Ю.А.Фарков

Функции Уолша и непрерывное вейвлет-преобразование[1]

Основы теории рядов и преобразований Уолша как одного из разделов современного гармонического анализа изложены в монографиях [1] - [3]. Ортогональные вейвлеты в двоичном анализе и соответствующие им масштабирующие функции, представимые в виде лакунарных рядов Уолша, изучались в [4] - [10]. В настоящей заметке с помощью функций Уолша определяется непрерывное вейвлет-преобразование для функций из пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ и для этого преобразования доказываются аналоги хорошо известных теорем Гроссмана – Морле (см., например, [11, § 2.4], [12, § 3.3]).

Пусть $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_+^*$ – множества неотрицательных и положительных действительных чисел соответственно (т.е. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$). Как обычно, положим $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+^*$. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ числа $x_{-j}, x_j \in \{0, 1\}$ определим из двоичного разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} 2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j} \tag{1}$$

(в случае двоично-рационального x выбирается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Диадическое сложение на $\mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} |\, x_{-j} - y_{-j}| 2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} |\, x_j - y_j| 2^{-j}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Для $x, \omega \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\chi(x, \omega) = (-1)^{\sigma(x,\omega)}, \quad \sigma(x, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \omega_{-j} + x_{-j} \omega_j,$$

где числа x_j, ω_j находятся из разложений вида (1). Система функций Уолша $\{w_l\}$ на $\mathbb{R}_+$ может быть задана по формуле

$$w_l(x) = \chi(x, l), \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Основные свойства функций и рядов Уолша подробно изложены в [1] - [3].

Скалярное произведение и свертка в $L^2(\mathbb{R}_+)$ определяются равенствами

$$\langle f_1 \,, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f_1(t) \overline{f_2(t)} \, dt, \qquad (f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f_1(t) f_2(t \oplus x) \, dt.$$

Обозначим через $\| \cdot \|$ норму пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$: $\|f\| = \sqrt{\langle f \,, f \rangle}$.

Преобразование Фурье – Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \chi(x, \omega) \, dx, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и стандартным образом распространяется на все функции из $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ называется *W-непрерывной в точке* $x \in \mathbb{R}_+$, если

$$\sup_{0 \le h < 1/2^n} |f(x \oplus h) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

[1]Работа опубликована в сб.: V Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Труды. - Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР, 2008. С. 27-32.

Функция f называется *W-непрерывной на множестве* $M \subset \mathbb{R}_+$, если она W-непрерывна в каждой точке $x \in M$. Известно, что преобразование Фурье – Уолша произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ является W-непрерывной на $\mathbb{R}_+$ функцией (см., например, [2, с.422]).

Функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условию

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \, \frac{d\omega}{\omega} < +\infty, \tag{2}$$

называется *вейвлетом* в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Например, условие (2) выполнено для вейвлета Хаара:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \\ 0, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Для $j \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$ положим

$$a_{j,\,l}(x) = \begin{cases} 2^{-j/2} w_l(2^{-j}x), & x \in [0, 2^j), \\ 0, & x \in [2^j, +\infty). \end{cases} \tag{3}$$

Имеют место следующие свойства.

1. При каждом $j \in \mathbb{Z}_+$ функции (3) ортонормированы на интервале $[0, 2^j)$, т.е.

$$\int_0^{2^j} a_{j,\,l}(x) a_{j,\,k}(x)\, dx = \delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{N}.$$

2. Преобразование Фурье – Уолша функций (3) вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_{j,\,l}(\omega) = \begin{cases} 2^{j/2}, & \omega \in [l2^{-j}, (l+1)2^{-j}), \\ 0, & \omega \notin [l2^{-j}, (l+1)2^{-j}). \end{cases}$$

3. Функции (3) являются вейвлетами в $L^2(\mathbb{R}_+)$. В частности, функция $a_{0,1}$ совпадает с вейвлетом Хаара.

4. Произвольная финитная масштабирующая функция, генерируюшая кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, разлагается в ряд по функциям (3).

5. Существуют ортогональные вейвлеты в $L^2(\mathbb{R}_+)$, являющиеся конечными линейными комбинациями функций (3).

Свойства 1 и 2 хорошо известны (см., например, [2], [3]), свойство 3 следует из свойства 2, а свойства 4 и 5 отмечались в [9]. Из свойства 2 видно, что для функции $\psi = a_{j,\,l}$ условие (2) выполнено с константой $c_\psi = 2^j \log(1 + 1/l)$.

Вейвлетами в $L^2(\mathbb{R}_+)$ являются также функции $g^\alpha_{j,\,l}$, определяемые условием

$$\widehat{g}^\alpha_{j,\,l}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [l\alpha^{-j}, (l+1)\alpha^{-j}), \\ 0, & \omega \notin [l\alpha^{-j}, (l+1)\alpha^{-j}), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ (так что $a_{j,\,l} = 2^{j/2} g^2_{j,\,l}$).

Непрерывное вейвлет-преобразование произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ относительно вейвлета ψ определяется равенством

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{\psi_{a,\,b}(x)}\, dx, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где $\psi_{a,\,b}(x) = a^{-1/2} \psi((x \oplus b)/a)$. Отметим, что $\|\psi_{a,\,b}\| = \|\psi\|$ и $\widehat{\psi}_{a,\,b}(\omega) = a^{1/2} \chi(b, \omega) \widehat{\psi}(a\omega)$.

По неравенству Коши – Буняковского имеем $|(W_\psi f)(a,\, b)| \leq \|f\|\,\|\psi\|$. Следовательно, непрерывное вейвлет-преобразование любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ существует и ограничено.

По формуле Парсеваля из (4) получаем равенство

$$(W_\psi f)(a,b) = a^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\chi(b,\omega)\,d\omega.$$

Значит, для каждого фиксированного $a > 0$ функция $(W_\psi f)(a,\,\cdot)$ является преобразованием Фурье – Уолша функции

$$F_a(\omega) := a^{1/2}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)} \tag{5}$$

(а именно, $(W_\psi f)(a,\, b) = \widehat{F}_a(b)$). По известному свойству преобразования Фурье – Уолша (см. [2, с.422]), функция $W_\psi f$ является W-непрерывной на лучах $\{(a,b)\mid b \in \mathbb{R}_+\}$, $a = const$, и стремится на них к нулю при $b \to \infty$. Кроме того, если $W_\psi f = 0$, то $\widehat{f} = 0$ и, значит, $f = 0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$. Поэтому непрерывное вейвлет-преобразование W_ψ инъективно на $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = L^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\, \frac{da\,db}{a^2}\right)$$

со скалярным произведением

$$\langle u\,, v\rangle_{\mathcal{H}} = \int\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+} u(a,b)\,\overline{v(a,b)}\,\frac{da\,db}{a^2}.$$

Теорема 1. *Пусть функция $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет условию* (2). *Тогда для всех $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ справедливы равенства*

$$\langle W_\psi f\,, W_\psi g\rangle_{\mathcal{H}} = c_\psi \langle f\,, g\rangle \tag{6}$$

и

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_\psi}\int\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+} |W_\psi f(a,b)|^2 \frac{da\,db}{a^2}. \tag{7}$$

Доказательство. Для данных f, g определим F_a, G_a по формуле (5). Тогда

$$\langle W_\psi f\,, W_\psi g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\,db\right)\frac{da}{a^2} = \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \widehat{F}_a(b)\overline{\widehat{G}_a(b)}\,db\right)\frac{da}{a^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*}\langle \widehat{F}_a, \widehat{G}_a\rangle\frac{da}{a^2} = \int_{\mathbb{R}_+^*}\langle F_a, G_a\rangle\frac{da}{a^2} = \int_{\mathbb{R}_+}\left(a\int_{\mathbb{R}_+}\widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{g}(\omega)}\,|\,\widehat{\psi}(a\omega)|^2\,d\omega\right)\frac{da}{a^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{g}(\omega)}\int_{\mathbb{R}_+}|\,\widehat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a}\right)d\omega.$$

Для $\omega > 0$ подстановка $a = a'/\omega$ дает

$$\int_{\mathbb{R}_+}|\,\widehat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a} = \int_{\mathbb{R}_+}|\,\widehat{\psi}(a')|^2\frac{da'}{a'} = c_\psi$$

и, следовательно, верно равенство (6). При $f = g$ из (6) получаем (7). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет условию* (2). *Тогда для любой $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi}\int\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)\psi_{a,\,b}(t)\,db\frac{da}{a^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Полагая $\psi_a(t) := a^{-1/2}\psi(t/a)$, будем иметь

$$W_\psi f(a,b) = (f * \overline{\psi_a})(b), \qquad \widehat{\psi}_a(\omega) = a^{1/2}\widehat{\psi}(a\omega)$$

и

$$(W_\psi f(a,\cdot) * \psi_a)(t) = \int_{\mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)\psi_a(t \oplus b)\, db = \int_{\mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)\psi_{a,\,b}(t)\, db.$$

Интеграл в правой части формулы (8) записывается в виде

$$\frac{1}{c_\psi}\int_{\mathbb{R}_+^*} (W_\psi f(a,\cdot) * \psi_a)(t)\,\frac{da}{a^2} = \frac{1}{c_\psi}\int_{\mathbb{R}_+^*} f * \overline{\psi_a} * \psi_a(t)\,\frac{da}{a^2}.$$

Выполняя преобразование Фурье – Уолша, получим

$$\frac{1}{c_\psi}\int_{\mathbb{R}_+^*} \widehat{f}(\omega)a\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\widehat{\psi}(a\omega)\,\frac{da}{a^2} = \frac{\widehat{f}(\omega)}{c_\psi}\int_{\mathbb{R}_+^*} |\,\widehat{\psi}(a\omega)|^2\,\frac{da}{a}.$$

Полагая $a = a'/\omega$, заключаем, что преобразование Фурье – Уолша от правой части формулы (8) совпадает с $\widehat{f}(\omega)$. Теорема доказана.

В теореме 2 формула (8) понимается как равенство двух функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$. При некоторых дополнительных условиях это равенство выполняется поточечно.

Теорема 3. *Пусть функция* $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет условию* (2) *и* W*-непрерывна на* $\mathbb{R}_+$, *а функция* $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ *является* W*-непрерывной в точке* x. *Тогда при* $t = x$ *имеет место равенство* (8).

Доказательство. Обобщенный интеграл Дирихле – Уолша функции f в точке x определяется равенством

$$S_t(x) = \int_0^t \widehat{f}(\omega)\chi(x,\omega)\,d\omega, \quad t > 0.$$

Известно [3, с.28], что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2^n}(x) = 2^n \int_0^{2^{-n}} f(x \oplus u)\,du = (f * D_{2^n})(x), \tag{9}$$

где

$$D_{2^n}(t) = \begin{cases} 2^n, & t \in [0, 2^{-n}), \\ 0, & t \in [2^{-n}, \infty). \end{cases}$$

Из (9) получаем

$$|\,S_{2^n}(x) - f(x)| \le 2^n \int_0^{2^{-n}} |\,f(x \oplus u) - f(x)|\,du \le \sup_{0 \le u < 1/2^n} |f(x \oplus u) - f(x)|$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (f * D_{2^n})(x) = f(x). \tag{10}$$

Формула (6) может быть записана в виде

$$\langle f\,, g\rangle = \frac{1}{c_\psi}\int\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)\langle \psi_{a,\,b}\,, g\rangle\, db\frac{da}{a^2}.$$

В частности, для $g = D_{2^n}(\cdot \oplus x)$ имеем

$$(f * D_{2^n})(x) = \frac{1}{c_\psi}\int\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b)(\psi_{a,\,b} * D_{2^n})(x)\, db\frac{da}{a^2}.$$

Отсюда, полагая $n \to \infty$ и пользуясь (10), выводим требуемое равенство. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что для преобразования (4) могут быть доказаны и некоторые другие аналоги известных свойств непрерывного вейвлет-преобразования функций, заданных на прямой $\mathbb{R}$.

Список литературы

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М.: Издательство ЛКИ, 2008.

[2] Schipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N.Y.: Adam Hilger, 1990.

[3] Голубов Б.И. Элементы двоичного анализа. М.: МГУП, 2005.

[4] Lang W.C. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 305–312.

[5] Lang W.C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. P. 307–317.

[6] Lang W.C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533-544.

[7] Farkov Yu.A. Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$ // Proc. Intern. Conf. "Wavelets and splines"(July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia). St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2005. P. 4-26.

[8] Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С. 193-220.

[9] Протасов В.Ю., Фарков Ю.А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сборник. 2006. Т. 197. N 10. С. 129-160.

[10] Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп// Матем. заметки. 2007. Т. 82. N 6. С. 934-952.

[11] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001.

[12] Чуи К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.