.
Подставим вместо $x_M, x_N, y_M, y_N$ их значения: $\frac{x+1}{4+1}=\frac{y-1.5}{3-1.5}$
преобразуем: $y=0.3x+1.8$
или $3x-10y+18=0$

6. Найти точку пересечения первой и четвертой прямых.
Так как точка пересечения принадлежит обеим прямым, то её координаты являются решениями системы

$$\begin{cases}4x-5y-10=0\\3x-10y+18=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}4x-5y=10\\3x-10y=-18\end{cases}$$

Будем решать систему уравнений.
Умножим первое уравнение системы на /-2/ и сложим со вторым уравнением.



$-8x+3x+10y-10y=-20-18$
$-5x=-38$

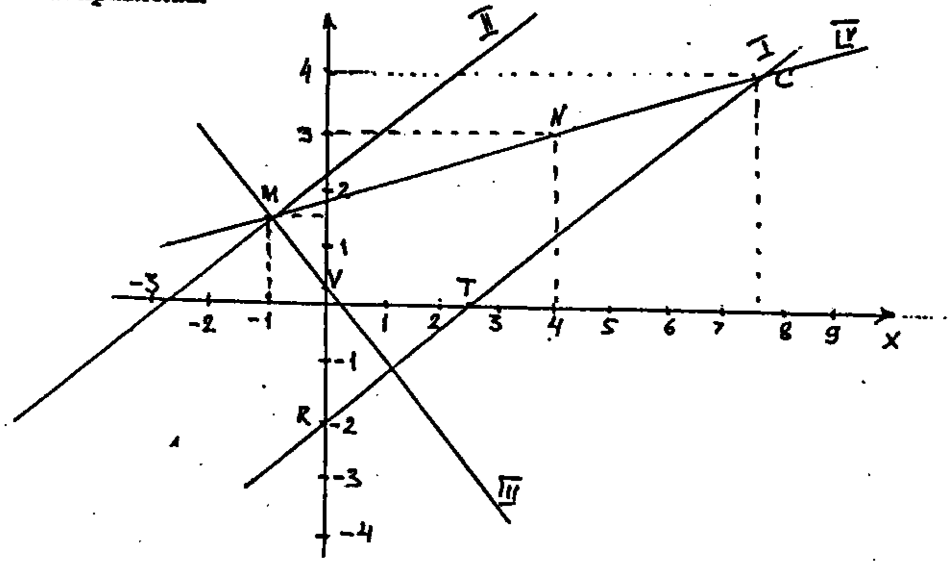
Абсцисса точки пересечения $X_C=\frac{38}{5}=7.6$.

Подставим $X_C$ в первое уравнение системы и найдем ординату точки пересечения $y_c$ .

$4\cdot\frac{38}{5}-5y_c=10$

$y_c=\frac{102}{25}=4.08$. $\to$ т $C(7.6;4.08)$

7. Построить все прямые.
Построим оси координат $X$ и $Y$ под углом $90^{\circ}$. Отметим на них положительные направления. Выберем масштабную единицу. Отметим несколько значений на осях $X$ и $Y$ в положительном и отрицательном направлении



I прямую $y=\frac{4}{5}x-2$ или $\frac{x}{2.5}+\frac{y}{-2}=1$ построим, пользуясь знанием отрезков, которые прямая отсекает на оси $x$: $x_T=2.5$ и оси $y$: $y_R=-2$.
Через точки $T$ и $R$ проводим прямую I. II прямую $y=\frac{4}{5}x+2.3$ построим параллельно прямой I через точку $M(-1;1.5)$.

Чтобы точно провести прямую, воспользуем точкой на оси $y$: $y=2.3$.
III прямую $y=-1.25x+0.25$ проведем через точку $M(-1;1.5)$ перпендикулярно I-ой прямой. Чтобы точно ее провести, воспользуемся точкой $V$ на оси $y$; $y_V=0.25$
IV прямую проведем через точки $M(-1;1.5)$ и $N(4;3)$
(Построим точку $N(4;3)$). Эта прямая и I-я прямая должны пройти через точку $C(7.6;4.08)$



## МАТРИЦЫ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1/. Матрицей размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из "$m$" строк и "$n$" столбцов. Обозначается $A_{m\times n}$ или $A$.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

асто МАТРИЦА обозначается

$$A=\{a_{ij}\},\ i=1\dots m,\ j=1\dots n.$$

исла $a_{ij}\ (i=1\dots m,\ j=1\dots n)$ азываются элементами матрицы, здесь $i$ - номер строки, $j$ - номер столбца, на пересечении которых стоит элемент $a_{ij}$. сли $m=n$, то матрица называется квадратной. Матрица азмерности $1\times n$ называется вектором - строкой, ее вид:

$$A_{1\times n}=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$$

трица размерности $m\times 1$ называется вектором - столбцом, ее вид:

$$A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

адратная матрица вида

$$A_{m\times m}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

ывается диагональной. У нее все элементы, кроме элементов на вной диагонали, равны $0$.

Если все элементы на главной диагонали $a_i = 1$ $(i=1 \dots m)$, то диагональная матрица называется единичной и обозначается $E$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Если у матрицы $A$ строки заменить соответствующими столбцами, то получим транспонированную матрицу $A^T$.
Если матрица $A$ имеет размерность $m \times n$, то транспонированная матрица $A^T$ имеет размерность $n \times m$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2/. Матрицы $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ считаются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и соответствующие элементы их равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

3/. Суммой двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинаковой размерности называется матрица $C = \{c_{ij}\}$ той же размерности, у которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

4/. Произведением матрицы $A = \{a_{ij}\}$ на число $\alpha$ называется матрица $C$, элементы которой равны произведению элементов матрицы $A$ на число $\alpha$

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}.$$

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$$

5/. Произведение матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ может быть получено, если число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}.$$



Произведением матриц $A$ и $B$ называется матрица $C$, элементы которой получаются по следующему правилу

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

т.е. чтобы получить элемент $c_{ij}$ надо сложить произведения элементов $i$ -ой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$ -ого столбца матрицы $B$. Матрица $C$ имеет число строк, равное числу строк матрицы $A$ и число столбцов, равное числу столбцов матрицы $B$.

Пример:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2}$$

$$c_{11} = 3\cdot2 + 5\cdot6 + 8\cdot0 = 6 + 30 + 0 = 36$$
$$c_{12} = 3\cdot(-1) + 5\cdot(-3) + 8\cdot1 = -3 - 15 + 8 = -10$$
$$c_{21} = 1\cdot2 + (-4)\cdot6 + 7\cdot0 = 2 - 24 + 0 = -22$$
$$c_{22} = 1\cdot(-1) + (-4)\cdot(-3) + 7\cdot1 = -1 + 12 + 7 = 18$$

$$C = \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ -22 & 18 \end{pmatrix}$$

Свойства произведения матриц:

Если существует $A \cdot B$, то не обязательно существует $B \cdot A$.
Если существует $A \cdot B$ и $B \cdot A$, то обычно $A \cdot B \neq B \cdot A$, но может быть $A \cdot B = B \cdot A$.
$A \cdot E = E \cdot A = A$.

## ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1/. Определители второго порядка.

Пусть дана квадратная числовая матрица $A_{2\times2}$

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

Число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ называется определителем второго порядка матрицы $A$. Обозначается он: $\Delta$ или $\Delta_2$ или $D$ или $\det A$

$$D=\Delta=\Delta_2=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя. Числа $a_{11}$ и $a_{22}$ лежат на главной диагонали, числа $a_{12}$ и $a_{21}$ – на побочной диагонали

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 5\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-2\cdot3-5\cdot(-4)=-6+20=14.$$

2/. Определители третьего порядка.

Пусть дана квадратная числовая матрица размерности 3 x 3; $A_{33}$

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$



1. Минором $M_{ik}$ элемента $a_{ik}$ называется определитель второго порядка, полученный из определителя $\Delta_3$ вычеркиванием " $i$ -ой строки и " $j$"-го столбца. В частности Миноры $M_{1k}$ – это определители второго порядка, полученные из $\Delta_3$ вычеркиванием первой строки и " $K$ " -го столбца.

Например:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}.$$

Алгебраическим дополнением $A_{ik}$ элемента $a_{ik}$ называется число, определяемое равенством

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}.$$

2. Значение определителя третьего порядка находится как сумма произведений элементов любой строки /или любого столбца/ на их алгебраические дополнения.

Например:

$$\Delta_3=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

где

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}.$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}\cdot a_{33}-a_{31}\cdot a_{23}).$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{22}.$$

3. Для произвольного $n$, определитель $n$ -го порядка есть:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot A_{ik}.$$

где $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$, а миноры $M_{ik}$, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из $\Delta_n$

вычеркиванием $i$ -ой строки и $k$ -ого столбца.
Например:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&5&2\\0&3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-1\\2&1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&3\\1&2\end{vmatrix}=4\cdot(3\cdot1-2\cdot(-1))-5\cdot(0\cdot1-1\cdot(-1))+$$

$$+2\cdot(0\cdot2-1\cdot3)=4\cdot5-5\cdot1-2\cdot3=9$$

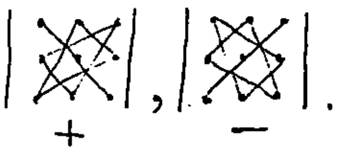
Нетрудно убедиться, что тот же самый результат получится разложением определителя по любой другой строке / или столбцу/.

4. Определитель третьего порядка $\Delta_3$ можно вычислять по правилу треугольников / правилу Саррюса/.

$$\Delta_3=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+$$

$$+a_{12}\cdot a_{21}a_{33}+a_{23}a_{32}a_{11}).$$

Схематическая запись этого правила:



Например:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&5&2\\0&3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=4\cdot3\cdot1+5\cdot(-1)\cdot1+0\cdot2\cdot2-(1\cdot3\cdot2+2\cdot(-1)\cdot4+0\cdot5\cdot1)=$$

$$=12-5+0-6+8-0=9.$$



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

1. Сумма произведений любой строки /или столбца/ определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю. Иными словами определитель можно вычислять разложением по любой строке /или столбцу/. Удобно выбирать ту строку /или столбец/, которая содержит элементы, равные нулю. Это сокращает количество вычислений.

2. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот, т.е. при транспонировании матрицы, ее определитель не изменяется.

3. Если поменять местами две строки /или два столбца/, то определитель изменит знак на противоположный.

4. Определитель с двумя одинаковыми строками /или столбцами/ равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки /или столбца/ определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

6. Если все элементы какой-либо строки / или столбца/ определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

7. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов
Св соответственно пропорциональны, равен нулю.
1.
2. 8. Если каждый элемент какой либо строки /столбца/ определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующая
3. строка/столбец/ состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.

9. Определитель не изменится, если ко всем элементам какой-либо строки /столбца/ прибавить соответствующие элементы другой параллельной строки /столбца/, умноженные на одно и то же число.

Эти свойства позволяют упростить вычисление определителя, сделав в какой-нибудь строке/или столбце/ все элементы, кроме одного, равными нулю.

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ К Р А М Е Р А

Пусть дана система двух уравнений первой степени относительно переменных $x_1$ и $x_2$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Числа $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$ - коэффициенты при неизвестных $x_1$ и $x_2$. Числа $b_1$ и $b_2$ - свободные члены.
Пара чисел $\alpha$ и $\beta$ называется решением системы, если при подстановке их в систему вместо $x_1$ и $x_2$ получим арифметические тождества.

Для решения системы умножим первое уравнение на $a_{22}$, а второе на $(-a_{12})$ и сложим. Получим:

$$(a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12})\cdot x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}.$$

Затем умножим первое уравнение на $-a_{21}$, а второе на $a_{11}$ и сложим. Получим:

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\cdot x_2 = a_{11}\cdot b_2 - b_1\cdot a_{21}.$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21}\cdot b_1.$$

Определитель $\Delta$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется главным определителем системы, а определители $\Delta_1$ и $\Delta_2$ называются вспомогательными определителями. Они получаются из основного определителя путем замены в нем $i$ -ого столбца столбцом свободных членов исходной системы.



Итак, мы привели исходную систему к виду

$$\begin{cases} \Delta\cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta\cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Возможны такие случаи:

1. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

2. Пусть $\Delta = 0$, тогда возможны два варианта:

а/ если хотя бы один из $\Delta_1$ или $\Delta_2$ не равен нулю, то система не имеет решения /несовместна/. Если, например, $\Delta_1 \neq 0$, то равенство $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{0}$ не имеет смысла.

б/ если $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений. При этом получается, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы пропорциональны, то есть второе уравнение системы получается из первого умножением на общий множитель всех членов первого уравнения. В системе остается лишь одно существенное уравнение, а другое является его следствием. Возьмем, например, уравнение

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений, которые получаем так: задаем какое-нибудь значение $x_1 = \alpha$ и из уравнения найдем соответствующее ему значение

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{11}\cdot\alpha}{a_{12}}$$

и так далее.

Замечание. Предполагается, что при рассмотрении этих случаев каждое отдельно взятое уравнение имеет решение.

Пример решения системы линейных уравнений, используя формулу Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

Составим и вычислим основной определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Будем его вычислять, используя разложение по третьей строке, так как она содержит нулевой элемент и это упростит вычисления

$$\Delta = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+7\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot(2\cdot(-5)-3\cdot(-3)) + 7\cdot(2\cdot4+3\cdot(-1)) =$$

$$= -2(-10+9)+7\cdot(8+3) = 2+77=79.$$

сновной определитель системы не равен $0$ $(\Delta \neq 0)$, следова-тельно система имеет единственное решение.



Для нахождения решения составим вспомогательные определители $\Delta_i$, которые получаются из основного определителя путем замены в нем $i$ -го столбца столбцом свободных членов исходной системы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta_1$ вычислим используя разложение по первой строке.

$$\Delta_1 = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 17 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+(-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(28+10)+1(-56+85) -$$

$$-3\cdot(-16-68) = 114+29+252 = 395.$$

Определитель $\Delta_2$ вычислим, используя разложение по первому столбцу.

$$\Delta_2 = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-8 & -5\\ 17 & 7\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 17 & 7\end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -3\\ -8 & -5\end{vmatrix} = 2\left(-8\cdot7-17\cdot(-5)\right)-3\cdot\left(3\cdot7-17\cdot(-3)\right)+0=$$

$$= 58-216=-158$$

Определитель $\Delta_3$ вычислим так же, используя разложение по первому столбцу.

$$\Delta_3 = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -8\\ 2 & 17\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 17\end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -8\end{vmatrix} = 2\cdot\left(4\cdot17-(-8)\cdot2\right)-3\cdot\left(1\cdot17-2\cdot3\right)+0=$$

$$= 2\cdot84-3\cdot(-23)=168+69=237.$$

Решение системы получаем по формулам Крамера.

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1,2,3.$$

то есть

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{395}{79}=5$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{158}{79}=2$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{237}{79}=3.$$

Итак решение $x_1=5$ $x_2=2$ $x_3=3$.



## Тема 1. Элементы векторной алгебры

### Определения:

1. Вектором или векторной величиной называется направленный отрезок. Векторная величина имеет две характеристики – длину и направление.

   Обозначается: $\vec{a}$ или $\vec{AB}$. Здесь A - начало, B - конец вектора.
2. Длиной или модулем вектора (обозначается-$|\vec{a}|$, $|\vec{AB}|$) называется расстояние между его началом и концом.
3. Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой, или лежат на ней.
4. Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.
5. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.
6. Векторы считаем свободными, т.е. их можно переносить параллельно самим себе.

### Линейные операции над векторами.

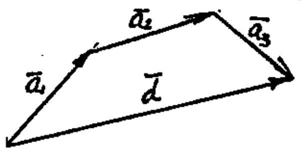
1. Умножение вектора на число.

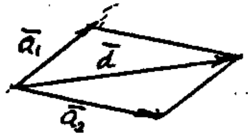
   Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, модуль которого равен $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно ему, если $\lambda<0$.
2. Сложение векторов.

Суммой векторов $\vec{d}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$

называется вектор $\vec{d}$, начало которого находится в начале первого вектора $\vec{a}_1$, а конец – в конце последнего вектора $\vec{a}_n$ ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов. Это правило сложения называется правилом замыкания ломаной. Сумму двух векторов $\vec{d}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$ можно получить как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, приведенных к одному началу. Начало вектора $\vec{d}$ совпадает с общим началом векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

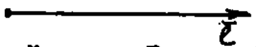
$$\vec{d} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3.$$




Проекция вектора $\vec{a}$ на ось $l$.

1. Осью $l$ называется полупрямая с заданным на ней направлением,
принимаемым за положительное.




Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось $l$ называется число $\Pi P_l \vec{a}$, равное $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi (0 \le \varphi \le \pi)$ - угол между положительным направлением оси $l$ и направлением вектора $\vec{a}$.

$$\Pi P_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

3. В декартовой системе координат в пространстве (x, y, z) координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат x, y, z. Они обозначаются соответственно $a_x, a_y, a_z$. Обозначается $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ Если координаты начала вектора $A\vec{B}$ есть $(x_A, y_A, z_A)$, а координаты точки В – конца вектора $A\vec{B}$ есть $x_B, y_B, z_B$, то координаты вектора АВ есть $x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A$. Записываем так АВ=$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Нулевой вектор $\bar{0}$ имеет нулевые координаты $\bar{0} = (0, 0, 0)$.
4. Обычно векторы, направленные по осям декартовой системы координат x, y, z и имеющие длину, равную единице, обозначают соответственно $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Они называются ортами.



Вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ можно представить в виде суммы векторов, направленных по осям координат и имеющих длины, равные соответствующим проекциям.

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

5. Линейные операции над векторами имеют свойства, по форме аналогичные свойствам умножения и сложения чисел: переместительный и сочетательный законы.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это векторы, $\alpha$ и $\beta$ - числа, то

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \alpha$

$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

$\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{a} - \vec{a} = 0$

$1\vec{a} = \vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z),$$

$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha a_x + \alpha b_x, \alpha a_y + \alpha b_y, \alpha a_z + \alpha b_z)$ и т. д..

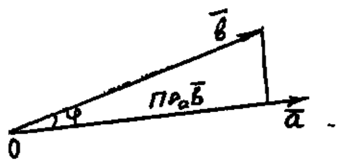
6. Длина (модуль) вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в декартовой системе координат определяется по формуле
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Эту формулу получают как длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с длиной ребер $a_x, a_y, a_z$.

7. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

где $\varphi$ - меньший угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $0 \le \varphi \le \pi$.




Отметим, что $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $a$, т.е. $\Pi P_a \vec{b}$.

Так же $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = \Pi P_b\vec{a}$, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot \Pi P_a\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \Pi P_b\vec{a}$.

Основные свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}(\alpha\vec{b})$

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, т.к. $\cos\varphi = \cos 0 = 1$. Это произведение называется скалярным квадратом. Следовательно: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

5. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, $\vec{a}\perp\vec{b}$, то
$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

6 Из основного определения найдем косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тем самым определим угол между ними

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

7. Пусть $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - единичные орты по осям координат $x, y, z$. Так как в декартовой системе координат оси $x, y, z$ взаимно перпендикулярны, то и векторы $\vec{i}\perp\vec{j}, \vec{i}\perp\vec{k}, \vec{j}\perp\vec{k}$, следовательно

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0, \vec{i}\cdot\vec{k} = 0, \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

по свойству 4) $\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$, $\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$,

$\vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$.

8. Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, т.е. $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$, а $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, т.е. $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$.

Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}) =$$



$$a_xb_x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+a_x\cdot b_y\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\cdot\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}+$$
$$a_yb_z\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\cdot\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\cdot\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\cdot\vec{k}\cdot\vec{k} =$$
$$= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Итак, скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме парных произведений координат по одинаковым осям.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

9. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, следовательно

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z = 0$$

10. Условие параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Если $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, где $\alpha$ - число, то проекции на оси координат равны

$a_x = \alpha b_x, a_y = \alpha b_y, a_z = \alpha b_z$.

$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ - это и есть искомое условие параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

11. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_xa_x+a_ya_y+a_za_z = a_x^2+a_y^2+a_z^2$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\quad,\qquad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}.$$

12. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

13. Обозначим через $\alpha, \beta, \gamma$ - углы, которые образует вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с осями координат $x, y, z$ соответственно (или, что то же с векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$):

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

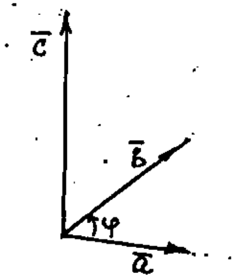
$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Величины $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

14. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$
2. $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$, т.е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, построенной на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Вектор $\vec{c}$ направлен относительно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так же, как ось z относительно осей x и y, то есть, если смотреть из конца вектора $\vec{c}$, то кратчайшее движение от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет против часовой стрелки.




Геометрические свойства векторного произведения.

1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.
2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общую точку приложения, то модуль вектора, являющегося их векторным произведением, равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Алгебраические свойства векторного произведения.

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, это следует из третьего условия, которому удовлетворяет векторное произведение.




2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, где $\lambda$ - число.
   $\vec{a}\times\lambda\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$
   $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}$
4. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат, то
   $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$
   $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$ и т.д.
   $\vec{i}\times\vec{i} = 0, \vec{j}\times\vec{j} = 0, \vec{k}\times\vec{k} = 0$

Выражение векторного произведения через координаты векторов в декартовой системе координат.

Пусть векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ т.е. $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, т.е. $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}$.

Тогда пользуясь алгебраическими свойствами векторного произведения, получим

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k})\times(b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}) =$$

$$(a_yb_z - a_zb_y)\cdot\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\cdot\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\cdot\vec{k}.$$

Проще запомнить это выражение в виде определителя

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Вычислив его с помощью разложения по элементам первой строки, получим вышеприведенное выражение.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: "ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ"

Даны векторы
$\bar{a}(1,0,2)$, $\bar{b}(1,2,3)$, $\bar{c}(3,2,3)$,
$\bar{d}(4,2,1)$.

Найти: I). скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\bar{a}\cdot\bar{b}$

2). угол между векторами $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$ ;

3). векторное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$: $\bar{c}\times\bar{d}$ и площадь параллелограмма, построенного на них.

I. Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$, где $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}(b_x,b_y,b_z)$

равно $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_z\cdot b_z$

$\bar{a}(1,0,2)$, т.е $a_x=1,\ a_y=0,\ a_z=2$

$\bar{b}(1,2,3)$ т.е $b_x=1,\ b_y=2,\ b_z=3$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=1\cdot1+0\cdot2+2\cdot3=1+6=7.$

2. Угол между векторами. Обозначим $\bar{f}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{c}+\bar{d}$
Косинус угла $\varphi$ между векторами $\bar{f}$ и $\bar{q}$ находим по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\bar{f}\cdot\bar{q}}{|\bar{f}|\cdot|\bar{q}|}$$

Найдем векторы $\bar{f}$ и $\bar{q}$ .
Пользуясь свойствами линейных операций над векторами, получим $\bar{f}=\bar{a}+\bar{b}$



Пусть $\bar{f}=(f_x,f_y,f_z)$

$f_x=a_x+b_x=1+1=2$

$f_y=a_y+b_y=0+2=3$

$f_z=a_z+b_z=2+3=5$

т.е. $\bar{f}=(2,3,5)$

$\bar{q}=\bar{c}+\bar{d}$.

Пусть $\bar{q}=(q_x,q_y,q_z)$

$\bar{c}(3,2,3)$, $\bar{d}(4,2,1)$

т.е. $c_x=3,\ c_y=2,\ c_z=3.$

$d_x=4,\ d_y=2,\ d_z=1.$

$q_x=c_x+d_x=3+4=7$

$q_y=c_y+d_y=2+2=4$

$q_z=c_z+d_z=3+1=4$

т.е. $\bar{q}=(7,4,4)$

Скалярное произведение $\bar{f}\cdot\bar{q}=f_x\cdot q_x+f_yq_y+f_zq_z=$ $=2\cdot7+3\cdot4+5\cdot4=46$

Длина (модуль) вектора $\bar{f}$ равна $|\bar{f}|$

$|\bar{f}|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38}$

Длина (модуль) вектора $\bar{q}$ равна $|\bar{q}|$

$|\bar{q}|=\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}=\sqrt{7^2+4^2+4^2}=\sqrt{81}=9$

$$\cos\varphi=\frac{46}{\sqrt{38}\cdot9}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{46}{9\sqrt{38}}\right).$$

3. Векторное произведение $\bar c \times \bar d = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$.

$$\bar c \times \bar d = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \bar i (2-6) - \bar j (3-12) + \bar k (6-8) = -4\bar i + 9\bar j - 2\bar k$$

Обозначим вектор, равный векторному произведению $c \times d$

$$\bar g = (\bar c \times \bar d)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar c$ и $\bar d$, равна

$$\bar S = |\bar c \times \bar d| = |\bar g|$$

Вектор $\bar g = -4\bar i + 9\bar j - 2\bar k$ или $\bar g\,(-4, 9, -2)$

т.е. $g_x = -4,\ g_y = 9,\ g_z = -2$

$$|\bar g| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{(-4)^2 + 9^2 + (-2)^2} = \sqrt{101}.$$

Итак, площадь $S = \sqrt{101}$ кв. ед.



Варианты заданий контрольной работы № 5
По дисциплине :"Высшая математика" для студентов 1 курса всех специальностей заочного отделения по теме: "Элементы аналитической геометрии, теории определителей и векторной алгебры".

Контрольная работа содержит четыре задания. Студент должен выполнить вариант контрольной работы № 5, номер которого совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

Таблица

вариантов заданий контрольной работы

| № варианта | Номера задач |
|---|---|
| 1 | 1, 11, 21, 31 |
| 2 | 2, 12, 22, 32 |
| 3 | 3, 13, 23, 33 |
| 4 | 4, 14, 24, 34 |
| 5 | 5, 15, 25, 35 |
| 6 | 6, 16, 26, 36 |
| 7 | 7, 17, 27, 37 |
| 8 | 8, 18, 28, 38 |
| 9 | 9, 19, 29, 39 |
| 10 | 10, 20, 30, 40 |

## Задание 1

По теме "Элементы аналитической геометрии на плоскости".

Задание содержит две задачи.

1. Даны две точки: т. $M_1(x, y)$ в декартовой системе координат и т. $M_2(r,\varphi)$ в полярной системе координат.
   а) построить эти точки
   б) определить полярные координаты точки $M_1$.
   в) определить декартовы координаты точки $M_2$.

## Задание 2

2. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат.
   Требуется:
   а) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, придавая $\varphi$ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;
   б) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

Таблица вариантов

| № варианта 1) | X | Y 2) | r | φ | Уравнение линии | Название линии |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | $5\pi/6$ | $r=3(1+\cos\varphi)$ | Кардиоида |
| 2 | -2 | -3 | 2 | $2\pi/3$ | $r=2(1-\cos\varphi)$ | Кардиоида |
| 3 | -2 | 3 | 4 | $\pi/4$ | $r=\varphi$ | Спираль Архимеда |
| 4 | 3 | -1 | 5 | $\pi/3$ | $r=2\varphi$ | Спираль Архимеда |
| 5 | 2 | -2 | 3 | $3\pi/4$ | $r=e^{\varphi}$ | Логарифмическа спираль |
| 6 | 4 | -2 | 2 | $7\pi/4$ | $r=1{,}5\cos\varphi+2$ | Улитка Паскаля |
| 7 | -4 | 2 | 1 | $4\pi/3$ | $r=4\cos\varphi$ | Окружность |
| 8 | 1 | 2 | 3 | $5\pi/4$ | $r=-4\sin\varphi$ | Окружность |
| 9 | -2 | -1 | 2 | $\pi/6$ | $r=-3\cos\varphi$ | Окружность |
| 10 | -3 | 2 | 4 | $7\pi/6$ | $r=2\sin\varphi$ | Окружность |



## Задание 3

ПО ТЕМЕ: "ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ"

Дано уравнение прямой на плоскости в декартовой системе координат /первой прямой/ $Ax+By+C=0$ и точки $M(x_M, y_M)$ и $N(x_N, y_N)$

Требуется:

1. привести уравнение прямой к уравнению с угловым коэффициентом $y=kx+b$, определить угол наклона прямой к оси $X$ ;
2. определить отрезки, которые прямая отсекает на осях $X$ и $Y$, написать уравнение прямой в отрезках;
3. написать уравнение второй прямой, проходящей через точку $M$ и параллельной первой прямой;
4. написать уравнение третьей прямой, проходящей через точку $M$ и перпендикулярной данной прямой;
5. написать уравнение четвертой прямой /$MN$/, проходящей через точки $M$ и $N$ ;
6. найти точку пересечения первой и четвертой прямой;
7. построить все четыре прямые.

ВАРИАНТЫ

3) 11/. $2x-y+3=0$, $M(1;4)$, $N(-4;5)$.
12/. $5x+2y-8=0$, $M(0;2)$, $N(1;5)$.
13/. $3x+8y+16=0$, $M(0;-1)$, $N(1;0)$.
14/. $3x-7y+4=0$, $M(0;-1)$, $N(1;-2)$.
15/. $2x+y-7=0$, $M(1;8)$, $N(-1;5)$.
16/. $3x+9y-5=0$, $M(2;0)$, $N(1;1)$.
17/. $x+2y-2=0$, $M(1;3)$, $N(2;6)$.
18/. $x+3y-4=0$, $M(3;1)$, $N(1;0)$.
19/. $x-3y+6=0$, $M(1;1)$, $N(2;2)$.
20/. ~~10/.~~ $3x-4y+3=0$, $M(3;1)$, $N(2;-2)$.

ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ:
"Элементы теории определителей"

Решить систему линейных уравнений, используя формулу Крамера. Вычисление определителей производить разложением по строке или столбцу.

Варианты.

4) 21. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_2+4x_3=-6 \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3 \\ x_1-5x_2+3x_3=-1 \\ x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=9 \\ 2x_2+x_3=8 \\ x_1-x_2+2x_3=7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_2+x_3=7 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=-9 \\ 2x_1+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2-x_3=-4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+3x_3=-5 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=5 \\ x_1-2x_2+x_3=-1 \\ 3x_2+x_3=3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8 \\ x_1+2x_2-x_3=-4 \\ 3x_2+2x_3=3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3=-8 \\ x_1+3x_2-x_3=8 \\ 2x_2+x_3=1 \end{cases}$



Задание 5
ПО ТЕМЕ: "ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ"

Даны векторы $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}(c_x,c_y,c_z)$, $\bar{d}(d_x,d_y,d_z)$.

в декартовой системе координат.

Найти:

1/. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2/. Угол между векторами $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{c}+\bar{d}$.

3/. Векторное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ и площадь параллелограмма, построенного на них.

ВАРИАНТЫ

5) 31. $\bar{a}(1;2;3)$, $\bar{b}(-1;3;2)$, $\bar{c}(7;-3;5)$, $\bar{d}(6;10;17)$.

32. $\bar{a}(4;7;8)$, $\bar{b}(9;1;3)$, $\bar{c}(2;-4;1)$, $\bar{d}(1;-13;-13)$.

33. $\bar{a}(8;2;3)$, $\bar{b}(4;6;10)$, $\bar{c}(3;-2;1)$, $\bar{d}(7;4;11)$.

34. $\bar{a}(10;3;1)$, $\bar{b}(1;4;2)$, $\bar{c}(3;9;2)$, $\bar{d}(19;30;7)$.

35. $\bar{a}(2;4;1)$, $\bar{b}(1;3;6)$, $\bar{c}(5;3;1)$, $\bar{d}(24;20;6)$.

36. $\bar{a}(1;7;3)$, $\bar{b}(3;4;2)$, $\bar{c}(4;8;5)$, $\bar{d}(7;32;14)$.

37. $\bar{a}(1;-2;3)$, $\bar{b}(4;7;2)$, $\bar{c}(6;4;2)$, $\bar{d}(14;18;6)$.

38. $\bar{a}(1;4;3)$, $\bar{b}(6;8;5)$, $\bar{c}(3;1;4)$, $\bar{d}(21;18;33)$.

39. $\bar{a}(2;7;3)$, $\bar{b}(3;1;8)$, $\bar{c}(2;-7;4)$, $\bar{d}(16;14;27)$.

40. $\bar{a}(7;2;1)$, $\bar{b}(4;3;5)$, $\bar{c}(3;4;-2)$, $\bar{d}(2;-5;-13)$.