ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
СЕРГО ОРЖОНИКИДЗЕ

Кафедра ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.А. Любушин

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебное пособие для старших курсов геофизического факультета

Москва

2006

Введение. В пособии дается представление об основных понятиях и методах фрактального анализа результатов наблюдений – временных рядов. Вводятся понятия фрактальной размерности, спектра сингулярности, самоподобного сигнала, обобщенного броуновского движения, индекса Херста. Обсуждаются вопросы вычислений фрактальных характеристик временных рядов, приводятся примеры анализа данных. Для проведения вычислений может быть использован интегрированный пакет для статистического анализа сигналов Spectra_Analyzer, разработанный автором, описание которого дается в методическом пособии «Разведочный анализ свойств временных рядов».

Анализ фрактальных и мультифрактальных свойств временных рядов является одним из перспективных направлений анализа данных. Это обусловлено способностью фрактального анализа исследовать сигналы, которые с точки зрения ковариационной и спектральной теории являются не более чем белым шумом либо броуновским движением. Одной из первых работ по анализу фрактальных свойств временных рядов являются работы американского гидролога Херста по исследованию среднегодового режима расхода воды в реках [2,3,5,6]. Эмпирический закон Херста заключается в выполнении соотношения: $R(\tau)/\sigma(\tau) \sim \tau^H$, где $R(\tau)$ - разница между максимальными и минимальными значениями приращений наблюдаемой величины на временном интервале длиной τ, $\sigma(\tau)$ - стандартное отклонение, $0 < H < 1$ - постоянная, значение которой для большинства метеорологических и гидрологических наблюдений лежит в окрестности 0.7. Для самоподобного процесса $x(t)$ среднее значений квадрата приращений $M\{|x(t+\delta t)-x(t)|^2\} \sim |\delta t|^{2H}$, а зависимость спектра мощности от частоты носит степенной характер $S_{xx}(\omega) \sim \omega^{-(2H+1)}, \omega \to 0$.

Дальнейшее обобщение этой модели состоит в допущении зависимости постоянной Херста от времени, то есть в рассмотрении такого случайного процесса, для которого $M\{|x(t+\delta t)-x(t)|^2\} \sim |\delta t|^{2H(t)}, 0 < H(t) < 1$. Это обобщение было предложено Мандельбротом [2,5,6] и названо мультифрактальным броуновским движением, которое описывается тех или иных значений $H(t)$ – т.н. мультифрактальным спектром сингулярности. Спектр сингулярности представляет собой информативную статистику, характеризующую режим хаотических флуктуаций наблюдаемой величины.

1. *Фрактальная размерность множества точек*. Пусть $\Omega \subset R^m$ - некоторое ограниченное множество. Покроем его полностью m-мерными непересекающимися кубиками с длиной ребра δ и пусть $n(\delta)$- общее число таких кубиков, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из множества Ω. Вычислим объем покрытия как $V(\delta, d) = n(\delta) \cdot \delta^d$, где d - некоторая пробная размерность. Пусть:

$$V(\delta, d) = n(\delta)\cdot\delta^d \underset{\delta\to 0}{\to} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (1)$$

В этом случае число D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича множества Ω. Если D - дробное число, меньшее m, то множество Ω называется фракталом, а D - фрактальной размерностью. Отсюда следует, что $n(\delta) \sim \delta^{-D}$, $\delta \to 0$, то есть

$$D = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln(n(\delta))}{\ln(\delta)} \quad (2)$$

2. *Мультифрактальный спектр показателей сингулярности Гельдера-Липшица*. Пусть x - вектор в евклидовом пространстве R^m. Пусть $\Omega \subset R^m$ - некоторое ограниченное множество, на котором определена мера $M(B)$ для любого множества $B \subseteq \Omega \subset R^m$. Определим показатель Гельдера-Липшица $\alpha(x)$ для меры $M(x)$ из соотношения:

$$|M(x+dx) - M(x)| \sim |dx|^{\alpha(x)} \text{ или } \alpha(x) = \frac{\ln|M(x+dx)-M(x)|}{\ln|dx|} = \frac{\ln|dM(x,dx)|}{\ln|dx|} \quad (3)$$

Пусть $\delta > 0$. Покроем множество Ω непересекающимися m-мерными кубами со сторонами длиной δ и пусть $n(\delta)$ - общее число таких кубов. Пронумеруем кубы этого покрытия индексом $i, i = 1,...,n(\delta)$ и пусть $\mu_i = \mu_i(\delta)$ - мера *i*-го куба. На практике плотность $M(x)$ неизвестна и, соответственно, неизвестны и значения μ_i. Однако μ_i могут быть оценены в случае, если задана достаточно большая выборка точек (результаты наблюдений или эксперимента), распределенных внутри множества Ω в соответствии с плотностью $M(x)$. Пусть N - общее число точек в выборке, а $N_i(\delta)$ - число точек выборки, попавших в *i*-ый куб. Тогда можно оценить $\mu_i \approx N_i/N$. Составим сумму:

$$N(q,\delta) = \sum_{i=1}^{n(\delta)} \mu_i^q \quad (4)$$

При $q>0$ основной вклад в $N(\delta,q)$ совершают кубы (ячейки) с большими значениями μ_i, а при $q<0$ - ячейки с малыми значениями меры. Пусть $N(q,\delta)\sim\delta^{-\tau(q)}$ при $\delta\to 0$, то есть существует предел (называемый показателем массы):

$$\tau(q)=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(q,\delta)}{\ln|\delta|} \tag{5}$$

Заметим, что если $q=0$, то $\mu_i^{q=0}=1$ и $N(\delta,q)=n(\delta)$ - просто число ячеек с линейным размером δ, покрывающих множество точек. В этом случае, согласно определению $\tau(q=0)=D$ - фрактальная размерность множества точек.

Если $q=1$, то $N(q=1,\delta)=\sum_{i=1}^{n(\delta)}\mu_i=1$ и, следовательно, $\tau(q=1)=0$.

Вычислим (представляя $\mu_i^q=\exp(q\ln(\mu_i))$):

$$\frac{d\tau(q)}{dq}=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_i\mu_i^q\ln(\mu_i)}{\left(\sum_i\mu_i^q\right)\ln|\delta|} \tag{6}$$

Пусть $\mu_{\min}(\delta)=\min_i\{\,\mu_i(\delta),\,\mu_i(\delta)>0\,\}$. Тогда:

$$\left.\frac{d\tau(q)}{dq}\right|_{q\to-\infty}=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_i{}'\mu_{\min}^q\ln(\mu_{\min})}{\left(\sum_i{}'\mu_{\min}^q\right)\ln|\delta|}=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln(\mu_{\min}(\delta))}{\ln|\delta|} \tag{7}$$

где $\sum_i{}'$ означает суммирование лишь по тем ячейкам, для которых $\mu_i=\mu_{\min}(\delta)$. Поскольку по определению показателя Гельдера-Липшица вариация меры $\delta M\sim|\delta|^\alpha,\delta\to 0$, то при малых δ величина $|\delta|^\alpha$ минимальна когда $\alpha=\alpha_{\max}$. Отсюда следует:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln(\mu_{\min}(\delta))}{\ln|\delta|}=\alpha_{\max},\quad \left.\frac{d\tau(q)}{dq}\right|_{q\to-\infty}=-\alpha_{\max} \tag{8}$$

Аналогично показывается, что

$$\left.\frac{d\tau(q)}{dq}\right|_{q\to+\infty} = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln(\mu_{\max}(\delta))}{\ln|\delta|} = -\alpha_{\min} \tag{9}$$

Пусть L_α - множество точек, имеющих показатель Гельдера-Липшица α и пусть $F(\alpha)$ - фрактальная размерность множества L_α. Поскольку полное множество точек – носителей меры можно представить как $\bigcup\limits_{\alpha=\alpha_{\min}}^{\alpha=\alpha_{\max}} L_\alpha$, то $F(\alpha)\le D$. Обозначим через $\rho(\alpha)$ плотность множеств L_α, то есть $\rho(\alpha)d\alpha$ равно числу множеств L_α точек, имеющих показатель Гельдера-Липшица в интервале от α до $\alpha+d\alpha$. По определению фрактальной размерности число ячеек $n(\delta,\alpha,d\alpha)$, необходимых для покрытия объединения множеств L_α с показателем в интервале от α до $\alpha+d\alpha$, равно

$$n(\delta,\alpha,d\alpha) = \rho(\alpha)d\alpha\cdot|\delta|^{-F(\alpha)} \tag{10}$$

Мера этих ячеек равна $\mu_\alpha = |\delta|^\alpha$. Следовательно, аналогом суммы $N(q,\delta)=\sum\limits_{i=1}^{n(\delta)}\mu_i^q$ для объединения всех множеств L_α с показателем в интервале от $\alpha_{\min}$ до $\alpha_{\max}$ будет интеграл:

$$N(q,\delta) = \int\limits_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} n(\delta,\alpha,d\alpha)\mu_\alpha^q = \int\limits_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \rho(\alpha)d\alpha\cdot|\delta|^{q\alpha-F(\alpha)} \le |\delta|^{\max\limits_\alpha(q\alpha-F(\alpha))}\int\limits_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\rho(\alpha)d\alpha \tag{11}$$

Согласно определению функции $\tau(q)$ $N(q,\delta)\sim|\delta|^{-\tau(q)}$ при $\delta\to 0$. Отсюда следует, что

$$-\tau(q) = \max_\alpha(q\alpha - F(\alpha)) \quad\Rightarrow\quad \tau(q) = \min_\alpha(F(\alpha)-q\alpha), \quad \alpha_{\min}\le\alpha\le\alpha_{\max} \tag{12}$$

Величина $\tau(q)$, в отличие от $F(\alpha)$, может быть вычислена (оценена по данным). Если $F(\alpha)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то из условия $\tau(q)=\min\limits_\alpha(F(\alpha)-q\alpha)$ следует, что

$$q = \frac{dF(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tau(q) = F(\alpha)-\alpha q = F(\alpha) - \alpha\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = \frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq} - \alpha(q) - q\frac{d\alpha}{dq} = -\alpha(q) + \frac{d\alpha}{dq}\left(\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} - q\right) = -\alpha(q) \tag{14}$$

и имеют место обратные формулы:

$$\alpha = -\frac{d\tau(q)}{dq}, \quad F(\alpha) = \tau(q) + q\alpha = \tau(q) - q\frac{d\tau(q)}{dq} \tag{15}$$

Последние формулы можно использовать для параметрического задания функции $F(\alpha)$.

Если $F(\alpha)$ является выпуклой функцией, то $\tau(q)$ также выпукла, а $F(\alpha)$ может вычислена согласно преобразованию Лежандра:

$$F(\alpha) = \min_q (q\alpha + \tau(q)), \quad q \in (-\infty, +\infty) \tag{16}$$

Реально нас интересуют лишь случаи $F(\alpha) \geq 0$, поэтому

$$F(\alpha) = \left(\min_q (q\alpha + \tau(q))\right)^+ = \max\{\min_q (q\alpha + \tau(q)), 0\} \tag{17}$$

Этот способ вычисления $F(\alpha)$ не требует взятия производной от численно найденной функции $\tau(q)$.

3. *Мультипликативный биномиальный процесс*. Этот процесс является одним из самых популярных примеров мультфрактального процесса и строится как предел следующих итераций. На нулевой итерации рассматривается единичный отрезок [0,1] и ему приписывается мера 1. Далее отрезок делится пополам на 2 равные части и левой половине приписывается мера p, $0 < p < 1$, а правой половине – мера $1 - p$. На второй итерации каждая половина делится пополам в свою очередь и каждой половине от половин также приписывается мера в пропорции p для левой части и $1 - p$ для правой. Таким образом, на 2-ой итерации имеем четвертинки, имеющие меры (слева направо) p^2, $p(1-p)$, $(1-p)p$ и $(1-p)^2$. Далее каждый из 4-х отрезков опять делится пополам и меры перераспределяются в той же пропорции и т.д.

Пусть $n = 1, 2, ...$ - номер итерации. Тогда на каждой итерации отрезок $[0,1]$ делится на $N = 2^n$ малых отрезков длиной $\delta_n = 2^{-n}$. Пусть

$$x_i^{(n)} = i \cdot 2^{-n}, i = 0,1,..., N-1 \tag{18}$$

- точки начал этих малых отрезков $I_i^{(n)} = \{x: \ x_i^{(n)} \le x < x_i^{(n)} + \delta_n\}$.

Каждому отрезку $I_i^{(n)}$ припишем меру $\mu_i^{(n)} = p^{k_i}(1-p)^{n-k_i}$, где $0 < p < 1$, а k_i - число нулей в разложении $x_i^{(n)}$ в 2-чную дробь длиной n знаков. Таким образом, можно определить линейную плотность

$$\rho_n(x) = \mu_i^{(n)} / \delta_n, \quad x \in I_i^{(n)} \tag{19}$$

и меру полуинтервала $[0, x)$:

$$M_n(x) = \int_0^x \rho_n(u) du \tag{20}$$

Число точек $x_i^{(n)} = i \cdot 2^{-n}$, имеющих в своем разложении в n-мерную 2-чную дробь одинаковое число нулей, равное k, равно биномиальному коэффициенту $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Этой же величине равно общее число интервалов $I_i^{(n)}$, имеющих одинаковую меру $p^k(1-p)^{n-k}$. Суммируя меры всех интервалов, получим 1 – полную меру отрезка $[0,1]$. Поэтому $M_n(1) = 1$. Функция $M_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$M_n(x) = \begin{cases} p \cdot M_n(2x), & 0 \le x < 1/2 \\ p + (1-p) \cdot M_n(2x-1), & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \tag{21}$$

При $n \to \infty$ в пределе получим функцию $M(x) = \lim\limits_{n\to\infty} M_n(x)$, которая обладает свойствами мультифрактальности.

Обозначим через $\xi_k^{(n)} = k/n, \quad k = 0,1,...,n$ долю нулей в разложении в n-мерную 2-чную дробь чисел $x_i^{(n)} = i \cdot 2^{-n}$. Тогда существует

$$N_n(\xi_k^{(n)}) = \frac{n!}{(\xi_k^{(n)} n)!((1-\xi_k^{(n)})n)!} \tag{22}$$

интервалов $I_i^{(n)}$ имеющих одну и ту же меру

$$\mu_n(\xi_k^{(n)}) = p^{n\xi_k^{(n)}}(1-p)^{n(1-\xi_k^{(n)})} = (\Delta(\xi_k^{(n)}))^n, \quad \Delta(\xi) = p^{\xi}(1-p)^{(1-\xi)} \tag{23}$$

Обозначим через $L_n(\xi_k^{(n)})$ множество всех таких интервалов.

Используя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot e^{n\cdot(\ln(n)-1)}$, получим:

$$N_n(\xi_k^{(n)}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi_k^{(n)}(1-\xi_k^{(n)})}} \cdot \exp(-n(\xi_k^{(n)}\ln(\xi_k^{(n)}) + (1-\xi_k^{(n)})\ln(1-\xi_k^{(n)}))) \tag{24}$$

Подставляя под знаком экспоненты $n = -\ln(\delta_n)/\ln(2)$ и обозначая

$$f(\xi) = -\frac{\xi\ln(\xi) + (1-\xi)\ln(1-\xi)}{\ln(2)} \tag{25}$$

получим

$$N_n(\xi_k^{(n)}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi_k^{(n)}(1-\xi_k^{(n)})}} \cdot (\delta_n)^{-f(\xi_k^{(n)})} \tag{26}$$

Устремим $n \to \infty$ и обозначим через $L(\xi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n(\xi)$ - объединение всех множеств вида $L_n(\xi_k^{(n)})$, для которых доля нулей в разложении во все более длинную 2-чную дробь равна одному и тому же числу ξ. Поскольку $N_n(\xi) \sim (\delta_n)^{-f(\xi)}$, $\delta_n \to 0$, то отсюда следует, что фрактальная размерность множества $L(\xi)$ равна $f(\xi)$. Заметим что $\bigcup_{\xi} L(\xi) = [0,1]$.

Далее, $M_n(x_i^{(n)} + \delta_n) - M_n(x_i^{(n)}) = (\Delta(\xi_k^{(n)}))^n$. Представим это приращение меры на интервале длиной δ_n через показатель Гельдера-Липшица, то есть в виде $(\delta_n)^{\alpha}$. Отсюда:

$$\alpha(\xi_k^{(n)}) = \frac{\ln((\Delta(\xi_k^{(n)}))^n)}{\ln(\delta_n)} = -\frac{\xi_k^{(n)}\ln(p) + (1-\xi_k^{(n)})\ln(1-p)}{\ln(2)} \tag{27}$$

Это же соотношение останется в силе и при $n \to \infty$. Следовательно, если ввести функцию

$$\alpha(\xi) = -\frac{\xi \ln(p) + (1-\xi)\ln(1-p)}{\ln(2)} \tag{28}$$

и выразить $f(\xi)$ через α, то мы получим спектр сингулярностей $F(\alpha)$. Если $p < 1/2$, то

$$\begin{aligned} &\alpha_{\min} = -\ln(1-p)/\ln(2) = \alpha(\xi = 0), \\ &\alpha_{\max} = -\ln(p)/\ln(2) = \alpha(\xi = 1) \\ &\max_{\alpha} F(\alpha) = F(\alpha_0) = 1, \quad \alpha_0 = \alpha(\xi = 0.5) = -\frac{\ln(p) + \ln(1-p)}{\ln(2)} \end{aligned} \tag{29}$$

Показатель массы для биномиального процесса находится из выражения

$$N(q,\delta) = \sum_{i=1}^{n(\delta)} \mu_i^q = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{qk}(1-p)^{q(n-k)} = (p^q + (1-p)^q)^n \tag{30}$$

Поскольку $\delta = \delta_n = 2^{-n}$, то

$$\tau(q) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(q,\delta)}{\ln|\delta|} = \frac{\ln(p^q + (1-p)^q)}{\ln(2)} \tag{31}$$

Как и должно быть $\tau(q=0) = D = 1$ - размерность носителя меры – единичного отрезка.

4. *Фрактальное броуновское движение*. Случайный процесс $Z(t)$ называется самоподобным с индексом $H, H > 0$, если функция распределения случайной величины $Z(a \cdot t)$ совпадает с ф.р. величины $a^H \cdot Z(t)$. Параметр H называется масштабирующей экспонентой или параметром Херста.

Если процесс $Z(t)$ самоподобен с параметром H («H-самоподобен»), то процесс $Y(t) = e^{-tH} Z(e^t)$ стационарен в узком смысле. Обратно, если процесс $Y(t)$ стационарен в узком смысле, то процесс $Z(t) = t^H \cdot Y(\ln t),\ \ t > 0$ самоподобен с параметром H. Действительно, для любых постоянных $h, \theta_j, t_j,\ j = 1,...,m$ справедливо равенство:

$$\sum_{j=1}^{m} \theta_j Y(t_j + h) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j e^{-t_j H} e^{-hH} Z(e^h e^{t_j}) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m} \theta_j e^{-t_j H} Z(e^{t_j}) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j Y(t_j) \tag{32}$$

где символ $\overset{d}{=}$ означает равенство функций распределений случайных величин по обе стороны от этого символа.

Процесс $Z(t)$ имеет стационарные приращения, если ф.р. случайной величины $\Delta_t Z(h) = Z(t+h) - Z(t)$ совпадает с ф.р. величины $Z(h) - Z(0)$: $Z(t+h) - Z(t) \overset{d}{=} Z(h) - Z(0)$. Если процесс $Z(t)$ H-самоподобен и имеет стационарные приращения, то будем про него говорить, что он принадлежит классу *Hsssi* (self-similar with scaling exponent *H* and stationary increments). Если $Z(t) \in Hsssi$, то последовательность $X_j = Z(j+1) - Z(j)$ образует стационарный временной ряд. Далее будем предполагать, что $Z(t)$ имеет ограниченную дисперсию: $MZ^2(t) < \infty$.

Если $Z(t) \in Hsssi$ и $MZ^2(t) < \infty$, то процесс $Z(t)$ обладает следующими свойствами.

a) Если $H \neq 1$, то $MZ(t) = 0$. Действительно: $MZ(2t) = 2^H MZ(t)$ в силу H-самоподобия. С другой стороны, в силу стационарности приращений

$$MZ(2t) = M(Z(2t) - Z(t) + Z(t)) = M(Z(2t) - Z(t)) + MZ(t) = 2MZ(t) \tag{33}$$

то есть $2MZ(t) = 2^H MZ(t)\ \forall t \Rightarrow MZ(t) = 0$.

b) Поскольку $Z(0) = Z(a0) \overset{d}{=} a^H Z(0) \quad \forall a \quad \Rightarrow \quad Z(0) = 0$

c) Из предыдущего свойства b) и из стационарности приращений вытекает:

$$Z(-t) = Z(-t) - Z(0) \overset{d}{=} Z(-t+t) - Z(0+t) = Z(0) - Z(t) = -Z(t) \tag{34}$$

d) Из свойства c) и из H-самоподобия следует:

$$MZ^2(t) = MZ^2(|t| \cdot sign(t)) = |t|^{2H}\ MZ^2(sign(t)) = |t|^{2H}\ MZ^2(1) = |t|^{2H}\ \sigma^2 \tag{35}$$

где $\sigma^2 = MZ^2(1)$. Если $\sigma^2 = 1$, то процесс $Z(t) \in Hsssi$ называется *стандартным.*

e) Из свойства d) следует формула для ковариационной функции процесса $Z(t) \in Hsssi$:

$$\Gamma_H(s,t) = M(Z(s)Z(t)) = M(Z^2(s) + Z^2(t) - (Z(s) - Z(t))^2)/2 = \frac{\sigma^2}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}) \tag{36}$$

f) Значение параметра Херста $H \le 1$ для самоподобного процесса. Действительно, имеем:

$$M\,|Z(2)| = M\,|Z(2)-Z(1)+Z(1)| \le M\,|Z(2)-Z(1)| + M\,|Z(1)| = 2M\,|Z(1)| \tag{37}$$

С другой стороны, в силу самоподобия $M\,|Z(2)| = 2^H M\,|Z(1)| \quad \Rightarrow \quad 2^H \le 2 \quad \Rightarrow \quad H \le 1$.

g) Если $H = 1$, то $MZ(s)Z(t) = \Gamma_H(s,t) = st\sigma^2$. Отсюда

$$M(Z(t)-tZ(1))^2 = MZ^2(t) - 2tM(Z(t)Z(1)) + t^2 MZ^2(1) = \sigma^2(t^2 - 2tt + t^2) = 0 \tag{38}$$

то есть $Z(t) = tZ(1)$ почти всюду.

Пусть $Z(t) \in Hsssi$, $0 < H < 1$ и $Z(t)$ - гауссовский процесс. Тогда $Z(t)$ называется *фрактальным броуновским движением* и обозначается $B_H(t)$. Если $H = 0.5$, то $Z(t)$ является обычным броуновским движением или винеровским процессом. Нетрудно получить, что $\Gamma_{0.5}(s,t) = \sigma^2 \min(|s|,|t|)$ в случае, если $sign(t) = sign(s)$ и $\Gamma_{0.5}(s,t) = 0$, если $sign(t) \ne sign(s)$. Одно из возможных представление fBm:

$$B_H(t) = k_H \int_{-\infty}^{+\infty} [(t-u)_+^{H-0.5} - (-u)_+^{H-0.5}]\, dB_{0.5}(u); \quad u_+ = \max(0,u) \tag{39}$$

Здесь k_H - нормировочная постоянная. Если выбрать:

$$\begin{gathered} k_H^2 = \frac{2H \cdot \Gamma(1.5-H)}{\Gamma(H+0.5)\cdot\Gamma(2-2H)}, \\ \Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1} dt, \quad u > 0, \quad \Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n! \end{gathered} \tag{40}$$

то $\sigma^2 = MB_H^2(t) = 1$. Хаусдорфова размерность реализаций $B_H(t)$ равна $D_H = 2 - H$.

Рассмотрим приращения процесса $B_H(t)$: $X_k = B_H(k+1) - B_H(k)$. Эта случайная последовательность называется *фрактальным гауссовским шумом*. Для фрактального шума справедливы утверждения:

(i) X_k стационарна.

(ii) $MX_k = 0, \quad MX_k^2 = \sigma^2$

(iii) $\gamma_{XX}(k) = MX_i X_{i+k} = \sigma^2(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H})/2$

(iv) Пусть $k \neq 0$.

Тогда:
$$H = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{XX}(k) = 0;$$
$$0 < H < 0.5 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{XX}(k) < 0;$$
$$0.5 < H < 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{XX}(k) > 0$$

(v) Пусть $H \neq 0.5$. Тогда $\gamma_{XX}(k) \sim \sigma^2 H(2H-1) \cdot |k|^{2H-2}, \quad |k| \to \infty$

(vi) Пусть $S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{XX}(k) e^{-ik\omega}$ - спектральная плотность стационарной случайной последовательности X_k; $\gamma_{XX}(k) = \int_{-\pi}^{+\pi} S_{XX}(\omega) e^{ik\omega} d\omega$. Тогда $S_{XX}(\omega) \sim \omega^{-(2H-1)}, \quad \omega \to 0$, т.е. если $0.5 < H < 1 \quad \Rightarrow \quad S_{XX}(\omega) \to \infty, \omega \to 0$ и сигнал X_k носит низкочастотный характер. Соответственно, спектральная оценка конечной выборки из фрактального броуновского движения будет иметь поведение:

$S_{B_H B_H}(\omega) \sim \omega^{-(2H+1)}, \quad \omega \to 0$

5. *Оценка постоянной Херста по экспериментальным данным.* Наиболее очевидная оценка непосредственно из определения показателя, данного самим автором. Пусть $x(t), \quad t = 1, \ldots, N$ – анализируемый временной ряд; $L < N$ – длина скользящего временного окна; τ - номер отсчета правого конца скользящего окна, то есть мы рассматриваем моменты времени t, которые удовлетворяют условию $\tau - L + 1 \leq t \leq \tau$. Пусть s - длина внутреннего временного окна, которое используется внутри текущего основного окна для операций усреднения. Мы рассматриваем длины внутренних окон, удовлетворяющие условию: $s \leq L/5$. Пусть

$$\overline{x}_{s,u}^{(\tau)} = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^{s} x(u+t-1) \qquad (41)$$

– выборочная оценка среднего значения на интервале длиной s отсчетов, который лежит внутри текущего основного окна и начинается в точке u. Следующий шаг состоит в вычислении отклонений от среднего значения (41), их накопленной суммы и размаха накопленной суммы:

$$\Delta x_{s,u}^{(\tau)}(t) = x(t) - \overline{x}_{s,u}^{(\tau)}, \quad \xi_{s,u}^{(\tau)}(t) = \sum_{v=1}^{t} \Delta x_{s,u}^{(\tau)}(v), \quad R_{s,u}^{(\tau)} = \max_t \xi_{s,u}^{(\tau)}(t) - \min_t \xi_{s,u}^{(\tau)}(t) \qquad (42)$$

для $t \in [u, u+s-1], \quad u \in [\tau - L + 1, \tau - s + 1]$. Далее оцениваются дисперсия и среднее значение отношения размаха к стандартному отклонению:

$$(\sigma_{s,u}^{(\tau)})^2 = \frac{1}{s}\sum_{t=1}^{s}(\Delta x_{s,u}^{(\tau)}(t))^2, \quad RS^{(\tau)}(s) = \frac{1}{(L-s+1)} \sum_{u=\tau-L+1}^{\tau-s+1} \frac{R_{s,u}^{(\tau)}}{\sigma_{s,u}^{(\tau)}} \tag{43}$$

Показатель Херста $H(\tau)$ в текущем временном окне оценивается как наклон кривой прямой линейной регрессии между значениями $\ln(RS^{(\tau)}(s))$ и $\ln(s)$. Оценка может получена как в скользящем временном окне, так и по всей выборке. Заметим, что если ставится задача оценки постоянной Херста для процесса $Z(t) \in Hsssi$, то все вышеизложенные операции следует производить после перехода к его приращениям, то есть для $x(t) = Z(t+1) - Z(t)$.

Другие оценки могут быть основаны на свойстве роста спектра мощности по степенному закону: $S_{ZZ}(\omega) \sim \omega^{-(2H+1)}, \quad \omega \to 0$ при уменьшении частоты. Если использовать не обычные спектральные оценки, а разложения по системе ортогональных нормированных компактных базисных функций – вейвлетам [1], то для процесса $Z(t) \in Hsssi$ оценку постоянной Херста можно найти по скорости роста средних значений квадратов модулей вейвлет-коэффициентов:

$$W_\alpha = \sum_{j=1}^{N^{(\alpha)}} | c_j^{(\alpha)} |^2 / N^{(\alpha)} \tag{44}$$

Здесь $c_j^{(\alpha)}$ - коэффициенты ортогонального дискретного вейвлет-разложения выборки самоподобного временного ряда, $\alpha = 1,...,m$ - номер уровня детальности разложения, $N^{(\alpha)}$ - число вейвлет-коэффициентов на уровне детальности α, $N^{(\alpha)} \le 2^{(m-\alpha)}$. Тогда, аналогично соотношению для скорости роста спектра мощности, $W_\alpha \sim (s_\alpha)^{2H+1}$, где s_α - характерный временной масштаб уровня детальности α. Поскольку $s_\alpha = 2^\alpha \div 2^{(\alpha+1)}$, то отсюда следует, что

$$\log_2(W_\alpha) \sim \alpha^{2H+1} \tag{45}$$

Таким образом, значение коэффициента наклона прямой, подогнанной методом наименьших квадратов к парам значений $(\log_2(W_\alpha), \alpha)$, дает оценку для величины $2H+1$.

6. *Оценка спектра сингулярности по экспериментальным данным.* В настоящее время существуют 2 подхода для оценки спектров сингулярности временного ряда. Первый метод

появился раньше и основан на анализе цепей точек максимума модулей непрерывных вейвлет-преобразований с вейвлетами, обычно равными производной той или иной степени от функции плотности распределения Гаусса [1]. Второй подход более близок к технике Херста и основан на анализе зависимости стандартного отклонения или размаха выборки от ее длины. В последнее время был разработан и активно применяется в различных приложениях метод анализа флуктуаций после исключения масштабно-зависимых трендов – Detrended Fluctuation Analysis (DFA) [4]. Сравнительный опыт применения методов показывает, что метод DFA является более надежным и устойчивым. В то же время для специального вида самоподобных сигналов, которые могут содержать плато постоянных значений (типа известной «чертовой лестницы», конструируемой на базе канторовского множества), метод DFA неприменим и оценка, основанная на непрерывных вейвлет-преобразованиях, имеет преимущества. Ниже будет использован только DFA и приведены основные конструкции метода.

Пусть $x(t)$ – случайный процесс. Определим в качестве меры $\mu_X(t,\delta)$ изменчивости сигнала $x(t)$ на интервале $[t, t+\delta]$ модуль его приращения: $\mu_x(t,\delta) = |x(t+\delta) - x(t)|$ и вычислим среднее значение модуля таких мер в степени q:

$$M(\delta, q) = M\{(\mu_x(t,\delta))^q\} \tag{46}$$

Случайный процесс называется масштабно-инвариантным, если $M(\delta, q) \sim |\delta|^{\rho(q)}$ при $\delta \to 0$, то есть существует предел:

$$\rho(q) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln M(\delta, q)}{\ln|\delta|} \tag{47}$$

Заметим, что в определении (46-47) величина меры $\mu_x(t,\delta)$ может быть взята также как размах, что ближе к традиционным конструкциям Херста:

$$\mu_x(t,\delta) = \max_{t \le u \le t+\delta} x(u) - \min_{t \le u \le t+\delta} x(u) \tag{48}$$

Если зависимость $\rho(q)$ является линейной: $\rho(q) = Hq$, где $H = const, 0 < H < 1$, то процесс называется монофрактальным. В частности, для классического броуновского движения $H = 0.5$. Возведение в степень q подчеркивает различные типы поведения сигнала: если $q>0$, то в значение меры (46) основной вклад вносят интервалы времени с большими отклонениями от тренда, а если $q<0$, то интервалы времени с малыми вариациями.

Для вычисления функции $\rho(q)$ по конечной выборке из временного ряда $x(t), t=1,...,N$ можно применить метод DFA. Пусть s - число отсчетов, ассоциированное с варьируемым масштабом δ_s: $\delta_s = s\Delta t$. Разобьем выборку на непересекающиеся малые интервалы длиной s отсчетов:

$$I_k^{(s)} = \{t : 1+(k-1)s \le t \le ks, \quad k=1,...,[N/s]\} \tag{49}$$

и пусть

$$y_k^{(s)}(t) = x((k-1)s+t), \quad t=1,...,s \tag{50}$$

участок временного ряда $x(t)$, соответствующий интервалу $I_k^{(s)}$. Пусть $p_k^{(s,m)}(t)$ - полином порядка m, подогнанный методом наименьших квадратов к сигналу $y_k^{(s)}(t)$. Рассмотрим отклонения от локального тренда:

$$\Delta y_k^{(s,m)}(t) = y_k^{(s)}(t) - p_k^{(s,m)}(t), \quad t=1,...,s \tag{51}$$

и вычислим значение:

$$Z^{(m)}(q,s) = \left(\sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1\le t\le s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1\le t\le s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q \Big/ [N/s] \right)^{1/q} \tag{52}$$

которое будем рассматривать как оценку для $(M(\delta_s, q))^{1/q}$. Процедура устранения тренда на каждом малом участке длиной s отсчетов необходима в случае наличия в сигнале трендов внешнего происхождения. Определим теперь функцию $h(q)$ как коэффициент линейной регрессии между значениями $\ln(Z^{(m)}(q,s))$ и $\ln(s)$: $Z^{(m)}(q,s) \sim s^{h(q)}$. Очевидно, что $\rho(q) = qh(q)$, а для монофрактального процесса $h(q) = H = const$.

Следующим шагом в мультифрактальном анализе после определения функции $\rho(q)$ является вычисление спектра сингулярности $F(\alpha)$, который является с фрактальной размерности множества точек, в окрестности которых показатель Гельдера-Липшица для случайных реализаций процесса $x(t)$ равен α, то есть таких точек t, для которых

$|x(t+\delta)-x(t)| \sim |\delta|^{\alpha}, \quad \delta \to 0$. Стандартный подход состоит в вычислении статистической суммы Гиббса:

$$W(q,s) = \sum_{k=1}^{[N/s]} (\max_{1\le t\le s} \Delta y_k^{(s,m)}(t) - \min_{1\le t\le s} \Delta y_k^{(s,m)}(t))^q \tag{53}$$

и определения показателя массы $\tau(q)$ из условия $W(q,s) \sim s^{\tau(q)}$, после чего спектр $F(\alpha)$ вычисляется согласно формуле:

$$F(\alpha) = \max\{\min_q(\alpha q - \tau(q)), 0\} \tag{54}$$

Сравнивая (52) и (53), нетрудно заметить, что $\tau(q) = \rho(q) - 1 = qh(q) - 1$. Таким образом, $F(\alpha) = \max\{\min_q(q(\alpha - h(q)) + 1, 0\}$.

Для монофрактального процесса, когда $h(q) = H = const$, получаем, что $F(H) = 1$ и $F(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \ne H$. В частности, положение и ширина носителя спектра $F(\alpha)$, то есть значения $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$, $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ и α^* - то значение, которое доставляет функции $F(\alpha)$ максимум: $F(\alpha^*) = \max_{\alpha} F(\alpha)$, являются характеристиками шума. Величину α^* можно назвать обобщенным показателем Херста. Для монофрактального сигнала теоретически значение $\Delta\alpha$ должно быть равно нулю, а $\alpha^* = H$, но на практике, вследствие конечности выборки, такие условия не выполняются. Что же касается значения $F(\alpha^*)$, то оно равно фрактальной размерности точек, для окрестности которых выполняется масштабирующее соотношение $M(\delta,q) \sim |\delta|^{\rho(q)}$.

Если оценивать спектр $F(\alpha)$ в скользящем временном окне, то его эволюция может дать информацию об изменении структуры хаотических пульсаций ряда. Обычно $F(\alpha^*) = 1$, но встречаются окна, для которых $F(\alpha^*) < 1$. Напомним, что в общем случае (не только для анализа временных рядов) величина $F(\alpha^*)$ равна фрактальной размерности носителя мультифрактальной меры.

7. *Пример анализа данных*. На рис.1(а) представлен график временного ряда наблюдений за вариациями электротеллурических потенциалов на Камчатке из работы. Общая продолжительность наблюдений составляет 4 года 8 месяцев (с 01.10.1996 по 23.06.2001),

интервал взятия отсчетов 1 час, общее число отсчетов N=41447. Рис.1(б) представляет приращения временного ряда на рис.1(а).

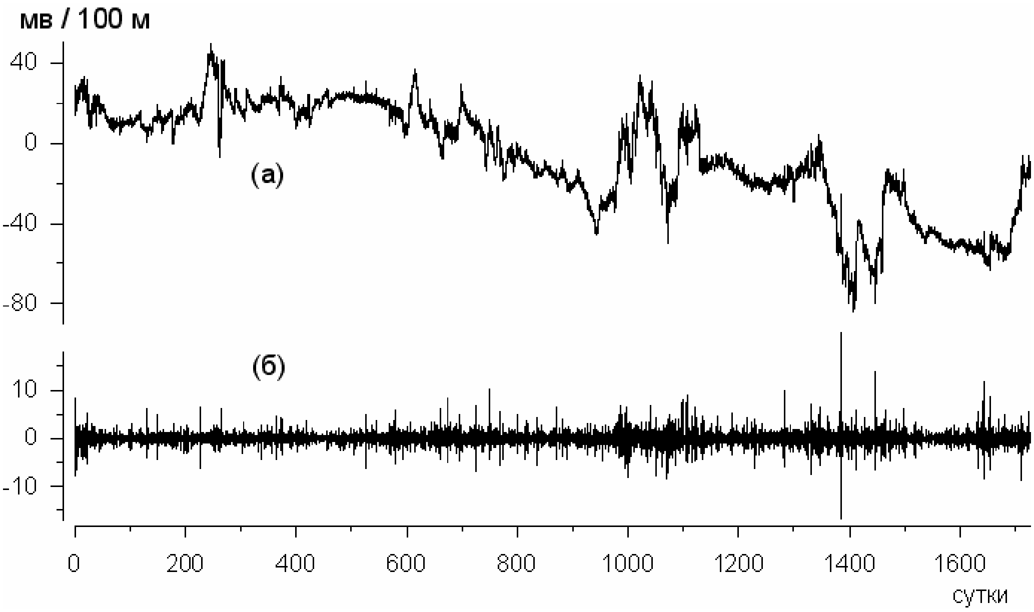

Рис.1. Графики исходного ряда наблюдений и его приращений.

Рис.2 иллюстрирует три различных метода оценки постоянной Херста для временного ряда, представленного на рис.1. На рис.2(а) оценка получена как коэффициент наклона прямой наилучшего приближения (штриховая линия) к графику логарифма оценки спектра мощности в зависимости от логарифма периода. Оценка спектра мощности получена методом максимальной энтропии Бурга, как результат усреднения спектральных оценок в скользящем временном окне длиной 2048 отсчетов с использованием модели авторегрессии 200-го порядка внутри каждого окна. На графике рис.2(а) видны спектральные пики, соответствующие 8, 12 и 24-часовым периодическим компонентам. На рис.2(б) использована оценка (44)-(45), ортогональный вейвлет выбран из условия минимума энтропии распределения квадратов вейвлет-коэффициентов [1] и им оказался вейвлет Добеши 18-го порядка (обнуляющий 9 первых моментов). Наконец, рис.2(б) иллюстрирует применение статистики (43).

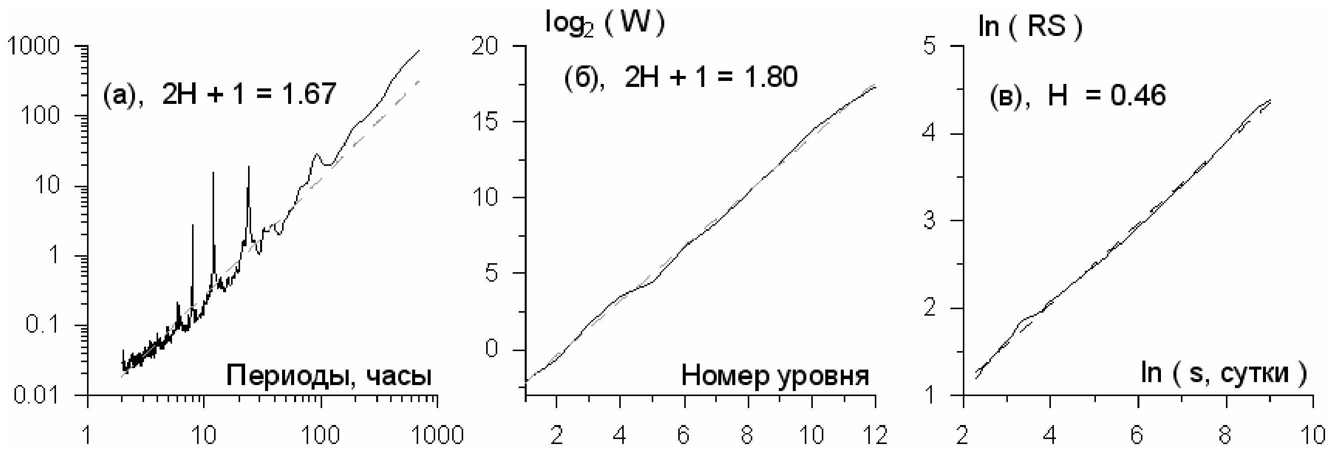

Рис.2. Оценка показателя Херста тремя различными методами.

Эти методы дали значения постоянной Херста 0.37, 0.40 и 0.46. Различие в оценках не очень существенно, но не пренебрежимо мало. Оценка на рис.2(а) представляется наименее надежной из-за влияния монохроматических пиков. Кроме того, следует учесть, что сигнал, возможно, является мультифракталом – в этом случае отличия возникают просто вследствие различия методов и различий в «реакции» на них данных, имеющих на самом деле иную природу. Для выяснения этого вопроса оценим спектр сингулярности для приращений временного ряда (рис.1(б)) – см. рис.3.

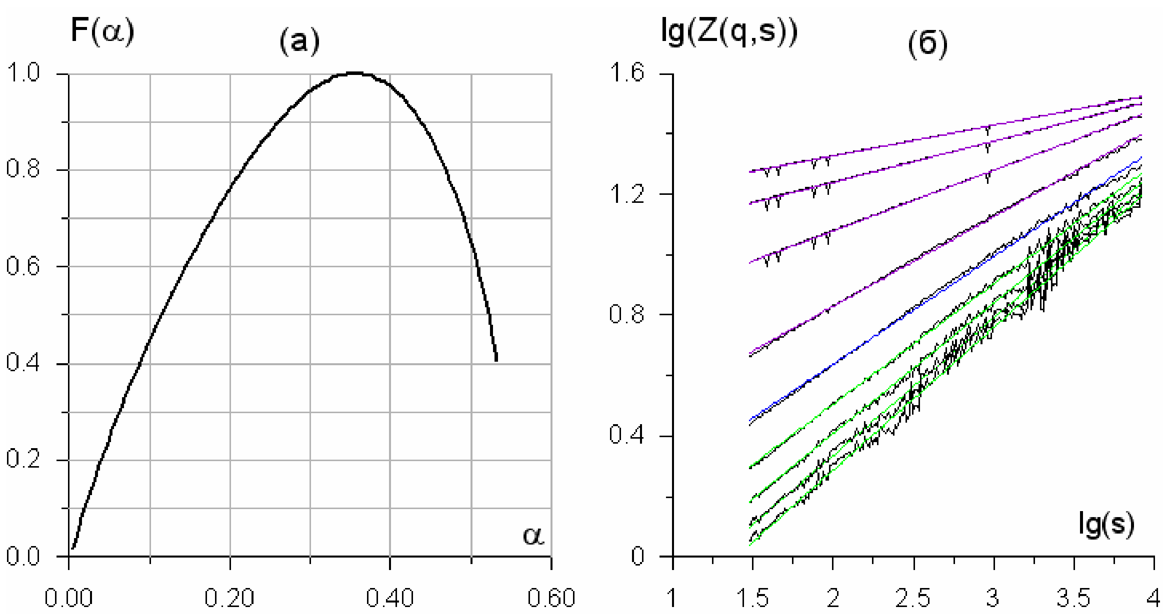

Рис.3. Оценка показателя спектра сингулярности (а) и зависимостей $Z^{(m)}(q,s) \sim s^{h(q)}$ для различных показателей степени q (б)

На рис.3(б) представлены графики как самих величин $\lg(Z^{(m)}(q,s))$, так и линейных трендов, подогнанных к ним для 9 различных значений степени q. Наклон графиков линейных трендов есть ничто иное, как функция $h(q)$, по значениям которой вычисляется показатель массы $\tau(q) = qh(q) - 1$, а далее, согласно формуле (54), и сам спектр сингулярности. Рис.3(б) демонстрирует хорошее соответствие линейному закону зависимости $\lg(Z^{(m)}(q,s))$ от $\lg(s)$, то есть, самоподобность сигнала. На рис.3(б) приведены графики зависимостей с подогнанными линейными трендами для последовательных значений степени q (сверху вниз): 10, 7.5, 5, 2.5, -0.05, -2.5, -5, -7.5 и -10. Масштаб s изменялся начиная с минимального значения 30 отсчетов (30 часов) – чтобы усреднить периодические компоненты, максимальный период которых равен 24 часам. Следовательно, как это видно из рис.3(б), сигнал действительно является мультифракталом.

Для получения временных рядов эволюции значений α^* было выбрано скользящее окно длиной 672 часовых отсчетов, то есть 28 суток, взаимное смещение соседних окон равнялось 24 отсчетам или 1 суткам. Масштабно-зависимые тренды не устранялись, так как рассматривался ряд в приращениях. Функция $h(q)$ в зависимости $Z^{(m)}(q,s) \sim s^{h(q)}$ оценивалась в каждом окне для масштабов s, изменяющихся от минимального значения 30 отсчетов до максимального, равного одной пятой длины окна. При длине 672 отсчетов, таким образом, максимальный масштаб равен 137 часов. Кроме того, для этих же временных окон были получены оценки на основе использования статистик (43) для ряда в приращениях и (44)-(45) и для исходного ряда. При этом, при построении оценки на основе ортогональных вейвлет-разложений производилось предварительное устранение тренда внутри каждого окна полиномом 4-го порядка. Эта предварительная операция удаляла статистически незначимые низкочастотные вариации и, что более важно, уменьшало искажения значений вейвлет-коэффициентов на концах выборки вследствие ее конечности. В каждом окне искался свой ортогональный вейвлет из условия минимума энтропии распределения квадратов вейвлет-коэффициентов.

Из рис.4(а) и (б) видно, что оба метода, (43) и (44)-(45) дают, фактически одно и то же, за исключением взаимного смещения, которое может быть вызвано несоответствием данных монофрактальному поведению.

Что же касается прочих графиков на рис.4, то они могут быть использованы при мониторинге объектов для выделения аномальных признаков. Первым признаком аномального поведения может служить «провал» вниз значения $F(\alpha^*)$ - это может свидетельствовать о появлении во временном ряду составляющей, поведение которой достаточно сильно отличается от поведения случайной самоподобной кривой. Кроме того, вариации наиболее типичного показателя Гельдера-Липшица α^* и ширины носителя $\Delta\alpha$

спектра сингулярности могут также нести информацию об изменении свойств ряда, которые скрыты от их выделения более простыми средствами анализа типа линейной фильтрации.

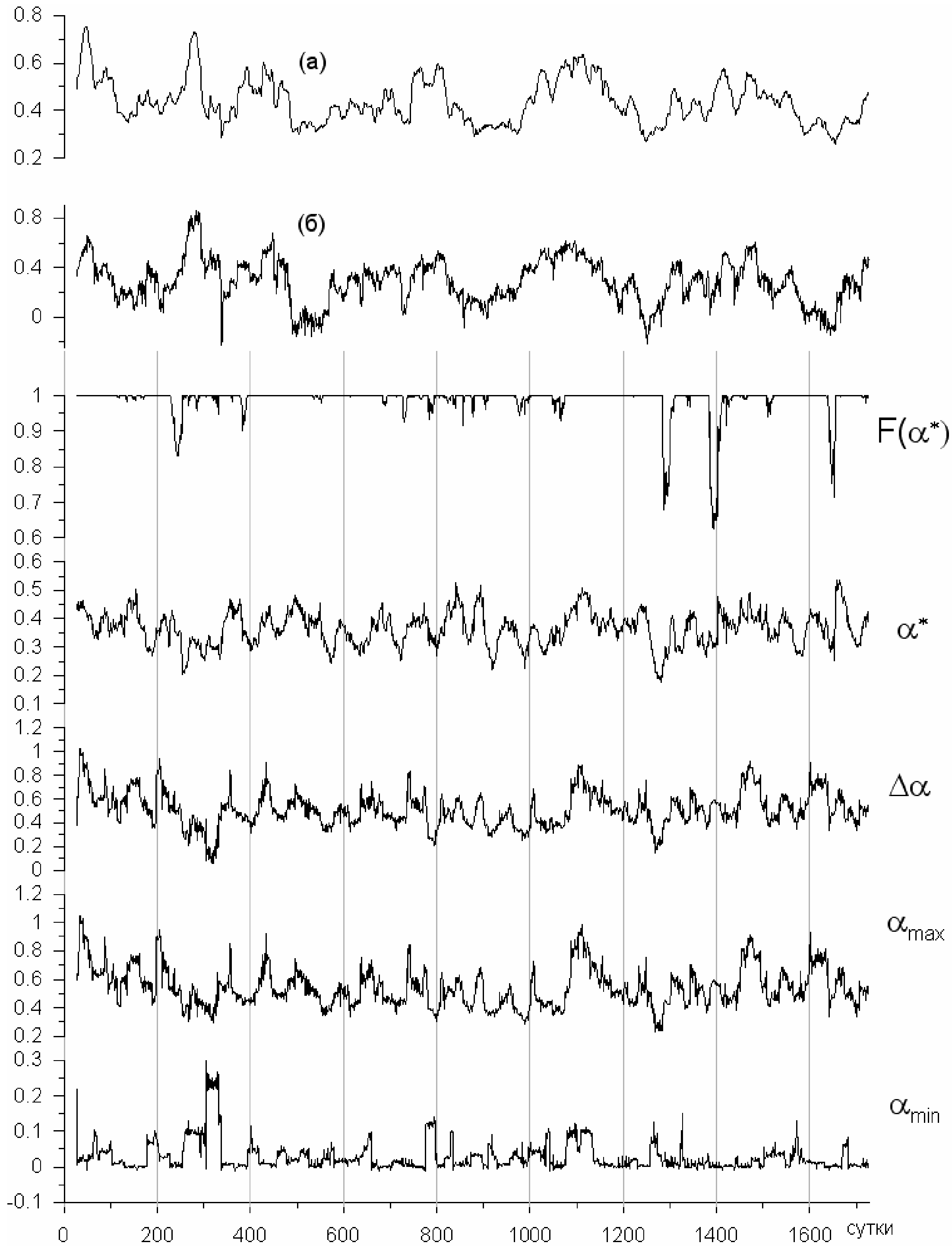

Рис.4. (а) – оценки вариаций постоянных Херста в скользящем временном окне длиной 672 часа RS-методом (формула (43)); (б) – оценка с использованием ортогональных вейвлет разложений содержимого каждого из окон (формулы (44) и (45)). Прочие графики представляют изменения параметров спектра сингулярности (обозначения – в тексте).

Задания.

1. Пусть $\xi(t), \quad t = 1,...,N = 10^4$ - выборка гауссовского белого шума с дисперсией σ^2, которая может сгенерирована на основе использования центральной предельной теоремы: $\xi(t) \approx \sigma \cdot \left(\sum_{k=1}^{12} \eta_k^{(t)} - 6 \right)$, где $\eta_k^{(t)}$ - независимые значения датчика псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале $[0,1]$. Рассмотреть сигнал случайных блужданий, полученный путем суммирования значений белого шума: $x(t) = x(t-1) + \xi(t), \quad x(0) = 0$. Построить график этого сигнала. Эта случайная последовательность является хорошим приближением к классическому броуновскому движению. Найти постоянную Херста для $x(t)$ 2-мя способами: с помощью оценки спектра мощности и использования соотношения $S_{xx}(\omega) \sim \omega^{-(2H+1)}, \quad \omega \to 0$ и оценки среднего значения квадратов вейвлет-коэффициентов при ортогональном разложении по финитным базисным функциям и использования соотношения $W_\alpha \sim (s_\alpha)^{2H+1}$, где s_α - характерный временной масштаб уровня детальности α. Для оценок можно использовать интерактивный пакет Spectra_Analyzer.
2. Сгенерировать выборку самоподобного сигнала от дискретного времени $x(t)$, $t = 1,...,N = 2^{14} = 16384$ и постоянной Херста $H, 0 < H < 1$, используя дискретное преобразование Фурье. Для этого выполнить следующую последовательность операций:

2.1. Создать выборку гауссовского белого шума $\xi(t), \quad t = 1,...,N$ с дисперсией σ^2.

2.2. Вычислить прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от $\xi(t)$:

$$d_\xi(k) = \sum_{t=1}^{N} \xi(t) \cdot \exp(-i\omega_k (t-1)), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}(k-1), \quad k = 1,...,N \tag{55}$$

2.3. Вычислить новые коэффициенты Фурье с учетом цикличности ДПФ:

$$\tilde{d}_\xi(k) = d_\xi(k) \cdot \left(\omega_k\right)^{-H-0.5}, \quad \tilde{d}_\xi(N-k+2) = \tilde{d}_\xi^*(k), \quad k = 2,...,N/2 \tag{56}$$

В формуле (56) “*” означает комплексное сопряжение. Заметим, что коэффициенты Фурье $d_\xi(1)$ и $d_\xi(N/2+1)$, соответствующие нулевой частоте и частоте Найквиста, не преображаются и для них значения новых коэффициентов Фурье (56) равны их прежним значениям.

2.4. Вычислить обратное преобразование Фурье от новых коэффициентов:

$$z(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{d}_\xi(k) \cdot \exp(i\omega_k (t-1)), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}(k-1), \quad t = 1,...,N \tag{57}$$

2.5. Положить $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$.

Операции прямого и обратного ДПФ (55) и (56) вычислить, используя быстрое преобразование Фурье. Для полученного сигнала $x(t)$ построить графики для различных значений параметра $H, 0 < H < 1$ и оценить его, используя оценки спектра мощности и ортогональные вейвлет-разложения, аналогично п.1.

3. Сгенерировать выборку самоподобного сигнала от дискретного времени $x(t)$, $t = 1,..., N = 2^m + 1$, где $m = 14$ и с постоянной Херста $H, 0 < H < 1$, используя метод последовательных сложений Фосса [2]. Для этого инициализировать массив $x(t)$ нулевыми значениями, а затем совершить последовательно $m+1$ итераций. Пусть $k = 1,..., m+1$ - номер итерации. На каждом k-ом шаге положить $\sigma_k^2 = \sigma_0^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2H(k-1)}$, где σ_0^2 - параметр метода, можно положить $\sigma_0^2 = 1$. Положить $n_k = 2^{m-k+1}$, $\tau_j^{(k)} = 1 + n_k \cdot (j-1)$, $j = 1,..., 2^{k-1} + 1$ и в точках $\tau_j^{(k)}$ сигналу $x(t)$ присвоить независимые случайные гауссовские значения с нулевым средним и дисперсией σ_k^2: $x(\tau_j^{(k)}) = \xi_j^{(k)}$, $\xi_j^{(k)} \sim \mathbb{N}(0, \sigma_k^2)$. Далее эти значения линейно интерполировать в точки $(\tau_{j-1}^{(k)} + \tau_j^{(k)})/2$, находящиеся посредине: $x((\tau_{j-1}^{(k)} + \tau_j^{(k)})/2) = (x(\tau_{j-1}^{(k)}) + x(\tau_j^{(k)}))/2$. На этом k-ый шаг завершен и итерация повторяется для $k+1$. Для полученного сигнала $x(t)$ построить графики для различных значений параметра $H, 0 < H < 1$ и оценить его, используя оценки спектра мощности и ортогональные вейвлет-разложения, аналогично п.1.

4. Используя формулу (21) написать программу и сгенерировать с ее помощью дискретную выборку объема $N = 10^5$ мультипликативного биномиального процесса для различных вероятностей $0 < p < 0.5$. Построить их графики для всей выборки и для ее отдельных частей: половины, одной четверти, одной восьмой и т.д. и убедиться в инвариантности этих графиков от масштаба.

5. Оценить мультфрактальные спектры сингулярности для сигналов из пп.1-4 методом DFA, используя интерактивную программу Spectra_Analyzer.

6. Запрограммировать метод вычисления постоянной Херста в скользящем временном окне на основе использования формул (41)-(43) и применить его к анализу сигналов из пп.1-4. Учесть, что перед использованием метода (41)-(43) необходимо перейти к временным рядам в приращениях.

Литература.

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005, 671с.
2. Федер Е. Фракталы. М., Мир, 1991, 254с.
3. Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs. // Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1951, Vol.116, pp.770-808
4. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Konscienly-Bunde E., Havlin S., Bunde A., and Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, //Physica A, 2002, 316, 87–114.
5. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. Some long-term properties of geophysical records.//Water Resources Res., 1969, Vol.5, pp.321-340.
6. Mandelbrot, B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman, 1983, 537 p.