15-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" , посвященная 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ (г. Саратов, 27 января - 3 февраля 2010 года)

ВСПЛЕСКИ И ФРЕЙМЫ В ДВОИЧНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ[1]

Ю.А.Фарков (Москва)

§ 1. Введение

Основы двоичного гармонического анализа анализа изложены в следующих монографиях:

Голубов Б.И. Элементы двоичного анализа. М.: Издательство ЛКИ, 2007.

Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Издательство ЛКИ, 2008.

Schipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N.Y.: Adam Hilger, 1990.

Напомним, что функции Радемахера определяются по формулам

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \end{cases} \qquad r_l(x) = r_0(2^l x), \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1],$$

и образуют ортонормированную (но не полную) систему в пространстве $L^2[0, 1]$. Функции Уолша (в нумерации Пэли) определяются следующим образом:

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_1(x) = r_0(x), \qquad w_l(x) = \prod_{j=0}^{k} (r_0(2^j x))^{\mu_j}, \quad l \geq 2, \quad x \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где числа μ_j берутся из двоичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j 2^j, \quad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_k = 1, \quad k = k(l). \tag{1.2}$$

Функции Уолша образуют ортонормированный базис пространства $L^2[0, 1]$. На вещественную прямую $\mathbb{R}$ функции Радемахера и Уолша продолжаются периодически (так что, например, $r_0(x + 1) = r_0(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$). Эти функции часто рассматривают и на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

В 1949 г. Файном (N.J. Fine) было показано, что функции Уолша можно отождествить с характерами канторовой диадической группы. Этот факт двумя годами ранее отмечался Н.Я. Виленкиным, которым был определен широкий класс локально компактных абелевых групп (называемых в современной литературе группами Виленкина), содержащий группу Кантора как специальный случай.

[1] Доклад на пленарном заседании 1 февраля 2010 г.

В указанных выше монографиях приведены результаты по следующим темам:

- ряды по системе Уолша: признаки сходимости и методы суммирования;
- задачи единственности представления функций рядами Уолша;
- приближение функций полиномами Уолша и Хаара;
- ряды Уолша с монотонно убывающими коэффициентами;
- лакунарные ряды Уолша;
- двоичные интегралы и производные;
- диадические мартингалы и пространства Харди;
- двоичные операторы Харди и Харди – Литтлвуда;
- двоичные обобщенные функции;
- применения дискретных преобразований Уолша и их обобщений к цифровой обработке информации, кодированию изображений и в голографии.

На недавней международной конференции по дискретному анализу и его приложениям, состоявшейся в Салониках 27-29 сентября 2008 г., среди обсуждавшихся тем были следующие: анализ Уолша, гармонический анализ на группах Виленкина, p-адические всплески, анализ Фурье на некоммутативных группах, производная Гиббса и ее обобщения, нелинейные методы кодирования. Статья автора об ортогональных всплесках на группах Виленкина опубликована в специальном выпуске журнала Facta Universitatis, посвященном этой конференции. Метод построения биортогональных всплесков на группах Виленкина изложен в докладе автора на международной конференции "p-ADIC MATHPHYS.2007" и опубликован в трудах Математического института имени В.А. Стеклова РАН (том 265, 2009 г.). Цитируемые работы размещены на сайте кафедры высшей математики и математического моделирования Российского государственного геологоразведочного университета:

http://www.vm-rggru.narod.ru

На этом сайте имеются также работы А.А.Любушина и М.Н.Юдина о применениях всплесков и их обобщений (курвлетов, риджлетов, ...) в геофизике. Несомненно, им будет интересен сайт

http://www.shearlet.org,

приведенный в тезисах вчерашнего доклада А.И.Подкопаева.

В апреле 1996 г. автором в совместном с Д. Ю. Перловым докладе на международной конференции "Новые достижения в науках о Земле"(Москва, РГГРУ) был определен кратномасштабный анализ Хаара на группах Виленкина. В том же году Ленгом (W.C. Lang, SIAM J. Math. Anal., vol. 27) были построены первые примеры ортогональных всплесков на группе Кантора.

Диадическая канторова группа $\mathcal{C}$ состоит из последовательностей

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots), \quad x_j \in \{0,1\},$$

таких, что $x_j = 0$ для всех $j < k = k(x)$. Групповая операция на $\mathcal{C}$ – это операция поразрядного сложения по модулю 2:

$$(z_j) = (x_j) + (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod 2 \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

а топология вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in \mathcal{C} \mid x_j = 0 \text{ для } j \le l\}, \quad l \in \mathbb{Z}\,.$$

Группа $\mathcal{C}$ самодвойственна. Для каждого $\omega = (\omega_j)$ из $\mathcal{C}$ соответствующий характер действует по правилу:

$$x \mapsto (-1)^{\gamma(x,\omega)}, \quad \gamma(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\omega_{1-j}, \quad x \in \mathcal{C}.$$

Отображение $\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$, определенное по формуле

$$\lambda(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j 2^{-j}, \qquad x = (x_j) \in \mathcal{C},$$

переводит подгруппу U_0 в отрезок $[0,1]$ и задает изоморфизм пространств с мерой $(\mathcal{C},\nu)$ и $(\mathbb{R}_+,\mu)$, где ν – мера Хаара на $\mathcal{C}$, а μ – мера Лебега на $\mathbb{R}_+$. Поэтому, например, в книге [Schipp, ...] свойства функций Уолша на $\mathcal{C}$ и $\mathbb{R}_+$ излагаются параллельно.

В следующем параграфе мы покажем, как с помощью преобразований Уолша определить всплески с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$. Иначе говоря, ответим на вопрос: *что в двоичном анализе является аналогом системы Добеши*?

Напомним, что масштабирующая функция Добеши порядка N является решением функционального уравнения

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k\varphi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

и обладает следующими свойствами: 1) $\operatorname{supp}\varphi = [0, 2N-1]$, 2) система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R})$; 3) φ генерирует кратномасштабный анализ (сокращенно: КМА) в $L^2(\mathbb{R})$. При $N = 1$ конструкция Добеши приводит к функции Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_{[0,1)}$ (в этом случае $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$). Коэффициенты уравнения (1.3) для $2 \le N \le 10$ приведены в разделе 6.4 книги Добеши "Десять лекций по вейвлетам". При $N = 2$ решение уравнения (1.3) непрерывно на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|\,\varphi(t) - \varphi(x)| \le C\,|\,t - x|^{\alpha}, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

с показателем $\alpha \approx 0,5500$. Точное значение показателя α (и соответствующих величин для $N = 3$ и $N = 4$) было найдено Добеши и Лагариасом [I. Daubechies, J. Lagarias, 1992]. Для масштабирующих функций Добеши порядков $N \ge 5$ точные значения показателей гладкости не известны.

Методы оценок гладкостей масштабирующих функций изложены в главе 7 книги

Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.

§ 2. Ортогональные всплески с компактными носителями в $L^2(\mathbb{R}_+)$

Скалярное произведение и норма в $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\langle f_1\,, f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f\,, f\rangle}.$$

Целая и дробная части действительного числа x обозначаются через $[x]$ и $\{x\}$ соответственно. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ числа x_j, $x_{-j} \in \{0,1\}$ определим равенствами

$$x_j = [2^{\,j}x](\mathrm{mod}\,2), \qquad x_{-j} = [2^{\,1-j}x](\mathrm{mod}\,2).$$

Эти числа являются цифрами двоичного разложения числа x:

$$x = [x] + \{x\} = \sum_{j<0} x_j 2^{\,-j-1} + \sum_{j>0} x_j 2^{\,-j}$$

(в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$x \oplus y = \sum_{j<0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j>0} |x_j - y_j| 2^{-j}.$$

Для любых $m, n \in \mathbb{Z}_+$ имеем $w_m(x)w_n(x) = w_{m\oplus n}(x)$, а если сумма $x \oplus y$ двоично-ирррациональна, то

$$w_n(x \oplus y) = w_n(x)w_n(y), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

(при фиксированном y это равенство имеет место для всех x из $\mathbb{R}_+$, кроме счетного множества).

Для $x, \omega \in \mathbb{R}_+$ введем обозначения

$$\chi(x,\omega) = (-1)^{\sigma(x,\,\omega)}, \quad \sigma(x,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\omega_{-j} + x_{-j}\omega_j.$$

Преобразование Фурье – Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\chi(x,\omega)\,dx, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и стандартным образом распространяется на все функции из $L^2(\mathbb{R}_+)$. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и $||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}_+)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$.

Функция ψ называется *ортогональным всплеском* в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если функции

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x \oplus k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1}$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для произвольной $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ функции $\varphi_{j,k}$ определяются как в (2.1). Будем говорить, что *функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$*, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \oplus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств

$$V_j = \mathrm{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)}\mathrm{span}\,\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет условиям

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}_+), \quad \bigcap V_j = \{0\}.$$

Задача. *Для каждого натурального n охарактеризовать решения φ масштабирующего уравнения*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

генерирующие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и указать алгоритм построения соответствующих ортогональных всплесков.

Полином Уолша

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega) \tag{2.3}$$

называется *маской* масштабирующего уравнения (2.2) (или его решения φ). Применяя преобразование Фурье – Уолша, можем записать уравнение (2.2) в виде $\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$.

Пример 2.1. Если $n = 1$ и $c_0 = c_1 = 1$, то решением уравнения (2.2) является функция Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_{[0,1)}$. В этом случае

$$m_0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/2), \\ 0, & \omega \in [1/2, 1) \end{cases}$$

и

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R}_+ \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Соответствующая система всплесков $\{\psi_{jk}\}$ является классическим базисом Хаара в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, что $\widehat{\varphi} = \varphi$ для $\varphi = \mathbf{1}_{[0,1)}$ (поэтому в двоичном анализе всплеск Хаара совпадает с всплеском Котельникова – Шеннона).

Обозначим через $L_c^2(\mathbb{R}_+)$ класс функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$ с компактными носителями.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет уравнению* (2.2) *и* $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. *Если система $\{\varphi(\cdot \oplus k) | \, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то*

$$m_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{2.4}$$

Двоичные интервалы ранга n:

$$I_l^{(n)} = [l2^{-n}, (l+1)2^{-n}), \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим $b_l = m_0(l2^{-n})$. Согласно (2.4) имеем

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \le l \le 2^{n-1} - 1. \tag{2.5}$$

Коэффициенты масштабирующего уравнения (2.2) вычисляются по значениям b_l с помощью дискретного преобразования Уолша:

$$c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{2^n-1} b_l w_l(k2^{-n}), \quad 0 \le k \le 2^n - 1. \tag{2.6}$$

Пример 2.2. Масштабирующая функция Лэнга (W.C. Lang, 1996) получается, если при $n = 2$ положить

$$m_0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/4), \\ a, & \omega \in [1/4, 1/2), \\ 0, & \omega \in [1/2, 3/4), \\ b, & \omega \in [3/4, 1), \end{cases}$$

где $0 < |a| < 1,\ |b| = \sqrt{1 - |a|^2}$. В этом случае функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{3} c_k \varphi(2x \oplus k) \tag{2.7}$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1+a+b}{2}, \quad c_1 = \frac{1+a-b}{2}, \quad c_2 = \frac{1-a-b}{2}, \quad c_3 = \frac{1-a+b}{2}.$$

Эта функция генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, обладает свойством самоподобия:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+a-b)/2 + b\varphi(2x) & \text{для} \quad 0 \le x < 1, \\ (1-a+b)/2 - b\varphi(2x-2) & \text{для} \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

является фрактальной функцией в смысле Массопуста (Massopust) и представима лакунарным рядом Уолша:

$$\varphi(x) = (1/2)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/2)(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}(x/2)), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.8}$$

Кроме того, при $|b| < 1/2$ соответствующая система $\{\psi_{jk}\}$ является безусловным базисом во всех пространствах $L^p(\mathbb{R}_+),\ 1 < p < \infty$. При $a = 1$ и $a = -1$ решениями уравнения (2.7) являются функция Хаара $\varphi(x) = \mathbf{1}_{[0,1)}(x)$ и смещенная функция Хаара $\varphi(x) = \mathbf{1}_{[0,1)}(x \oplus 1)$ соответственно. В случае $a = 0$ имеем $\varphi(x) = (1/2)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/2)$ и система $\{\varphi(\cdot \oplus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ линейно зависима (так как $\varphi(x) = \varphi(x \oplus 1)$).

Задача 1 (в связи с докладом И.А.Шейпака "Критерий ограниченности вариации самоподобных функций"). Выяснить, имеет ли функция (2.8) ограниченную вариацию?

Пусть множество $M \subset [0, 1)$ представимо в виде объединения диадических интервалов ранга $n - 1$ или совпадает с одним из этих интервалов. Положим

$$S(M) := \{\omega/2 \mid \omega \in M\} \cup \{(\omega + 1)/2 \mid \omega \in M\}.$$

Множество M называется *блокирующим* (для маски m_0 уравнения (2.2)), если оно не содержит интервала $[0, 2^{-n+1})$ и $S(M) \subset M \cup \{\omega \in \Delta \mid m_0(\omega) = 0\}$ (т.е. маска m_0 обращается в нуль в каждой точке множества $S(M) \setminus M$).

Маска m_0 может иметь только конечное число блокирующих множеств. Если $m_0(\omega) \ne 0$ для всех $\omega \in [0, 1/2)$, то m_0 не имеет блокирующих множеств. В примере 2.2 при $a = 0$ интервал $[1/2, 1)$ является блокирующим множеством. Для $n \le 5$ найдены все наборы параметров $(b_0, b_1, \dots, b_{2^n-1})$, для которых блокирующие множества существуют.

Задача 2. Найти алгоритм для вычисления блокирующих множеств для $n > 5$.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *является решением уравнения* (2.2), $\widehat{\varphi}(0) = 1$, *и пусть маска* m_0 *удовлетворяет условиям* (2.4). *Тогда*

(a) φ *генерирует КМА в* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *в том и только в том случае, когда* m_0 *не имеет блокирующих множеств*;

(b) φ *является суммой лакунарного ряда Уолша*:

$$\varphi(x) = (1/2^{n-1})\mathbf{1}_{[0,1)}(x/2^{n-1})(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(n)} a_l w_l(x/2^{n-1})), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.9}$$

В формуле (2.9) множество $\mathbb{N}(n)$ и коэффициенты a_l определяются следующим образом.

Представим каждое $l \in \mathbb{N}$ в виде двоичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j 2^j, \quad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_k = 1, \quad k = k(l),$$

и обозначим через $\mathbb{N}_0(n)$ множество всех натуральных чисел $l \geq 2^{n-1}$, у которых среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_{j+n-1})$, отсутствует набор $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Тогда $\mathbb{N}(n) = \mathbb{N}_0(n) \cup \{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Далее положим

$$\gamma(i_1, i_2, \ldots, i_n) = b_s, \quad s = i_1 2^0 + i_2 2^1 + \ldots + i_n 2^{n-1}, \quad i_j \in \{0, 1\},$$

где, как выше, $b_s = m_0(s/2^n)$. Тогда

$$a_l = \gamma(\mu_0, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(l) = 0;$$

$$a_l = \gamma(\mu_1, 0, 0, \ldots, 0, 0)\gamma(\mu_0, \mu_1, 0, \ldots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(l) = 1;$$

....

$$a_l = \gamma(\mu_k, 0, 0, \ldots, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, \ldots, 0, 0) \ldots \gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}),$$

если $k = k(l) \geq n - 1$. В последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются "сдвигом" индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из двоичного разложения числа l.

Замечание 1. Из формулы (2.9) в случае $n = 2$ получается разложение Лэнга (2.8). В работе [W.C.Lang, Houston J.Math., 1998] отмечалось, что при $n \geq 3$ для разложения в ряд Уолша функции φ "no simple patterns appear in the coefficients". В работе [F., Proc. Intern. Conf. "Wavelets and splines"(July 3-8, 2003, St. Petersburg), 2005] для вывода разложения (2.9) функция

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega)$$

раскладывалась в ряд Уолша, а затем применялось обратное преобразование Фурье – Уолша.

Пример 2.3. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ b_3 = c,\ b_4 = 0,\ b_5 = \alpha,\ b_6 = \beta,\ b_7 = \gamma,$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Полагая $y = x/4$, по формуле (2.9) получим

$$\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(y)(1 + a\,w_1(y) + ab\,w_2(y) + ac\,w_3(y) + ab\alpha\,w_5(y)$$

$$+ ac\beta\,w_6(y) + ac\gamma\,w_7(y) + ab^2\alpha\,w_{10}(y) + abc\alpha\,w_{11}(y) + ac\alpha\beta\,w_{13}(y)$$

$$+ ac\beta\gamma\,w_{14}(y) + ac\gamma^2\,w_{15}(y) + ab^2\alpha^2\,w_{21}(y) + abc\alpha\beta\,w_{22}(y) + ab\alpha\beta\gamma\,w_{23}(y) + \dots). \tag{2.10}$$

Если $a = 0$ или $c = 0$, то система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно зависима. Если же a и c ненулевые, то функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. В частности, при $a = c = 1$, $0 \le |b| < 1$, из (2.10) получаем

$$\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(y)(1 + w_1(y) + bw_2(y) + w_3(y) + \beta w_6(y)), \quad y = x/4.$$

Это – первый пример отличной от функции Хаара кусочно-постоянной функции, генерирующей КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. также [Е.Родионов и Ф., Мат. заметки, 2009, т.86]).

Алгоритм построения ортогональных всплесков в $L^2(\mathbb{R}_+)$

1. Выбрать комплексные числа $b_0, b_1, \dots, b_{2^{n-1}}$ такие, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \le l \le 2^{n-1} - 1.$$

2. С помощью дискретного преобразования Уолша вычислить коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{2^n-1} b_l w_l(k2^{-n}), \quad 0 \le k \le 2^n - 1,$$

и проверить, что соответствующая маска m_0 не имеет блокирующих множеств.

3. Определить φ по формуле (2.9).

4. Определить ψ по формуле

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \bar{c}_{k\oplus 1} \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

Задача 3. Построить несепарабельный всплесковый базис в $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

Замечание 2. Пусть $\ominus_p$ обозначает операцию вычитания по модулю p на $\mathbb{R}_+$. В статье [Ф., Изв. РАН, 2005] для любых целых $p, n \geq 2$ найдены коэффициенты $c_k,\ 0 \leq k \leq p^n - 1$, такие, что решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p^n-1} c_k \varphi(p\, x\, \ominus_p k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.12}$$

обладает свойствами:

1) φ является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша;
2) система $\{\varphi(\cdot \ominus_p k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$;
3) $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, p^{n-1}]$;
4) φ генерирует кратномасштабный p-анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для вычисления коэффициентов уравнения (2.12) сначала выбираются $p^n - p$ (вообще говоря, комплексных) параметров, удовлетворяющих некоторому "условию ортогональности" , а затем, после добавления к этим параметрам $p-1$ нулей, применяется быстрое преобразование Виленкина – Крестенсона. Теорема 2.1 доказана в статье [В.Ю.Протасов и Ф., Мат. сб., 2006], а ее обобщение для любых $p, n \geq 2$ вместе с алгоритмом построения соответствующих всплесков опубликовано в [F., J.Approx.Theory, 2009].

Замечание 3. О применениях диадических всплесков к обработке изображений рассказывалось в докладе А.Ю. Максимова и С.А. Строганова на 14-й Саратовской школе (см. также [F., A.Yu. Maksimov, and S.A. Stroganov, Intern. J. Wavelets, Multiresolution and Information Processing, in press]).

Замечание 4. Диадический модуль непрерывности масштабирующей функции φ, удовлетворяющей уравнению (2.2), определяется равенством

$$\omega(\varphi, \delta) := \sup\{|\,\varphi(x \oplus y) - \varphi(x)|\ :\ x, y \in [0, 2^{n-1}),\, 0 \leq y < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Если функция φ такова, что $\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C 2^{-\alpha j}$ при всех $j \in \mathbb{N}$ для некоторого $\alpha > 0$, то существует константа $C(\varphi, \alpha)$ такая, что

$$\omega(\varphi, \delta) \leq C(\varphi, \alpha)\, \delta^{\alpha}. \tag{2.13}$$

Обозначим через α_φ точную верхнюю грань множества всех значений $\alpha > 0$, для которых выполнено неравенство (2.13). При условиях примера 2.2 имеем $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\,b\,|)$, где $0 < |\,b\,| < 1$; в частности, $\alpha_\varphi \to +\infty$ при $b \to 0$ (Ф., 2005). В статье [Е.А.Родионов и Ф., 2009] для некоторых значений параметров b_l вычислены точные значения показателей гладкости решений уравнения (2.2) в случаях $n = 3$ и $n = 4$. Оценки снизу получены с помощью формулы (2.9), а для оценок сверху применялись методы из работ [Добеши и Лагариас, 1992], [Протасов, 2006]. Отметим, что для всплесков Добеши рост гладкости удается обеспечить только за счет увеличения размера носителя на прямой $\mathbb{R}$.

Замечание 5. Основные сведения о дискретных всплесках и их применениях к обработке сигналов и изображений содержатся в монографиях:

Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008.

Broughton S. A., Bryan K.M., Discrete Fourier analysis and wavelets. Applications to signal and image processing. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.

Главными примерами дискретных всплесковых базисов в этих книгах являются дискретные базисы Хаара, Шеннона и Добеши. В статье [В.Н. Малоземов и С.М. Машарский, Алгебра и анализ, 2001, т.13] на основе дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона построены вейвлетные базисы типа Хаара и соответствующие им вейвлет-пакеты, связанные с прореживанием по времени и прореживанием по частоте дискретных периодических сигналов. Для пространств комплексных периодических и непериодиче последовательностей с помощью преобразования Виленкина–Крестенсона мною недавно были построены аналоги указанных выше ортогональных вейвлетов типа Добеши в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Подобные конструкции могут быть реализованы и для дискретных биортогональных всплесков.

Замечание 6. Предположим, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Тогда из формулы $\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$ следует, что

$$m_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k = 2.$$

Если маска m_0 удовлетворяет условию

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех} \quad \omega \in [0, 1/2),$$

а функция ψ определена по формуле (2.11), то система $\{\psi_{j,k} \mid j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ будет жестким фреймом в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с константой $|\widehat{\varphi}(0)|^2$. Это значит, что

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 = |\widehat{\varphi}(0)|^2 \|f\|^2 \quad \text{для всех} \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Таким образом, если при условиях теоремы 2.1 маска m_0 имеет блокирующее множество, то функция ψ генерирует жесткий фрейм в $L^2(\mathbb{R}_+)$. О фреймах и периодических всплесках, определяемых с помощью ядер типа Дирихле – Уолша, см. [F., Communications in Mathematics and Applications, 2010, Vol. 1]; материал этой статьи частично изложен в следующем параграфе.

§ 3. О фреймах в $L^2(\mathbb{R}_+)$

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, M – некоторое счетное множество и пусть для каждого $m \in M$ определен элемент $g_m \in \mathcal{H}$. Семейство $\{g_m\}$ называется *фреймом* в $\mathcal{H}$, если существуют положительные константы A и B такие, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m \in M} |\langle f, g_m\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{H}.$$

Постоянные A и B называют соответственно нижней и верхней *границами фрейма.* Если границы фрейма $\{g_m\}$ совпадают, то его называют *жестким фреймом.* Жесткий фрейм с единичными границами (т.е. при $A = B = 1$) называют *фреймом Парсеваля.* Очевидно, всякий ортонормированный базис является фреймом Парсеваля.

Предложение 3.1. *Для того чтобы система $\{g_m\}$ была фреймом Парсеваля необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ имело место разложение*

$$f = \sum_{m \in M} \langle f, g_m\rangle g_m,$$

где ряд сходится в $\mathcal{H}$.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathcal{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – ортогональный проектор и $\{g_m\}$ – фрейм в $\mathcal{H}$. Тогда $\{\mathcal{P}g_m\}$ – фрейм для $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ с теми же границами. В частности, если $\{g_m\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то $\{\mathcal{P}g_m\}$ является фреймом Парсеваля для $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.*

Функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условию

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \, \frac{d\omega}{\omega} < +\infty, \tag{3.1}$$

называется *всплеском* в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для $m \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$ положим

$$a_{m,\,l}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2^{-m/2} w_l(2^{-m}x), & x \in [0, 2^m), \\ 0, & x \in [2^m, +\infty). \end{array} \right. \tag{3.2}$$

В частности, функция $a_{0,1}$ совпадает с всплеском Хаара.

Имеют место следующие свойства.

1. При каждом $m \in \mathbb{Z}_+$ функции (3.2) ортонормированы на интервале $[0, 2^m)$, т.е.

$$\int_0^{2^m} a_{m,\,l}(x) a_{m,\,k}(x) \, dx = \delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{N}.$$

2. Преобразование Фурье – Уолша функций (3.2) вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_{m,\,l}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} 2^{m/2}, & \omega \in [l2^{-m}, (l+1)2^{-m}), \\ 0, & \omega \notin [l2^{-m}, (l+1)2^{-m}). \end{array} \right.$$

3. Функции (3.2) являются всплесками в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (для функции $\psi = a_{m,\,l}$ условие (3.1) выполнено с константой $c_\psi = 2^m \log(1 + 1/l)$).

4. При условиях теоремы 2.1 масштабирующая функция φ разлагается в лакунарный ряд по системе $\{a_{n-1,\,l}\}$.

Всплесками в $L^2(\mathbb{R}_+)$ являются также функции $g^{(\alpha)}_{m,\,l}$, определяемые условием

$$\widehat{g}^{(\alpha)}_{m,\,l}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} 1, & \omega \in [l\alpha^{-m}, (l+1)\alpha^{-m}), \\ 0, & \omega \notin [l\alpha^{-m}, (l+1)\alpha^{-m}), \end{array} \right. \tag{3.3}$$

где $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$ (так что $a_{m,\,l} = 2^{m/2} g^{(2)}_{m,\,l}$).

Для произвольной функции $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$D_\psi(\omega) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\,\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2, \quad M_{l,\,\psi} := \sup_{\omega\in\mathbb{R}_+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\,\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)||\widehat{\psi}(2^{-j}\omega\oplus l)|, \quad l\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $D_\psi(\omega) = D_\psi(2\omega)$ для всех $\omega \in \mathbb{R}_+$, а также что sup в последнем выражении можно вычислять при $1 \le \omega < 2$. Напомним, что

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x\oplus k), \quad j\in\mathbb{Z}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.1. *Пусть для функции $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ выполнены условия*

$$A_\psi := \operatorname*{ess\,inf}_{\omega\in\mathbb{R}_+} D_\psi(\omega) - \sum_{l\in\mathbb{N}} M_{l,\,\psi} > 0$$

и

$$B_\psi := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\mathbb{R}_+} D_\psi(\omega) + \sum_{l\in\mathbb{N}} M_{l,\,\psi} < \infty.$$

Тогда система $\{\psi_{j\,k}\}$ является фреймом в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с границами A_ψ и B_ψ.

Аналог этой теоремы для фреймов на прямой $\mathbb{R}$ доказан И. Добеши.

Пример 3.1. Пусть $\psi = g^{(\alpha)}_{m\,s}$, где $\alpha \ge 1$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $s\in\mathbb{N}$. Тогда все значения $M_{l,\,\psi}$ равны 0 (так как носители функций $\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)$ и $\widehat{\psi}(2^{-j}\omega\oplus l)$ не пересекаются), а величина $D_\psi(\omega)$ тождественно равна 1; следовательно, система $\{\psi_{j\,k}\}$ является фреймом Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$. В частности, каждая из функций $a_{m\,l}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $l\in\mathbb{N}$, генерирует фрейм Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Пример 3.2. Пусть

$$\psi(x) = 2^{-1/2}(a_{14}(x) + \kappa a_{11}(x)),$$

где κ – положительный параметр. Для любого $\omega\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$\widehat{\psi}(\omega) = \mathbf{1}_{[2,5/2)}(\omega) + \kappa\mathbf{1}_{[1/2,1)}(\omega), \quad |\widehat{\psi}(\omega)|^2 = \mathbf{1}_{[2,5/2)}(\omega) + \kappa^2\mathbf{1}_{[1/2,1)}(\omega),$$

и

$$\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)\widehat{\psi}(2^{-j}\omega\oplus l) = 0 \quad \text{для всех} \quad j\in\mathbb{Z}_+,\ l\in\mathbb{N}.$$

Кроме того, если $1\le\omega<5/4$, то $\widehat{\psi}(\omega/2)=\kappa$ и $\widehat{\psi}(2\omega)=1$, а если $5/4\le\omega<2$, то $\widehat{\psi}(\omega/2)=\kappa$ (при этом $\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)=0$ для $j\ne-1$ и $j\ne1$). Отсюда для данной функции ψ получаются следующие значения

$$A_\psi = \kappa^2, \quad B_\psi = 1+\kappa^2, \quad B_\psi/A_\psi = 1+\frac{1}{\kappa^2}$$

и фрейм $\{\psi_{j\,k}\}$ приближается к фрейму Парсеваля при $\kappa\to\infty$.

Пусть $\mathcal{E}_n$ – пространство функций, заданных на $\mathbb{R}_+$ и постоянных на двоичных интервалах ранга n. Очевидно, если $f \in \mathcal{E}_n$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k2^{-n})\mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4}$$

Для данного $t > 0$ функция $\mathcal{D}_t$, заданная равенством

$$\mathcal{D}_t(x) = \int_0^t \chi(x,\omega)\, d\omega, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

называется *обобщенным ядром Дирихле – Уолша* (функция $\chi(x,\omega)$ была определена в § 1). Легко проверить, что

$$\mathcal{D}_{2^n} = 2^n \mathbf{1}_{[0,2^{-n})} \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

и

$$\widehat{\mathcal{D}}_t = \mathbf{1}_{[0,t)} \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{3.6}$$

Пример 3.4. Пусть $\psi = \mathcal{D}_{2\gamma} - \mathcal{D}_\gamma$, где $0 < \gamma \le 1$. Полагая $\alpha = 1/\gamma$ и учитывая (3.6), будем иметь $\widehat{\psi} = \mathbf{1}_{[1/\alpha,\, 2/\alpha)}$, т.е. $\psi = g_{1\,1}^{(\alpha)}$, где $\alpha \ge 1$. Как в примере 3.1 получаем, что система $\{\psi_{j\,k}\}$ является фреймом Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для любого $t > 0$ подпространства

$$V_j(t) := \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) \mid \widehat{f}(\omega) = 0 \quad \text{для} \quad \omega > 2^j t\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяют условиям

$$V_j(t) \subset V_{j+1}(t), \quad \bigcap_j V_j(t) = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_j V_j(t)} = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\varphi = \mathcal{D}_t$, где $0 < t \le 1$. Тогда*

$$\varphi(x) = \sum_{k\,\in \mathbb{Z}_+} \varphi(k/2)\, \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{3.8}$$

и для каждого $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j\,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является фреймом Парсеваля для $V_j(t)$. Более того, для любой функции $f \in V_j(t)$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k2^{-j})\mathcal{D}_t(2^j x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.7}$$

В силу (3.5) разложение (3.7) при $t = 1$ совпадает с (3.4). Для $0 < t < 1$ рассмотрим подпространства

$$W_j(t) = V_j(t)^\perp \cap V_{j+1}(t), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ортогональный проектор $Q_j : L^2(\mathbb{R}_+) \to W_j(t)$ является мультипликатором и действует по правилу

$$g_j = Q_j f \iff \widehat{g}_j = \widehat{f} \cdot \mathbf{1}_{[2^j t, 2^{j+1} t)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Полагая $\psi = \mathcal{D}_{2t} - \mathcal{D}_t$, видим, что

$$\widehat{\psi}_{j\,k}(\omega) = 2^{-j/2} w_k(\omega) \mathbf{1}_{[2^j t, 2^{j+1} t)}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и для каждого j система $\{\psi_{j\,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является фреймом Парсеваля для $W_j(t)$.

Благодарю за внимание.