Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений", раздел "Геология и разведка"

№ 3437-78 Деп УДК 550.837:518

М.Н.Юдин

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО КАБЕЛЯ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

Москва, 1978

При решении нестационарных задач методом сеток необходимо задавать краевые и начальные условия. Обычно граничные условия находятся согласно предположению о том, что вторичное (аномальное) поле, вызванное локальной неоднородностью, в некоторой метрике мало по сравнению с так называемым "нормальным" полем – полем в отсутствии возмущающего тела. Для задания краевых условий нормальное поле нужно рассчитывать как в земле, так и в некоторых случаях в воздухе.

Начальные условия целесообразно задавать в такой момент времени t_o, когда поле либо не зависит от геоэлектрических свойств земли, либо может быть аппроксимировано нормальным полем**.**

Рассмотрим с этих позиций гармонически изменяющееся и нестационарное поле БДК. В случае гармонически изменяющегося тока в кабеле примем зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Нестационарное поле кабеля создается ступенеобразным изменением тока в момент времени $t = 0$:

$$J_0\left(t\right) = J \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ J, \ t \geq 0, \end{cases}$$

где $1(t)$ - единичная функция Хевисайда.

Пусть на высоте h_o от поверхности земли находится бесконечно-длинный кабель (БДК),. проекция которого на плоскость $z = 0$ (поверхность земли) совпадает с осью x. Нижнее проводящее полупространство $z \geq 0$ соответствует земле, а верхнее полупространство z < 0 – воздуху.

Рассмотрим нестационарное поле БДК в случае однородной земли для любых z.

1. Верхнее полупространство.

Для $\breve{A}_x(-i\omega)$ в воздухе, согласно [2], имеем:

$$\breve{A}_{xj}(r,z)=\frac{I\mu_0}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-n_0(h_0+z)}}{n_0}+\frac{1-\frac{n_1}{n_0R^*}}{n_0+\frac{n_1}{R^*}}e^{-n_0(h_0-z)}\right]\cos my\,dm \quad (3)$$

где: $R^*=R^*(m,-i\omega,h_j,\rho_j)$, $n_j=\sqrt{m^2+k_j^2}$,

$k_j^2=-i\omega\mu\sigma_j$ -волновое число,

ω – круговая частота,

$\mu=4\pi10^{-7}$ - магнитная проницаемость,

σ_j - удельная электропроводность,.

h_j - мощность пластов горизонтально-слоистого n-слойного разреза, *j= 0, 1,…, n.*

Мощность h_n неограничена, n_0 соответствует воздуху. Для того, чтобы получить выражение для компонент поля в замкнутом виде, рассмотрим простейший случай, когда нижнее полупространство однородно и имеет волновое, число k_1 ,а воздух является изолятором (k_o = 0). Тогда $n_0=m$ и R^*=1 и выражение (3) легко преобразуется к виду:

$$\breve{A}_{xj}(r,z)=\frac{I\mu_0}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-mh_0}\left[e^{-mz}-e^{mz}-\frac{2m^2-2mn_1}{k_1^2}e^{mz}\right]\frac{\cos(my)}{m}dm \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$I_1=\int_0^{\infty}\left(e^{-mz}-e^{mz}\right)e^{-mh_0}\frac{\cos(my)}{m}dm \quad (5)$$

$$I_2=\int_0^{\infty}me^{-m(h_0-z)}\cos(my)\,dm \quad (6)$$

$$I_3=\int_0^{\infty}\frac{n_1}{k_1^2}e^{-m(h_0-z)}\cos(my)\,dm \quad (7)$$

тогда

$$\breve{A}_x(r,z)=\frac{I\mu_0}{2\pi}\left(I_1-\frac{2}{k_1^2}I_2+2I_3\right) \quad (8)$$

Интегралы I_2 и I_3 являются табличными [2]:

$$I_2=\frac{(h_0-z)^2-y^2}{(h_0-z)^2+y^2}.$$

Обозначим:

$$\alpha:=\sqrt{\mu\sigma_1}\left[(h_0-z)+iy\right]. \quad (9)$$

С учетом (9)

$$I_3=\frac{S_{1,1}\left(\alpha\sqrt{-i\omega}\right)}{2\alpha\sqrt{-i\omega}}+\frac{S_{1,1}\left(\bar{\alpha}\sqrt{-i\omega}\right)}{2\bar{\alpha}\sqrt{-i\omega}}. \quad (10)$$

где $S_{1,1}(\cdot)$ - функция Ломмеля.

Интеграл I_1 можно рассматривать как преобразование Лапласа функции

$$-\frac{\sin(izm)\cos(my)}{m}.$$

По таблицам [3] находим

$$I_1=-arth\frac{2zh_0}{h_0^2+y^2+z^2}. \quad (11)$$

Найдем асимптотику для I_1,I_2,I_3 при $h_0\to\infty$ и y = 0:

$$I_1=-2\frac{z}{h_0}+O\left(h_0^{-2}\right),\quad I_2=O\left(h_0^{-2}\right),\quad I_3=\frac{1}{k_1h_0}+O\left(h_0^{-2}\right).$$

Подставляя (12)- (14) в (8) в учитывая (1),(2),получим

$$E_x=\frac{J\mu i\omega}{\pi k_1h_0}(1+k_1z)+O\left(h_0^{-2}\right), \quad (15)$$

$$B_y = -\frac{J\mu}{\pi h_0} + O\left(h_0^{-2}\right). \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) с точностью до постоянного множителя $J\mu/\pi h_0$ и слагаемого $O\left(h_0^{-2}\right)$ совпадают с соответствующими соотношениями, получаемыми исходя из предположения о плоской волне, падающей на поверхность земли.

В дальнейшем для нахождения нестационарного поля будем пользоваться таблицами обратного преобразования Лапласа-Карсона, поэтому введем обозначение:

$$f(t) = C^{-1}\left[\breve{f}(p)\right],\ p = -i\omega,$$

где C^{-1} оператор обратного преобразования Лапласа-Карсона.

По таблицам [3]

$$\varphi(\alpha,t) = C^{-1}\left[\sqrt{p}S_{1,1}\left(\alpha\sqrt{p}\right)\right] = \frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{\alpha^2}{4t}\right)erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad (17)$$

Тогда

$$A_x(t) = C^{-1}\left[\breve{A}_x\right] = \frac{I\mu_0}{2\pi}\left\{I_1 - 2I_2\frac{t}{\mu\sigma_1} + \int_0^t\left[\frac{1}{\alpha^2}\varphi(\alpha,t) + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\varphi(\bar{\alpha},t) + \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{\sqrt{\pi t}\left|\alpha^2\right|}\right]dt\right. \qquad (18)$$

Найдем асимптотику при $h_0 \to \infty$ и y = 0 для компоненты $E_x(t)$:

$$E_x(t) = \frac{I\mu}{\pi h_0\sqrt{\mu\sigma_1\pi t}}\left(1 - z\sqrt{\mu\sigma_1\pi t}\right) + O\left(h_0^{-2}\right) \qquad (19)$$

Выражение (19) с точностью до множителя $J\mu/\pi h_0$ и слагаемого $O\left(h_0^{-2}\right)$ совпадает о нестационарным полем МТЗ, рассмотренным в работе [1]. Соотношение (19) немедленно следует также из (15),т.к. $C^{-1}\left[\sqrt{p}\right] = 1/\sqrt{\pi t}$.

<u>2. Нижнее полупространство</u>

По таблицам [3] находим

$$C^{-1}\left[p\frac{\exp\left(-z\sqrt{z^2\mu\sigma_1\left(p + m^2/\mu\sigma\right)}\right)}{\frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}} + \sqrt{p + \frac{m^2}{\mu\sigma_1}}}\right] = \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{m^2 t}{\mu\sigma_1} - \frac{z^2\mu\sigma_1}{4t}\right) - \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}}ep(mz)erfc\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma_1}}{2\sqrt{t}} + \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right).$$

Обозначим $\beta = \sqrt{\mu\sigma_1}\left(h_0 - iy\right)$. (21)

Воспользуемся табличными интегралами [4]

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-m^2 t/\mu\sigma_1 - mh_0}\cos(my)\,dm, \qquad (22)$$

$$J_2 = \int_0^\infty me^{-m(h_0 - z)}erfc\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma_1}}{2\sqrt{t}} + \frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right)\cos(my)\,dm \qquad (23)$$

Введем также обозначение

$$\psi(\alpha,t) = \exp\left(\frac{\beta^2}{4t}\right)erfc\left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{\bar{\beta}^2}{4t}\right)erfc\left(\frac{\bar{\beta}}{2\sqrt{t}}\right), \qquad (24)$$

тогда

$$J_1 = \sqrt{\pi\mu\sigma_1}\psi(\beta,t)/\left(4\sqrt{t}\right). \qquad (25)$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$a^2 := t/\mu\sigma_1 \qquad (26)$$

тогда [3]

$$J_2 = -\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial h_0}\left[f(\alpha,h_0) + f(\bar{\alpha},h_0)\right], \qquad (27)$$

где

$$f\left(\alpha,h_0\right)=\mathrm{e}^{z\alpha/2a\sqrt{t}}\left[\alpha^{-1}\sqrt{\mu\sigma_1}\left(1-\exp(-\frac{\alpha^2}{4t})erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^{z/2\alpha}e^{-\alpha u/\sqrt{t}}erfc\left(u\right)du\right]$$

С учетом (24), (27)

$$A_x\left(t\right)=\frac{I\mu_0}{\pi\sqrt{\mu\sigma_1}}\int\limits_0^t\left(\frac{e^{-z^2/4a}}{\sqrt{\pi t}}J_1-\frac{1}{\sqrt{\mu\sigma_1}}J_2\right)dt \qquad (28)$$

При $h_0\to\infty$ $J_1=h_0^{-1}+O(h_0^{-2}),\ J_2=O(h_0^{-2}),$ поэтому

$$E_x\left(t\right)=\frac{J\mu}{\pi h_0}\frac{e^{-z^2\mu\sigma_1/4t}}{\sqrt{\mu\sigma_1\pi t}}+O\left(h_0^{-2}\right). \qquad (29)$$

Формула (29) совпадает с точностью до $O\left(h_0^{-2}\right)$ с нестационарным полем МТЗ в однородной проводящей земле.

Таким образом, по формулам (18) и (28) можно рассчитать значения поля для любых значений аргументов, что позволяет рассчитать краевые условия при решении двумерных нестационарных задач для моделей среды содержащей локальную неоднородность.

Очевидно

$$\lim_{t\to 0+}A_x\left(t\right)=\begin{cases}-\dfrac{I\mu}{2\pi}arth\dfrac{2zh_0}{h_0^2+y^2+z^2},\left|z\right|<h_0,\\ 0,\qquad z>0,\end{cases} \qquad (30)$$

поэтому целесообразнее решать методом сеток задачу о нестационарном поле кабеля относительно компоненты A_x,т.к. в этом случае в момент $t=0+$ величина A_x не зависит от свойств нижнего полупространства.

При решении задачи относительно $E_x\left(t\right)$ начальный момент времени $t_0>0$ следует выбирать достаточно малым, чтобы величина $E_x\left(y,z,t_0\right)$ могла быть рассчитана приближе-

нно по формулам для однородного полупространства $z > 0$. Такое t_0 всегда можно выбрать, если в верхней части разреза имеется пласт возможно переменной мощности, но с постоянными электрическими свойствами.

Расчет нормального поля $A_x\left(y,z,t_0\right)$ или $E_x\left(y,z,t_0\right)$ в слоистой среде может быть выполнен численно по формуле (3) с использованием обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим двумерную прямоугольную область D

$$D=\left\{\left(y,z\right)\in R^2\mid\left(y_1<y<y_2\right)\wedge\left(-d_1<z<d_2\right)\right\},$$

где $d_1>0$.

Пусть область D_0

$$D_0=\left\{\left(y,z\right)\in D\mid\left(y_1<y<y_2\right)\wedge\left(z<0\right)\right\}$$

соответствует воздуху, а область $\overline{D}_0=D\setminus D_0$ соответствует земле и содержит локальную неоднородность. Тогда в области D получаем нестационарную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}=\mu\sigma\left(y,z\right)\frac{\partial A_x}{\partial t},\ \left(y,z\right)\in D,$$

с краевыми условиями (18) для части границы z < 0 и (28) для части границы области D при z > 0 и начальном условии (30).

Расстояние от поверхности земли до "верхней" границы d_1 следует выбирать таким, чтобы вторичным полем на ней, вызванным локальной неоднородность,ю можно было пренебречь. Тогда на границе $z = -d_1$поле можно считать постоянным и равным

$$A_x\left(y_1,-d_1,t\right)=A_x\left(y_2,-d_1,t\right).$$

Из аналогичных соображений выбирается, величина d_2. Частным случаем нестационарной задачи для БДК является нестационарная задача магнитотеллурических зондирований, если в расчетах использовать достаточно большую величину h_0 .

Автор выражает благодарность проф. Л.Л.Ваньяну за обсуждение содержания работы и критические замечания.

Литература

1. Бердичевский М.Н., Безрук И.А., Дмитриев, В.И. .Ключкин В.Н. Куликов А.В. Об использовании переходных характеристик при МТЗ. В сб. «Магнитотеллурические методы изучения строения земной коры и верхней мантии» ,№ 4, Наука, 1969.

2. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М., Недра, 1965.

3. Диткин В.А. «Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. Высшая школа,1965.