МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯСССР

Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений"
раздел "Геология и разведка"

УДК 550.837:518

№2756-82 Деп.

М.Н.Юдин

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В ПРЯМЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭКЕКТРЙКИ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ПОЛЯ

Москва, 1982

Вариационный подход к решению задач геоэлектрики рассмотрен в работах [5-9]. Для задач электродинамики полых систем эта проблемы обсуждаются в монографии В. В. Никольского [5]. В настоящей работе она будут рассмотрена с точки зрения использования вариационных формулировок задач геоэлектрики для построения разностных схем. Результаты работ [6,7] обобщаются на модели среды с переменной магнитной проницаемостью, так как недоучет ее влияния мажет привести к существенным погрешностям интерпретации полевых материалов (см., например, [3]).

Будем полагать, что комплексные амплитуды компонент векторов напряженности электрического $\boldsymbol{E}$ и магнитного $\boldsymbol{H}$ полей изменяются по закону $e^{-i\omega t}$ Параметры среды ε (диэлектрическая проницаемость), μ (магнитная проницаемость) и σ (удельная электропроводность) будем считать кусочно-гладкими функциями декартовых координат x, y, z.

Используя систему единиц *СИ* и общепринятые обозначения, запишем уравнения Максвелла в следующем виде:

$$rot\mathbf{H} = \hat{\sigma}\mathbf{E} + j_{cm},$$
$$rot\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1}$$

где $\hat{\sigma} = \sigma - i\omega\varepsilon$.

Из (1) поочередным исключением $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ получают:

$$\begin{cases} rot\dfrac{1}{\hat{\sigma}}rot\,\mathbf{H}+\dfrac{k^2}{\hat{\sigma}}\mathbf{H}=rot\left(\dfrac{\mathbf{j}_{cm}}{\hat{\sigma}}\right), \\ rot\dfrac{1}{\mu}rot\mathbf{E}+\dfrac{k^2}{\mu}\mathbf{E}=i\omega\mathbf{j}_{cm}, \end{cases} \quad (2)$$

где $k^2=-i\omega\mu\hat{\sigma}$.

Электромагнитное поле в неоднородной среде удобно представать как сумму нормального $\boldsymbol{E^n}$ и $\boldsymbol{H^n}$ аномального $\boldsymbol{E^a}$ и $\boldsymbol{H^a}$ полей:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^a+\mathbf{E}^n, \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^a+\mathbf{H}^n.$$

Под нормальным полем будем понимать поле, соответствующее заданному источнику для относительно простой (по отношению к рассматриваемой) модели среды, для которой известно решение прямой задача. Примером нормальных полей по отношению к классу трехмерно неоднородных моделей среды могут служить решения прямых задач для одномерных, двумерных или более "простых" трехмерных геоэлектрических разрезов.

Уравнения Максвелла для нормальных полей с тема же сторонними источниками электромагнитного поля $\mathbf{j}_{cm}$, что а в (1) имеют вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H}^n=\hat{\sigma}_n\mathbf{E}^n+\mathbf{j}_{cm}, \\ rot\mathbf{E}^n=i\omega\mu_n\mathbf{H}^n. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\hat{\sigma}_n=\sigma_n-i\omega\varepsilon_n$, σ_n,ε_n, μ_n – проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемости нормального разреза. Вычитая аз (1) соответствующие уравнения системы (3), после преобразования получим дифференциальные уравнения аномальных полей:

$$\begin{gathered} rot\frac{1}{\mu}rot\mathbf{E}^a+\frac{k^2}{\mu}\mathbf{E}^a=i\omega\mathbf{j}_a+i\omega rot\left[\frac{\mathbf{j}_b}{\mu}\right], \\ \mathrm{rot}\frac{1}{\hat{\sigma}}\mathrm{ro}\,t\mathbf{H}^a+\frac{k^2}{\hat{\sigma}}\mathbf{H}^a=i\omega\mathbf{j}_b+\mathrm{rot}\left[\frac{\mathbf{j}_a}{\hat{\sigma}}\right]. \end{gathered} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{j}_a=\left(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_n\right)\mathbf{E}^n,$$

$$\mathbf{j}_b=\left(\mu-\mu_n\right)\mathbf{H}^n.$$

Введем обозначения [5]

$$L_E:=rot\frac{1}{\mu}rot,$$

$$L_H:=rot\frac{1}{\sigma}rot,$$

тогда уравнения (3)-(4) можно записать в обобщенном виде:

$$L\,\mathbf{v}+\frac{k^2}{\mu}\mathbf{v}=\mathbf{f}$$

где $L:=rot\eta^{-1}rot$.

Функция $\mathbf{v}$ должна принадлежать области определения D_L оператора L $\left(\mathbf{v}\in D_L\right)$. Такие функции называются <u>допустимыми</u> для оператора L. Для получения (2), (4) из (5) нужно сделать замены в соответствии с таблицей 1.

Следуя [5], будем использовать обозначения

1. $\mathbf{W}\in\Omega_{\mathrm{rot}}$, если $\mathbf{W}$ - кусочно-гладкая вектор-функция, сохраняющая непрерывность тангенциальной составляющей $\mathbf{W}_\tau$ на поверхности разрыва $\partial\Omega_i$, причем, если точка P $\in\partial\Omega_i$, то

$$rot_P:=\left(rot_+ + rot_-\right)/2.$$

Таблица 1

u	L	η	**f**
E	L_E	μ	$i\omega\,\mathbf{j}_s$
$\mathbf{E}^a$	L_E	μ	$i\omega\cdot rot\left[\mu^{-1}(\mu-\mu^n)\mathbf{H}^n\right]+i\omega(\sigma-\sigma^n)\mathbf{E}^n$
H	L_H	σ	$rot\left[\mathbf{j}_s\sigma^{-1}\right]$
$\mathbf{H}^a$	L_H	σ	$rot\left[\sigma^{-1}(\sigma-\sigma^n)\mathbf{E}^n\right]+i\omega\cdot(\mu-\mu^n)\mathbf{H}^n$

Знаки ‘ +’ и ‘–’ соответствуют разным сторонам поверхности $\partial\Omega$.

2. $\mathbf{W} \in \Omega_{\text{div}}$, если **W** - кусочно-гладкая функция, сохраняющая непрерывность нормальной составляющей $\mathbf{W}_n$ на поверхности разрыва $\partial\Omega$, причем, если точка $P\in\partial\Omega$, то

$$div = \left(div_+ + div_-\right)/2 .$$

Выделим некоторую область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega_e$. Скалярное произведение для функций из комплексного пространства L^2 (Ω) определяют следующим образом [4]:

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}^* dv ,$$

где $\mathbf{w}^*$ комплексно сопряжена $\mathbf{w}$. Аналогично записывается скалярное произведение для поверхности $\partial\Omega$:

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\big|_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}^* ds .$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L\mathbf{v}+\dfrac{k^2}{\eta}\mathbf{v}=\mathbf{f} \\ l\mathbf{v}\big|_{\partial\Omega_e}=\vec{\psi}, \\ \left[\mathbf{v}_\tau\right]\big|_{\partial\Omega_i}=0,\ \left[\left(\dfrac{1}{\eta}rot\mathbf{v}\right)_\tau\right]\Bigg|_{\partial\Omega_i}=0, \end{cases} \qquad (6)$$

где l – некоторый линейный дифференциальный оператор, $\left[\vec{\varphi}\right]\big|_{\partial\Omega_i}$ - скачек функции $\vec{\varphi}$ при переходе через поверхность разрыва свойств среды $\partial\Omega_i$.

Наиболее просто вариационный функционал, соответствующий задаче (6), строится для самосопряженного оператора $\tilde{L}=L+k^2\eta^{-1}$. В этом случае численное решение экстремальной задачи позволяет получить симметричную матрицу системы разностных уравнений [2].

Как известно[2,4], оператор L^* называют сопряженным по отношению к оператору L , если для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in D_L$ выполняется равенство

$$\left(L\mathbf{u},\mathbf{v}\right)=\left(\mathbf{u},L^*\mathbf{v}\right).$$

С точностью до значений интегралов по границам $\partial\Omega$. Если $L^*=L$, то оператор называют самосопряженным (эрмитовым).

Выясним условия, при которых L эрмитов. С этой целью рассмотрим разность

$$A_L = \left(L\mathbf{u},\mathbf{v}\right) - \left(\mathbf{u}, L^*\mathbf{v}\right) =$$
$$= \int_\Omega \left\{ k^2\eta^{-1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^* - \mathbf{u}\cdot\left(k^2\eta^{-1}\mathbf{v}\right)^* \right\} dv +$$
$$+ \int_\Omega \left\{ rot\frac{1}{\eta}rot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^* - \mathbf{u}\cdot\left(rot\frac{1}{\eta}rot\mathbf{v}\right)^* \right\} dv.$$

Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса, получим

$$A_L = \int_\Omega \left\{ k^2\eta^{-1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^* - \mathbf{u}\cdot\left(k^2\eta^{-1}\mathbf{v}\right)^* + \eta^{-1}rot\mathbf{u}\cdot rot\mathbf{v}^* - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\eta^*}rot\mathbf{v}^*\cdot rot\mathbf{u} \right\} dv + \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{\eta}rot\mathbf{u},\mathbf{v}^*\right] - \left[\frac{1}{\eta^*}rot\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\right] \right\} d\mathbf{s},$$

где $\left[\mathbf{a},\mathbf{b}\right]$ – векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Объемные интегралы уничтожается, когда все подынтегральные функции вещественны. Эти условия выполняются, если к уравнениям Максвелла применить преобразование Лапласа-Карсона и затем рассматривать функции на вещественной оси полуплоскости сходимости интеграла Лапласа.

Для того, чтобы построить функционал, стационарный на решении задач типа (6) для несамосопряженных операторов, вводят понятие сопряженной задачи для оператора L^*. Очевидно

$$L^* = rot\frac{1}{\eta^*}rot + \frac{k^{*2}}{\eta^*},$$

так как

$$\left(L\mathbf{u},\mathbf{v}\right) - \left(\mathbf{u}, L^*\mathbf{v}\right) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{\eta}rot\mathbf{u},\mathbf{v}^*\right] - \left[\frac{1}{\eta^*}rot\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\right] \right\} d\mathbf{s}. \quad (8)$$

Наряду с (6) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L^*\mathbf{u} + \dfrac{k^{*2}}{\eta^*}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}} \\ l^*\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega_e} = \tilde{\vec{\psi}}, \\ \left[\mathbf{u}_\tau\right]\big|_{\partial\Omega_i} = 0,\ \left[\left(\dfrac{1}{\eta^*}rot\mathbf{u}\right)_\tau\right]\Big|_{\partial\Omega_i} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где функции $\tilde{\mathbf{f}}$ и $\tilde{\vec{\psi}}$ никак не связаны с $\mathbf{f}$ и $\vec{\psi}$.

Задачу (9) называют сопряженной задаче (6), если при $\vec{\psi}=0$ и $\tilde{\vec{\psi}}=0$ интеграл по поверхности в правой части (8) обращается в нуль [2].

В частности задачи (6) и (9) будут сопряженными, если на части $\partial\Omega_1$ границы $\partial\Omega_e$ $l = l^* = 1$, а на $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_e \backslash \partial\Omega_1$ $l = \eta^{-1}rot$, $l^* = \eta^{*\,-1}rot$. Допускается $\partial\Omega_1 = \varnothing$ или $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_e$.

Применительно к неэрмитовому оператору L для пары сопряженных задач (6) и (9) рассмотрим функционал

$$F = \left\langle \frac{1}{\eta}rot\mathbf{v}, rot\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle k^2\eta^{-1}\mathbf{v},\mathbf{u} \right\rangle - \left\langle \mathbf{v},\tilde{\mathbf{f}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{f},\mathbf{u} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{1}{2}\alpha\mathbf{v}, +\vec{\beta},\mathbf{u} \right\rangle\Big|_{\partial\Omega_e} + \left\langle \mathbf{v}, \frac{1}{2}\alpha^*\mathbf{u} + \vec{\beta}^*, \right\rangle\Big|_{\partial\Omega_e} \quad (10)$$

Здесь $\alpha\left(P\right)$ и $\vec{\beta}\left(P\right)$ непрерывно дифференцируемые функции в точках $p \in \partial\Omega_e$. Соотношение (10) симметрично по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Найдем его первую вариацию, например, по $\mathbf{u}$:

$$\delta F_u = \left\langle \eta^{-1}rot\mathbf{v}, rot\mathbf{w} \right\rangle + \left\langle k^2\eta^{-1}\mathbf{v},\mathbf{w} \right\rangle - \left\langle \mathbf{f},\mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\alpha\mathbf{v}, +\vec{\beta},\mathbf{w} \right\rangle\Big|_{\partial\Omega_e},$$

где $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$ - вариация вектора $\mathbf{u}$. Заметим, что $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$, поэтому

$$\left[\eta^{-1} rot\mathbf{v}, \mathbf{w}^*\right] d\mathbf{s} = \left[\mathbf{n}, \eta^{-1} rot\mathbf{v}\right] \mathbf{w}^* ds = \left(\eta^{-1} rot\mathbf{v}\right)_\tau \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{w}^* ds,$$

если $\mathbf{e}_\tau$ и $\mathbf{n}$ соответственно касательный и нормальный единичные векторы по отношению к поверхности интегрирования.

На основе теоремы Остроградского-Гаусса можно доказать тождество

$$\left\langle \eta^{-1} rot\mathbf{v}, rot\mathbf{w} \right\rangle = \left\langle rot\eta^{-1} rot\mathbf{v}, \mathbf{w} \right\rangle + \int\limits_{\partial\Omega} \left[\mathbf{n}, \eta^{-1} rot\mathbf{v}\right] \mathbf{w}^* ds,$$

Граница $\partial\Omega$ состоит из внешней границы области $\partial\Omega_e$ и внутренних поверхностей $\partial\Omega_i = \sum_{j=1}^{n} \partial\Omega_{ij}$, на которых электромагнитные свойства среды терпят разрыв. Интегрирование по $\partial\Omega_{ij}$ нужно выполнять по двум сторонам поверхности. Функции $\eta^{-1} rot\mathbf{v}, \mathbf{w}^* \in D_{rot}$, т.е. $\left(\eta^{-1} rot\mathbf{v}\right)_\tau$ и $\mathbf{w}^*_\tau$ непрерывны на $\partial\Omega_{ij}$, поэтому интегралы по двум сторонам этой поверхности равны нулю:

$$\int\limits_{\partial\Omega_{ij(\pm)}} \left[\mathbf{n}, \eta^{-1} rot\mathbf{v}\right] \mathbf{w}^* ds = 0.$$

С учетом этого первая вариация рассматриваемого функционала принимает вид:

$$\delta F_u = \int\limits_{\Omega} \left(rot\eta^{-1} rot\mathbf{v} + k^2 \eta^{-1} - \mathbf{f} \right) \mathbf{w}^* dv + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_e} \left\{ \left[\mathbf{n}, \eta^{-1} rot\mathbf{v}\right] + \alpha\mathbf{v} + \vec{\beta} \right\} \mathbf{w}^* ds$$

Выясним условия, необходимые для того, чтобы первая вариация была равна нулю.

. Равенство $\delta \mathrm{F}_U = 0$ должно выполняться при любых допустимых вектор-функциях $\mathbf{w}^*$, поэтому при

$$\mathbf{w}^*\Big|_{\partial\Omega_E} = 0,$$

получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(rot\eta^{-1} rot\mathbf{V} + k^2 \eta^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{f} \right) \mathbf{w}^* dv. \qquad (12)$$

В согласии с основной леммой классического вариационного исчисления, из (11), (12) следует

$$rot\,\eta^{-1} rot\mathbf{v} + k^2 \eta^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{f} = 0.$$

Далее будем рассматривать допустимые вектор-функции не обязательно равные нулю на границе $\partial\Omega_e$. Для того, чтобы δF_u равнялась нулю для этих $\mathbf{w}^*$ нужно потребовать выполнение краевых условий

$$\left\{ \left[\mathbf{n}, \eta^{-1} rot\mathbf{v}\right] + \alpha\mathbf{v} + \vec{\beta} \right\}\Big|_{\partial\Omega_e} = 0 \qquad (13)$$

Таким образом, функционал (10) стационарен на решении уравнения (5) с краевыми условиями (13) и условиями сопряжения

$$\left[\mathbf{v}_\tau\right]\Big|_{\partial\Omega i} = 0, \quad \left[\left(\eta^{-1} rot\mathbf{v}\right)_\tau\right]\Big|_{\partial\Omega_i} = 0\ . \qquad (14)$$

Соотношения (13), (14) называют естественными краевыми условиями для функционала (10), т.к. они являются необходимыми условиями реализации его стационарности.

Аналогично можно показать, что для первой вариации δF_v функционала F по $\mathbf{v}$ равенство $\delta F_v = 0$ есть необходимое условие того, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ является решением задачи, сопряженной к (5), (13), (14).

В частном случае, полагая в (10) $\mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{f}}, \vec{\psi}^* = \tilde{\tilde{\vec{\psi}}}$,

получим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^*$. Тогда вместо (10) будем иметь функционал [8]:

$$\mathring{\mathrm{F}}(\mathbf{V}) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta} (rot\mathbf{V})^2 + \frac{k^2}{\eta} \mathbf{V}^2 - 2\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \right] dv + \int\limits_{\partial\Omega_e} \left\{ \alpha \mathbf{V}^2 + 2\vec{\beta} \cdot \mathbf{V} \right\} ds \tag{15}$$

Вычисляя его вариацию по $\mathbf{V}$, получим, что функция $\mathbf{V_0}$, на которой он стационарен, удовлетворяет решению задачи (5) естественными краевыми условиями (13), (14).

Рассмотри частные случаи формул (10) и (15) применительно к двумерным задачам, когда векторы $\mathbf{u}$ u $\mathbf{v}$ имеют одну отличную от нуля компоненту

$$\mathbf{v} = (v_x, 0, 0),\ \mathbf{u} = (u_x, 0, 0),\ \vec{\beta} = (\beta_x, 0, 0).$$

Получим выражения для функционалов, а также дифференциальные уравнения, краевые условия и условия сопряжения, обеспечивающие их стационарность.

Пусть свойства среды не меняются по координате x. Тогда функции v_x, u_x будет зависеть только от y и z, если ориентация источников поля должным образом согласована с моделью двумерной среды. Далее будем предполагать, что двумерная область Σ имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Sigma_e$. В двумерном случае функционал (10) после примет вид:

$$\mathrm{F}_2 = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial u_x^*}{\partial z} + \frac{k^2}{\eta} v_x u_x^* + v_x f_x^* + f_x u_x^* \right) ds - \int\limits_{\partial\Sigma_e} \left\{ \left(\frac{1}{2} \alpha v_x + \beta_x \right) u_x^* + \left(\frac{1}{2} \alpha^* u_x + \beta_x^* \right) \right\} dl, \tag{16}$$

а из соотношения (15) получаем [9]:

$$\overline{\mathrm{F}}_2(\mathbf{V}_x) = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{k^2}{\eta} v_x^2 + 2 v_x f_x \right) ds - \int\limits_{\partial\Sigma_e} \left(\alpha v_x^2 + v_x \beta_x \right) dl. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что функционалы (16), (17) стационарны на решении задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \dfrac{k^2}{\eta} v_x = -f_x, & (18) \\ \left. \dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial v_x}{\partial n} + \alpha v_x + \beta_x \right|_{\partial\Sigma_e} = 0, & (19) \\ \left[v_x \right] \Big|_{\partial\Sigma_i} = 0, \left[\dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial n} \right] \Big|_{\partial\Sigma_i} = 0. & \end{cases}$$

Отметим, что краевые условия Дирихле не будут являться естественными для рассмотренных функционалов. Это нужно учитывать при численном решении экстремальной задачи [2,5].

Если модель среды содержит тонкие проводящие пленки, натянутые на поверхности $\partial\Omega_{sj} \left(j = \overline{1,m} \right)$, то в выражениях для вариаций функционалов интегрирование по двум сторонам поверхности $\partial\Omega_{sj}$ дает значения, отличные от нуля. Например, для пленки Прайса-Шейнманна [1] в формуле для вариации относительно электрического поля необходимо учесть, что при $\mathbf{v} = \mathbf{E}$

$$\int\limits_{\partial\Omega sj(+)} \left[\mathbf{n}, \left(\eta^{-1} rot\mathbf{v}\right)\mathbf{w}^*\right] ds - \int\limits_{\partial\Omega sj(-)} \left[\mathbf{n}, \left(\eta^{-1} rot\mathbf{v}\right)\mathbf{w}^*\right] ds =$$

$$= -i\omega \int\limits_{\partial\Omega sj} S_j \mathbf{v}_\tau \mathbf{w}^* ds,$$

где S_j - проводимость j-той пленки. Для того, чтобы перевести краевые условия на пленке в разряд естественных для соотношений (10), (15), необходимо добавить к ним слагаемые, аннулирующие интегралы по поверхности пленки, вида правой части последнего равенства. Для функционала (15) этого можно достигнуть, если вместо него взять соотношение.

$$\Phi\left(\mathbf{E}\right) = \overline{\mathrm{F}}\left(\mathbf{E}\right) + \sum_{j=1}^{m} F_{sj} \qquad (20)$$

в котором

$$F_{sj} = i\omega \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\partial\Omega sj} S_j \mathbf{v}_\tau{}^2 d\mathbf{s}.$$

Соотношения (10), (15), (16), (17), (20) являются исходными при решении задач геоэлектрики по методу конечных элементов [8,9]. Мы на основе формулы (15) построим разностные схемы, учитывающие переменные значения μ и ε. С этой целью используем алгоритмы (дискретизацию, квадратурные формулы и пр.), приведенные в работах [6.7]. Отличие будет состоять лишь в том, что в квадратурах будут присутствовать весовые множители, обусловленные переменными величинами μ и *ε*. Этими весовыми функциями будут $k^2\eta^{-1}$ и η^{-1}. В разностную схему войдут их интегральные средние значения.

Будем считать, что на границе области Ω, являющ-ейся прямоугольным параллелепипедом, заданы фиксированные поля (l = 1), Пусть N_x, N_y, N_z, - количество узлов сетки соответственно по осям x,y,z, а $\Delta x_i \ (i = \overline{1, N_x - 1})$ $\Delta y_j \ (j = \overline{1, N_y - 1})$, $\Delta z_k \ (k = \overline{1, N_z - 1})$ - шаги сетки. Для упрощения записи положим

$$\mathbf{v}_h = \left(U, V, W\right)$$

- сеточный аналог вектор-функции $\mathbf{v}$, а $F_h(\mathbf{v}_h)$ - сеточ-ный функционал, соответствующий интегралу (15):

$$F_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} F_{hijk}(\mathbf{v}_h).$$

Здесь $F_{hijk}(\mathbf{v}_h)$ - сеточная аппроксимация функционала для ячейки сетки с индексами i, j, k, являющаяся функцией значений вектора $\mathbf{v}_h$.в вершинах элементарного прямоугольного параллелепипеда. Для численного отыскания стационарной точки функции $F_h(\mathbf{v}_h)$ нужно найти производные по (компонентам вектора) $\mathbf{v}_{hijk}$ в каждом внутреннем узле сетки и приравнять их кулю Очевидно, что любой внутренний узел входит в интегралы по восьми ячейкам, общей вершиной для которых он является.

Опуская громоздкие промежуточные выкладки, более подробно изложенные в работе [6]. запишем окончательные выражения для производных:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_h}{\partial U_{ijk}} &= C_{ijk}U_{ijk} + C_{ij+1k}U_{ij+1k} + \\
&+ C_{ij-1k}U_{ij-1k} + C_{ijk+1}U_{ijk+1} + C_{ijk+1}U_{ijk-1} + \\
&+ \Phi_{Vijk} + \Phi_{Wijk} + f_{Uijk} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_h}{\partial V_{ijk}} &= D_{ijk}V_{ijk} + D_{i+1jk}V_{i+1jk} + \\
&+ D_{i-1jk}V_{i-1jk} + D_{ijk+1}V_{ijk+1} + D_{ijk+1}V_{ijk-1} + \\
&+ \Psi_{Uijk} + \Psi_{Wijk} + f_{Vijk} = 0,
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_h}{\partial W_{ijk}} &= G_{ijk}W_{ijk} + G_{i+1jk}W_{i+1jk} + \\
&+ G_{i-1jk}W_{i-1jk} + G_{ij+1k}W_{ij+1k} + G_{ij-1k}W_{ij-1k} + \\
&+ \mathrm{X}_{Uijk} + \mathrm{X}_{Vijk} + f_{Wijk} = 0,
\end{aligned}
$$

где $i = \overline{2, N_x - 1}$, $j = \overline{2, N_y - 1}$, $k = \overline{2, N_z - 1}$.

Коэффициенты разностной схемы имеют вид

$$
\begin{aligned}
C_{ijk} &= -\left(C_{ij+1k} + C_{ij-1k} + C_{ijk+1} + C_{ijk-1}\right) + \\
&\sum_{l=i-1}^{i}\sum_{m=j-1}^{j}\sum_{n=k-1}^{k} v_{lmn}\left(\frac{k^2}{\eta}\right)_{lmn},
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

$$
C_{ij+1k} = -\frac{2}{\Delta y_j^2}\left(\frac{v_{ijk-1}}{\eta_{ijk-1}} + \frac{v_{i-1jk-1}}{\eta_{i-1jk-1}} + \frac{v_{ijk}}{\eta_{ijk}} + \frac{v_{i-1jk}}{\eta_{i-1jk}}\right), \qquad (23)
$$

$$
C_{ij-1k} = -\frac{2}{\Delta y_{j-1}^2}\left(\frac{v_{ij-1k-1}}{\eta_{ij-1k-1}} + \frac{v_{i-1j-1k-1}}{\eta_{i-1j-1k-1}} + \frac{v_{ij-1k}}{\eta_{ij-1k}} + \frac{v_{i-1j-1k}}{\eta_{i-1j-1k}}\right), \qquad (24)
$$

$$
C_{ijk+1} = -\frac{2}{\Delta z_k^2}\left(\frac{v_{ijk}}{\eta_{ijk}} + \frac{v_{ij-1k}}{\eta_{ij-1k}} + \frac{v_{i-1j-1k}}{\eta_{i-1j-1k}} + \frac{v_{i-1jk}}{\eta_{i-1jk}}\right), \qquad (25)
$$

$$
C_{ijk-11} = -\frac{2}{\Delta z_k^2}\left(\frac{v_{ijk-1}}{\eta_{ijk-1}} + \frac{v_{ij-1k-1}}{\eta_{ij-1k-1}} + \frac{v_{i-1j-1k-1}}{\eta_{i-1j-1k-1}} + \frac{v_{i-1jk-1}}{\eta_{i-1jk-1}}\right), \qquad (26)
$$

где $v_{lmn} = \Delta x_l \Delta y_m \Delta z_n$,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{Vijk} &= \left(V_{i+1jk} - V_{ijk} + V_{i+1j+1k} - V_{ij+1k}\right)\left(\frac{\Delta z_{k-1}}{\eta_{ijk-1}} + \frac{\Delta z_k}{\eta_{ijk}}\right) + \\
&+ \left(V_{ijk} - V_{i+1jk} + V_{ij-11k} - V_{i+1j-1k}\right)\left(\frac{\Delta z_{k-1}}{\eta_{ij-1k-1}} + \frac{\Delta z_k}{\eta_{ij-1k}}\right) + \\
&+ \left(V_{i-1jk} - V_{ijk} + V_{i-1j-1k} - V_{ij-11k}\right)\left(\frac{\Delta z_{k-1}}{\eta_{i-1j-1k-1}} + \frac{\Delta z_k}{\eta_{i-1j-1k}}\right) + \\
&+ \left(V_{ijk} - V_{i-1jk} + V_{ij+1k} - V_{i-1j+1k}\right)\left(\frac{\Delta z_{k-1}}{\eta_{i-1jk-1}} + \frac{\Delta z_k}{\eta_{i-1jk}}\right),
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

$$
\Phi_{Wijk} = \left(W_{ijk} - W_{i+1jk} + W_{ijk-1} - W_{i+1jk-1}\right)\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{\eta_{ij-1k-1}} + \frac{\Delta y_j}{\eta_{ijk-1}}\right) +
$$

$$+\left(W_{i+1jk}-W_{ijk}+W_{i+1jk+1}-W_{ijk+1}\right)\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{\eta_{ij-1k}}+\frac{\Delta y_j}{\eta_{ijk}}\right)+$$

$$+\left(W_{i-1jk}-W_{ijk}+W_{i-1jk-1}-W_{ijk-1}\right)\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{\eta_{i-1j-1k-1}}+\frac{\Delta y_j}{\eta_{i-1jk-1}}\right)+ \qquad (28)$$

$$+\left(W_{ijk}-W_{i-1jk}+W_{ijk+1}-W_{i-1jk+1}\right)\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{\eta_{i-1j-1k}}+\frac{\Delta y_j}{\eta_{ijk-1}}\right),$$

$$f_{Uijk}=-\sum_{l=i-1}^{i}\sum_{m=j-1}^{j}\sum_{n=k-1}^{k}v_{lmn}f_{xlmn}. \qquad (29)$$

Здесь , f_{xlmn}, $\left(k^2/\eta\right)_{lmn}$, η_{lmn}^{-1}, - интегральное средне значение f_x плотности источников и функций $\left(k^2/\eta\right)$ и η^{-1}, соответствующие ячейке трехмерной сетки с индексами *l*, *m*, *n*.

Ввиду того, что компоненты вектора **v** с точностью до замены координатных осей одинаково входят в уравнения системы (6), то из уравнения (31), а также формул (22)-(29) можно получить второе и третье уравнения системы (21) и выражения для Ψ_{Uijk}, Ψ_{Wijk}, $\mathrm{X}_{Uijk}, \mathrm{X}_{Vijk}$. Для этого достаточно сделать в них подстановки в соответствии с таблицей 2. Во втором, третьем и четвертом столбцах таблицы указаны индексы переменных, стоящих в первом, седьмом и восьмом столбцах. Формулы для f_{Vijk} и f_{Wijk} получаются из соотношения (29) заменой индекса x на индексы y и z соответственно.

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7	8
U,C	$\alpha(i)$	$\beta(j)$	$\gamma(k)$	$\Delta y_{\beta(j)}$	$\Delta z_{\gamma(k)}$	V	W
V,D	$\gamma(i)$	$\alpha(j)$	$\beta(k)$	$\Delta z_{\beta(k)}$	$\Delta x_{\gamma(i)}$	W	U
W,G	$\beta(i)$	$\gamma(j)$	$\alpha(k)$	$\Delta x_{\beta(i)}$	$\Delta y_{\gamma(j)}$	U	V

Рассмотрим частные случаи полученных формул. Пусть применительно к двумерной модели среды

$$\mathbf{v}_h=\left(U,0,0\right),\ \mathbf{f}=\left(f_x,0,0\right), N_x=3.$$

Тогда, полагая $\Delta x_i=1$, объем каждй ячейки сетки будет численно равен площади (произведению ее измерений по осям y и z):

$$S_{mn}=\Delta y_m\Delta z_n,\ v_{lmn}=\Delta x_l\Delta y_m\Delta z_n=1\cdot S_{mn}.$$

Коэффициенты разностной схемы не будут зависеть от индекса i . Согласно (21), система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}&\bar{C}_{jk}U_{jk}+\bar{C}_{j+1k}U_{j+1k}+\bar{C}_{j-1k}U_{j-1k}+\\&+\bar{C}_{jk-1}U_{jk-1}+\bar{C}_{jk+1}U_{jk+1}+\bar{f}_{Ujk}=0.\end{aligned} \qquad (30)$$

Из соотношений (23)-(29) получаем:

$$\bar{C}_{j+1k}=-\frac{4}{\Delta y_j^2}\left(\frac{S_{jk-1}}{\eta_{jk-1}}+\frac{S_{jk}}{\eta_{jk}}\right) \qquad (31)$$

$$\overline{C}_{j-1k} = -\frac{4}{\Delta y_{j-1}^2}\left(\frac{S_{j-1k-1}}{\eta_{j-1k-1}} + \frac{S_{j-1k}}{\eta_{j-1k}}\right) \tag{32}$$

$$\overline{C}_{jk+1} = -\frac{4}{\Delta z_k^2}\left(\frac{S_{jk}}{\eta_{jk}} + \frac{S_{j-1k}}{\eta_{j-1k}}\right) \tag{33}$$

$$\overline{C}_{jk-1} = -\frac{4}{\Delta z_{k-1}^2}\left(\frac{S_{j-1k-1}}{\eta_{j-1k-1}} + \frac{S_{jk-1}}{\eta_{jk-1}}\right) \tag{34}$$

$$\overline{C}_{jk} = -\left(\overline{C}_{j+1k} + \overline{C}_{j-1k} + \overline{C}_{jk+1} + \overline{C}_{jk-1}\right) + \tag{35}$$
$$2\sum_{m=j-1}^{j}\sum_{n=k-1}^{k} S_{mn}\left(\frac{k^2}{\eta}\right)_{mn}.$$

$$\overline{f}_{Ujk} = 2\sum_{m=j-1}^{j}\sum_{n=k-1}^{k} S_{mn} f_{xmn}. \tag{36}$$

Соотношения (30) - (36) позволяют выполнить расчеты для Е- и Н-поляризаций при перегонных значениях μ и ε. Полагая μ = const ε = const, нетрудно получить расчетные формулы, приведенные в работах [6,7].

Подведем некоторые итоги.

1. Ввиду того, что решениями задач геоэлектрики с гармоническим возбуждением поля являются комплексные функции , экстремальные задачи сводятся к отысканию стационарных значений функционалов, а не их минимумов или максимумов.

2. Применение вариационных принципов для решения задач позволяет глубже проникнуть в природу граничных

условий. На стационарном значении функционала автоматически обеспечивается выполнение условий сопряжения на границах разрыва физических свойств среды, а также естественных краевых условий на границе области, в которой отыскивается решение задачи. Введение в функционалы интегралов по границам позволяет перевести в разряд естественных широкий класс краевых условий на внесшей границе области или ее внутренних границах.

3. При вариационном подходе уменьшается неопределенность в выборе разностных уравнений. Основное внимание нужно уделять хорошей аппроксимации интегралов суммой ординат сеточной функции.

4. Получены разностные схема достаточно общего вида, позволяющие выполнять вычисления как полных, так и аномальных полей, возбуждаемых произвольными локальными источниками, применительно к кусочно-гладким функциям σ, μ и ε. Как частные случаи из них вытекают известные разностные схемы для постоянных. значений проводимостей среды.

5. Численные эксперименты, результаты которых обсуждаются в работах [6,7], свидетельствуют об эффективности разностных схем, полученных на основе использования вариационных принципов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переданного электромагнитного поля земли. Недра",М.,1981.

2. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ,М.,1953.

3. Доброхотов И.А., Юдин М.Н. 0 влиянии магнитной проницаемости на результаты работ методами магнитотеллурического поля. Изв. ВУЗов, сер. «Геология и разведка», №6,1981.

4. Колмогоров А.Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа. М.,"Наука",1976.

5. Никольский В .В. Вариационные методы внутренних задач электродинамики. М.,"Наука",1967.

6. Юдин М.Н. Вычисление коэффициентов разностной схемы на основе вариационного подхода при решении прямой задачи геоэлектрики методом сеток в трехмерной среде. Деп. в ВИНИТИ №1295-81. Деп. от 23.03.81.

7. Юдин М.Н. .Казанцева Е.В. Вычисление коэффициентов разностной схемы на основе вариационного подхода при решении прямой задача МТЗ методом сеток в двумерной среде. Деп. в ВИНИТИ, № 1948-81. Деп.от 29.04.81.

8. Coggon J.H. Electromagnetic and electrical modeling by tbe finite element method. Geophysics, vol.36, No.1, 1971.

9. Rodi W. L. Technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data.. Geophys. J.R. astr. Soc.,44, 1976.