Известия вузов. Математика
2012, №9, с. 54–65

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ю.А. ФАРКОВ, М.Е. БОРИСОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИАДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И КОДИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. С помощью ядер типа Дирихле–Уолша первым автором недавно были определены периодические диадические всплески на положительной полупрямой, аналогичные тригонометрическим всплескам Чуи–Маскара. В данной статье излагается обобщение этой конструкции и приведены примеры использования диадических периодических всплесков для кодирования фрактальных функций Римана, Вейерштрасса, Шварца, Ван-дер-Вардена, Ганкеля и Такаги.

Ключевые слова: периодические диадические всплески, функции Уолша, ядро Дирихле–Уолша, дискретное преобразование Уолша, кодирование сигналов, фрактальные функции.

УДК: 519.677

1. Периодические диадические всплески

В работе Чуи и Маскара [1] с помощью модифицированных ядер Дирихле

$$D_m^*(x) := \frac{1}{2}(1+\cos mx) + \sum_{k=1}^{m-1} \cos kx, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

определены всплесковые базисы в пространствах тригонометрических полиномов. Аналогичные всплесковые конструкции были построены для классических ортогональных полиномов Чебышева, Лежандра, Эрмита, Якоби и Лагерра [2], [3]. Построению кратномасштабного анализа для периодических всплесков посвящены статьи [4]–[7] и ([8], гл. 9). В данной заметке обобщается конструкция периодических всплесков на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, определенная в [9] с помощью полиномов Уолша и соответствующим им ядрам типа Дирихле. Некоторые другие всплесковые конструкции в анализе Уолша изучались в [10]–[13]. Показано, что введение параметра a позволяет оптимизировать выбор базиса при использовании изучаемых всплесков для обработки сигналов (ср. с [14], [15]).

2. Периодические диадические всплески

Напомним, что *система функций Уолша* $\{w_l \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ на $\mathbb{R}_+$ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_l(x) = \prod_{j=0}^{k} (w_1(2^j x))^{\nu_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

Поступила 28.07.2011

где числа k и ν_j берутся из двоичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} \nu_j 2^j, \quad \nu_j \in \{0, 1\}, \quad \nu_k = 1, \quad k = k(l),$$

а $w_1(x)$ — функция, заданная на $[0, 1)$ формулой

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 1/2); \\ -1, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbb{R}_+$ так, что $w_1(x+1) = w_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Доказательства применяемых ниже свойств функций Уолша можно найти в книгах [16]–[18].

Целая и дробная части числа x обозначаются через $[x]$ и $\{x\}$ соответственно. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1\}$ определим равенствами

$$x_j = [2^j x] \pmod 2, \quad x_{-j} = [2^{1-j} x] \pmod 2. \tag{1}$$

Легко видеть, что числа (1) являются цифрами двоичного разложения числа x:

$$x = [x] + \{x\} = \sum_{j<0} x_j 2^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$x \oplus y = \sum_{j<0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j>0} |x_j - y_j| 2^{-j},$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (1).

Фиксируем $n \in \mathbb{Z}_+$ и положим $N = 2^n$. Числовые промежутки

$$I_k^{(n)} = [k/N, (k+1)/N), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

называются *двоичными интервалами ранга n*. Положим $\Delta = [0, 1)$. Легко видеть, что

$$I_k^{(n)} \cap I_l^{(n)} = \varnothing \quad \text{для} \quad k \neq l \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=0}^{N-1} I_k^{(n)} = \Delta.$$

Функции Уолша $w_l(x)$ при $0 \le l \le N-1$ принимают постоянные значения, равные 1 или -1, на каждом из двоичных интервалов ранга n, причем $w_l(x) = 1$ при $x \in I_0^{(n)}$. Обозначим через $w_{l,k}^{(n)}$ постоянное значение, которое принимает функция $w_l(x)$ на интервале $I_k^{(n)}$, т. е.

$$w_{l,k}^{(n)} = w_l(k/N) \quad \text{для} \quad 0 \le l, k \le N-1.$$

Для любого натурального n матрица $(w_{l,k}^{(n)})$ является симметричной и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_{i,l}^{(n)} w_{i,k}^{(n)} = \sum_{j=0}^{N-1} w_{l,j}^{(n)} w_{k,j}^{(n)} = N \delta_{l,k}, \quad 0 \le l, k \le N-1.$$

Функция $D_N(x) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} w_j(x)$ называется *ядром Дирихле–Уолша* порядка N. По лемме Пэли имеем

$$D_N(x) = \begin{cases} N, & x \in I_0^{(n)}; \\ 0, & x \in \Delta \setminus I_0^{(n)}. \end{cases} \tag{2}$$

Для каждого $a \in (0,1)$ определим *модифицированное ядро Дирихле–Уолша* по формуле

$$D_N^a(x) = a + \sum_{k=1}^{N-2} w_k(x) + a\, w_{N-1}(x)$$

(случай $a = 1/2$ рассматривался в [9]). Далее, выберем узловые точки

$$x_{n,k} = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

и по аналогии с тригонометрическим случаем [1] введем функции

$$\varphi_{n,k}(x) = \Phi_n(x \oplus x_{n,k}), \quad \psi_{n,k}(x) = \Psi_n(x \oplus x_{n,k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\Phi_n(x) = \int_0^{x_{n,1}} D_N^a(x \oplus t)\, dt = N^{-1} D_N^a(x),$$

$$\Psi_n(x) = \int_0^{x_{n+1,1}} [D_{2N}^a(x \oplus t) - D_N^a(x \oplus t)]\, dt - \int_{x_{n+1,1}}^{x_{n,1}} [D_{2N}^a(x \oplus t) - D_N^a(x \oplus t)]\, dt.$$

Легко видеть, что линейные пространства

$$V_n = \operatorname{span}\{1, w_1(x), \ldots, w_{N-1}(x)\} \quad \text{и} \quad W_n = \operatorname{span}\{w_N(x), w_{N+1}(x), \ldots, w_{2N-1}(x)\}$$

имеют размерность N и верно равенство $V_n \bigoplus W_n = V_{n+1}$, т. е. прямая сумма пространств V_n и W_n совпадает с V_{n+1}. Будем называть V_n *аппроксимирующими*, а W_n — *детализирующими* пространствами, а функции $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,k}$ соответственно *масштабирующими функциями* и *всплесками*. Из приведенных ниже результатов следует, что системы $\{\varphi_{n,k}\}_{k=0}^{N-1}$ и $\{\psi_{n,k}\}_{k=0}^{N-1}$ являются базисами соответственно в пространствах V_n и W_n. Кроме того, имеются быстрые алгоритмы для разложения $f_{n+1} \in V_{n+1}$ в ортогональную сумму:

$$f_{n+1} = f_n + g_n, \quad f_n \in V_n, \quad g_n \in W_n,$$

и для восстановления f_{n+1} по f_n и g_n. Из формулы (2) видно, что в случае $a = 1$ изучаемая конструкция совпадает с периодическим кратномасштабным анализом Хаара.

Для произвольного полинома $v \in V_n$ значения, принимаемые им на двоичных интервалах $I_l^{(n)}$, $0 \le l \le N-1$, совпадают с его значениями в узловых точках (3):

$$v(x_{n,l}) = v(x) \quad \text{для} \quad x \in I_l^{(n)}, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Более того, для коэффициентов разложения

$$v(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k(x), \quad x \in \Delta,$$

имеет место формула

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{l,k}^{(n)} v(x_{n,l}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

т. е. полином v восстанавливается по своим значениям $v(x_{n,l})$ с помощью дискретного преобразования Уолша (быстрые алгоритмы для реализации этого преобразования имеются в ([16], с. 252; [18], с. 458)).

Предложение 1. *Справедливы равенства*

$$N\varphi_{n,k}(x) = a + \sum_{j=1}^{N-2} w_{k,j}^{(n)} w_j(x) + a w_{k,N-1}^{(n)} w_{N-1}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_{l,k}^{(n)} \varphi_{n,k}(x) = w_l(x), \quad l = 1, 2, \ldots, N-2,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_{n,k}(x) = a, \quad \sum_{k=0}^{N-1} w_{N-1,k}^{(n)} \varphi_{n,k}(x) = a\, w_{N-1}(x).$$

Для произвольного $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ положим $\sigma(l) = 1$, если в двоичном разложении

$$l = \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j 2^j, \quad \nu_j \in \{0, 1\},$$

среди цифр ν_j имеется нечетное число единиц, а в противном случае будем считать $\sigma(l) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $v \in V_n$ и числа $\alpha_{n,k} = \alpha_{n,k}(v)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, определены по формуле*

$$\alpha_{n,k} = \begin{cases} v(x_{n,k}) + \frac{2}{N}\left(\frac{1-a}{a}\right) \sum\limits_{l=0}^{N-1} (1-\sigma(l))\, v(x_{n,l}), & \text{если } \sigma(k) = 0; \\ v(x_{n,k}) + \frac{2}{N}\left(\frac{1-a}{a}\right) \sum\limits_{l=0}^{N-1} \sigma(l)\, v(x_{n,l}), & \text{если } \sigma(k) = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$v(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{n,k} \varphi_{n,k}(x), \quad x \in \Delta.$$

Для вычисления коэффициентов $\alpha_{n,k}$ можно воспользоваться также формулой

$$\alpha_{n,k} = \left(\frac{1-a}{a}\right) [c_0 + (-1)^{\sigma(k)} c_{N-1}] + v(x_{n,k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} v(x_{n,l}), \quad c_{N-1} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} (-1)^{\sigma(l)}\, v(x_{n,l}).$$

Предложение 2. *Справедливы формулы*

$$D_N(x) - (1-a) = N[\varphi_{n+1,0}(x) + \varphi_{n+1,1}(x)],$$

$$\Phi_n(x) = \varphi_{n+1,0}(x) + \varphi_{n+1,1}(x) - \frac{1-a}{N}\, w_{N-1}(x),$$

$$\Psi_n(x) = \varphi_{n+1,0}(x) - \varphi_{n+1,1}(x).$$

Согласно предложению 2 для $0 \le k \le N-1$ имеют место равенства

$$\varphi_{n,k}(x) = \varphi_{n+1,2k}(x) + \varphi_{n+1,2k+1}(x) - \frac{1-a}{N} (-1)^{\sigma(k)}\, w_{N-1}(x), \tag{4}$$

$$\psi_{n,k}(x) = \varphi_{n+1,2k}(x) - \varphi_{n+1,2k+1}(x). \tag{5}$$

Соответственно,

$$\varphi_{n+1,2k}(x) = \frac{1}{2}\,\varphi_{n,k}(x) + \frac{1}{2}\,\psi_{n,k}(x) + \frac{1-a}{2N}\,(-1)^{\sigma(k)}\,w_{N-1}(x), \tag{6}$$

$$\varphi_{n+1,2k+1}(x) = \frac{1}{2}\,\varphi_{n,k}(x) - \frac{1}{2}\,\psi_{n,k}(x) + \frac{1-a}{2N}\,(-1)^{\sigma(k)}\,w_{N-1}(x). \tag{7}$$

Заметим, что для коэффициентов разложения

$$w_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \gamma_{n+1,k}\varphi_{n+1,k}(x) \tag{8}$$

справедливы рекуррентные формулы

$$\gamma_{2,0} = \gamma_{2,1} = 1, \quad \gamma_{2,2} = \gamma_{2,3} = -1,$$
$$\gamma_{n+1,k} = \gamma_{n,k}, \quad \gamma_{n+1,N+k} = -\gamma_{n,k}, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Это следует из того, что согласно предложению 1 коэффициенты в (8) определяются по формуле $\gamma_{n+1,k} = w^{(n+1)}_{N-1,k}$, $0 \leq k \leq 2N-1$. Отметим также, что

$$w_{N-1}(x) = \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^{\sigma(j)}\varphi_{n,j}(x). \tag{9}$$

Формулы (4), (5) и (8) дают разложения базисных функций $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,k}$ уровня n по масштабирующим функциям $(n+1)$-го уровня $\varphi_{n+1,l}$, $l = 0, 1, \ldots, 2N-1$. Обратно, после подстановки в (6) и (7) разложения (9) получаются формулы, выражающие функции $\varphi_{n+1,l}$, $l = 0, 1, \ldots, 2N-1$, через масштабирующие функции и всплески n-го уровня.

Теорема 2. *Пусть $v \in W_n$ и коэффициенты $\alpha_{n+1,l}$ определены как в теореме* 1. *Тогда имеет место разложение*

$$v(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_{n,k}\psi_{n,k}(x),$$

где $\beta_{n,k} = \beta_{n,k}(v) = \alpha_{n+1,2k} = -\alpha_{n+1,2k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Доказательства сформулированных выше теорем и предложений аналогичны доказательствам соответствующих результатов из недавней статьи первого автора о периодических p-всплесках [19]. Отметим также, что приведенная выше теорема 1 может быть обобщена в соответствии с теоремой 2 работы [6].

3. Алгоритмы и вычислительные эксперименты

Для функций $f_n \in V_n$ и $g_n \in W_n$ имеем

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{n,k}\varphi_{n,k}(x), \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{N-1} D_{n,k}\psi_{n,k}(x), \tag{10}$$

где последовательности коэффициентов

$$\mathbf{C}_n = \{C_{n,k}\}, \quad \mathbf{D}_n = \{D_{n,k}\} \tag{11}$$

однозначно определяются по f_n и g_n соответственно. Покажем, как по последовательностям $\mathbf{C}_n$ и $\mathbf{D}_n$ найти для суммы $f_{n+1} = f_n + g_n$ разложение вида

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} C_{n+1,k}\varphi_{n+1,k}(x), \tag{12}$$

и обратно, как по последовательности $\mathbf{C}_{n+1} = \{C_{n+1,k}\}$ восстановить последовательности коэффициентов (11) для разложений (10).

Согласно (6), (7) и (9) имеем

$$\varphi_{n+1,l}(x) = \sum_k A^{(n)}_{l,k}\varphi_{n,k}(x) + B^{(n)}_{l,k}\,\psi_{n,k}(x),$$

где

$$A^{(n)}_{l,k} = \begin{cases} 1/2 + (1-a)/(2aN) & \text{для } k = [\,l/2]; \\ (1-a)(-1)^{\sigma(k)+\sigma([l/2])}/(2aN) & \text{для } k \neq [\,l/2], \end{cases} \tag{13}$$

$$B^{(n)}_{l,k} = \begin{cases} (-1)^l/2 & \text{для } k = [\,l/2]; \\ 0 & \text{для } k \neq [\,l/2]. \end{cases} \tag{14}$$

Отсюда, учитывая (10) и (12), получаем

$$\sum_k C_{n,k}\varphi_{n,k}(x) + \sum_k D_{n,k}\psi_{n,k}(x) = \sum_l C_{n+1,l}\Big\{\sum_k A^{(n)}_{l,k}\varphi_{n,k}(x) + B^{(n)}_{l,k}\,\psi_{n,k}(x)\Big\} =$$

$$= \sum_k\Big\{\sum_l C_{n+1,k}A^{(n)}_{l,k}\Big\}\varphi_{n,k}(x) + \sum_k\Big\{\sum_l C_{n+1,k}B^{(n)}_{l,k}\Big\}\psi_{n,k}(x)$$

и, следовательно,

$$C_{n,k} = \sum_l A^{(n)}_{l,k}C_{n+1,l}, \quad D_{n,k} = \sum_l B^{(n)}_{l,k}C_{n+1,l}. \tag{15}$$

Далее, согласно (4), (5) и (8)

$$\varphi_{n,k}(x) = \sum_l P^{(n)}_{l,k}\varphi_{n+1,l}(x), \quad \psi_{n,k}(x) = \sum_l Q^{(n)}_{l,k}\,\varphi_{n+1,l}(x),$$

где

$$P^{(n)}_{l,k} = \begin{cases} 1 + \gamma_{n+1,k}(1-a)(-1)^{\sigma(l)+1}/N & \text{для } k = [\,l/2]; \\ \gamma_{n+1,k}(1-a)(-1)^{\sigma(l)+1}/N & \text{для } k \neq [\,l/2], \end{cases} \tag{16}$$

$$Q^{(n)}_{l,k} = \begin{cases} (-1)^l & \text{для } k = [\,l/2]; \\ 0 & \text{для } k \neq [\,l/2]. \end{cases} \tag{17}$$

Поэтому

$$\sum_k C_{n+1,k}\varphi_{n+1,k}(x) = \sum_l C_{n,l}\Big\{\sum_k P^{(n)}_{l,k}\varphi_{n+1,k}(x)\Big\} + \sum_l D_{n,l}\Big\{\sum_k Q^{(n)}_{l,k}\varphi_{n+1,k}(x)\Big\} =$$

$$= \sum_k\Big\{\sum_l P^{(n)}_{l,k}C_{n,l} + Q^{(n)}_{l,k}D_{n,l}\Big\}\varphi_{n+1,k}(x)$$

и, значит,

$$C_{n+1,k} = \sum_l P^{(n)}_{l,k}C_{n,l} + Q^{(n)}_{l,k}D_{n,l}. \tag{18}$$

Для любой функции $f_n \in V_n$ и любого $n_0 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ с помощью формул (13)–(15) после замены n на $n-1, n-2, \dots, n-n_0$ получается разложение

$$f_n = f_{n-n_0} + \sum_{j=1}^{n_0} g_{n-j}$$

и, соответственно, вектор $\mathbf{C}_n$ преобразуется в набор векторов $\mathbf{C}_{n-n_0}, \mathbf{D}_{n-1}, \dots, \mathbf{D}_{n-n_0}$. В этом состоит прямое дискретное диадическое периодическое всплесковое преобразование с параметром a (обозначим его W_a). Соответствующее обратное преобразование W_a^{-1} основано на формулах (16)–(18) и позволяет восстановить функцию f_n и вектор $\mathbf{C}_n$ по набору векторов $\mathbf{C}_{n-n_0}, \mathbf{D}_{n-1}, \dots, \mathbf{D}_{n-n_0}$. Эти алгоритмы разложения и восстановления существенно проще (как по структуре, так и по числу арифметических операций) по сравнению с аналогичными алгоритмами для случая тригонометрических всплесков, построенных в [1].

Приведем результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих возможности построенных дискретных всплесковых преобразований. *Методом A* будем называть метод кодирования, состоящий из следующих четырех шагов.

(1) К входному массиву $\mathbf{C}_n$ применяется прямое дискретное вейвлет-преобразование.
(2) Среди вейвлет-коэффициентов выделяется некоторое количество (например, 10% или 1%) наибольших по модулю, остальные коэффициенты приравниваются к нулю.
(3) К полученному массиву вейвлет-коэффициентов применяется обратное дискретное вейвлет-преобразование.
(4) По восстановленному массиву $\widetilde{\mathbf{C}}_n$ вычисляется среднее квадратическое отклонение

$$\delta(\mathbf{C}_n, \widetilde{\mathbf{C}}_n) := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (C_{n,k} - \widetilde{C}_{n,k})}.$$

Обозначим через DbN вейвлет Добеши порядка N. В работе ([20], с. 177) с использованием метода A показано, что для некоторых изображений вейвлет Db4 имеет преимущества по сравнению с вейвлетом Хаара (ср. с [14], [15]).

Таблица 1. Значения энтропии при кодировании функции Шварца методом C

p	a	W_a	Haar	Db4
99	0.09	5.1682	5.3081	3.6210
95	0.78	1.5490	1.7560	1.4631
90	1	0.5415	0.5415	0.7409

Таблица 2. Среднеквадратичная погрешность при кодировании методом A функции Шварца

p	a	W_a	Haar	Db4
85	0.95	0.0663	0.0670	0.67865
90	0.86	0.0868	0.0890	0.3001
95	0.86	0.1392	0.1394	1.1262

Метод B отличается от метода A тем, что в нем шаг 2 заменен равномерным квантованием вейвлет-коэффициентов. Напомним, что равномерное квантование произвольного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ осуществляется по формуле

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j < \Delta; \\ \Delta\left[\frac{x_j}{\Delta}\right] + 0.5\,\mathrm{sign}(x_j)\Delta, & \text{если } |x_j| \geq \Delta, \end{cases}$$

где Δ — шаг квантования. В приведенных ниже таблицах 3 и 5 полагаем

$$\Delta = \Delta_t = (\max_{1\leq j\leq m} x_j - \min_{1\leq j\leq m} x_j)/t,$$

где значения t указаны в таблицах. Если вектор $\mathbf{x}$ представляет собой алфавит простейшего источника без памяти, то энтропия этого источника определяется по формуле

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} -p_j \log_2(p_j),$$

где p_j — вероятность, с которой источник выдает значение x_j. На практике вероятность заменяется относительной частотой.

Для произвольных векторов

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m),\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k), \dots,\ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s)$$

через $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z})$ будем обозначать вектор

$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k, \dots, z_1, \dots, z_s).$$

Методом C будем называть метод кодирования, состоящий из следующих пяти шагов.

(1) Выбрать параметры $n_0 \in \mathbb{N}$, $a \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99, 1\}$, $t \in \mathbb{N}$ и $p \in \{1, 2, \dots, 100\}$.

(2) С помощью отображения W_a преобразовать данный вектор $\mathbf{C}_n$ в набор векторов $\mathbf{C}_{n-n_0}, \mathbf{D}_{n-1}, \dots, \mathbf{D}_{n-n_0}$.

(3) Провести равномерное квантование вектора $(\mathbf{C}_{n-n_0}, \mathbf{D}_{n-1}, \dots, \mathbf{D}_{n-n_0})$ с шагом Δ_t.

(4) К полученному на шаге 3 вектору применить преобразование W_a^{-1} и в результате получить вектор $\widetilde{\mathbf{C}}_n$.

(5) Проверить условие

$$\delta(C_n, \widetilde{C}_n) < \frac{p}{100} \cdot \max_{0\leq k\leq N-1} |C_{n,k}|. \tag{19}$$

Если условие (19) не выполняется, то заменить t на $t+1$ и повторить шаги 3–5.

(6) Вычислить значение параметра a, при котором энтропия вектора, получаемого после квантования на шаге 3, минимальна.

Таблица 3. Среднеквадратичная погрешность при кодировании функции Шварца методом B

t	a	W_a	Haar	Db4
10	0.26	0.0689	0.0803	0.0677
100	0.19	0.0328	0.0336	0.02636

Таблица 4. Среднеквадратичная погрешность при кодировании функции Вейерштрасса методом A

p	$(\alpha,\ \beta)$	a	W_a	Haar	Db4
85	(0.7, 5)	0.555	0.6142	0.6223	0.7495
85	(0.9, 3)	0.765	0.8983	0.9008	6.9543
85	(0.9, 7)	0.95	1.5876	1.5882	3.0923
90	(0.7, 5)	0.555	0.6142	0.6224	0.7495
90	(0.9, 3)	0.765	0.8982	0.9008	6.9543
90	(0.9, 7)	0.95	1.5876	1.5882	3.0923
95	(0.7, 5)	0.68	0.6448	0.6733	3.6479
95	(0.9, 3)	0.36	1.0690	1.0927	3.9443
95	(0.9, 7)	0.525	1.9078	1.91841	6.7068

Таблица 5. Среднеквадратичная погрешность при кодировании функции Вейерштрасса методом B

t	$(\alpha,\ \beta)$	a	W_a	Haar	Db4
10	(0.7, 5)	0.09	0.2389	0.2662	0.2773
10	(0.9, 3)	0.06	0.4593	0.4754	0.4714
10	(0.9, 7)	0.17	0.5243	0.5419	0.5376
100	(0.7, 5)	0.77	0.0754	0.0799	0.0819
100	(0.9, 3)	0.39	0.1308	0.1384	0.1437
100	(0.9, 7)	0.73	0.1476	0.1537	0.1709

Подобный метод реализуется и при использовании дискретных преобразований Хаара и Добеши (преобразование Хаара получается при $a = 1$). Отметим, что в приведенных примерах значение p указывает также процент обнуляемых всплесковых коэффициентов при использовании методов A и B.

В первом примере в качестве исходного вектора $\mathbf{C}_n$ берется набор значений фрактальной функции Шварца (о применениях всплесковых методов к исследованию свойств фрактальных функций можно прочитать в монографиях [21] и [22]).

Пример 1. Функция Шварца $S(x)$ определяется по формуле

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(2^n x)}{4^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $h(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}$ и через $[x]$, как выше, обозначена целая часть x. Хорошо известно, что $S(x)$ — непрерывная и монотонная на $\mathbb{R}_+$ функция, не имеющая производной на всюду плотном множестве (см., например, [23], с. 211). Для случая $n = 8$, $n_0 = 7$ и $C_{8,k} = S(k/100)$, где $k = 0, 1, \dots, 255$, полученные методом C значения энтропии при дискретных преобразованиях Хаара, Db4 и W_a с оптимальными значениями параметра a приведены в табл. 1. Значения среднеквадратичных погрешностей при использовании методов A и B указаны в таблицах 2 и 3 (шаг квантования $\Delta = (\max_k |C_{8,k}|)/t$).

Пример 2. Функция Вейерштрасса определяется по формуле

$$\mathcal{W}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(\beta^n \pi x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta \geq 1/\alpha.$$

В табл. 4–6 приведены результаты, полученные методами A–C при шаге дискретизации 0.005 на отрезке [0, 1.28] и парах параметров $(\alpha, \beta) = (0.7,\ 5),\ (0.9,\ 3),\ (0.9,\ 7)$.

Таблица 6. Энтропия при кодировании функции Вейерштрасса методом C

p	$(\alpha,\ \beta)$	a	W_a	Haar	Db4
95	(0.7, 5)	0.48	4.0248	4.0678	4.2059
95	(0.9, 3)	0.45	3.9607	4.0120	4.0335
95	(0.9, 7)	0.67	4.3553	4.5534	4.3612
90	(0.7, 5)	0.52	2.7626	2.8200	3.5927
90	(0.9, 3)	0.41	2.6586	2.6803	2.8044
90	(0.9, 7)	0.51	3.3664	3.4892	3.2403

Таблица 7. Среднеквадратичная погрешность при обнулении 95% процентов

Функция	a	W_a	Haar	Db4
Ван-дер-Вардена	0.785	0.0945	0.0956	0.7736
Римана	0.31	0.2236	0.2546	1.6788
Такаги	0.27	0.0992	0.1515	0.9225
Ганкеля	0.90	0.2539	0.2568	0.8731

Видно, что в примерах 1 и 2 периодические диадические всплески с оптимальными значениями параметра a дают результаты в ряде случаев лучше, чем классические всплески.

Пример 3. В этом примере метод A применяется к дискретным аналогам фрактальных функций Ван-дер-Вардена $V(x)$, Римана $\mathcal{R}(x)$, Такаги $T(x)$ и Ганкеля $\mathcal{G}(x)$, определенных в ([24], § 1.6) следующим образом.

Пусть функция $f_0(x)$ имеет период 1 и на отрезке $[0, 1]$ определена по формуле

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0, 1/2); \\ 1 - x & \text{для } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(значение $f_0(x)$ равно расстоянию от x до ближайшей целочисленной точки). Тогда

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \tag{20}$$

— функция Ван-дер-Вардена;

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2} \tag{21}$$

— функция Римана;

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0(2^{n-1}x)}{2^n}, \qquad (22)$$

где $t_0(x) = 2|x - [x + (1/2)]|$, — функция Такаги;

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2} \sin\left[\frac{1}{\sin(\pi n x)}\right] \qquad (23)$$

— функция Ганкеля.

Таблица 7 содержит результаты, полученные методом A с исходными векторами $\mathbf{C}_n$ длиной 256, компонентами которых являются значения функций (20)–(22) с шагом 0.005 на отрезке [0, 1.28] и функции (23) на отрезке [0.01, 1.29]. Видно, что периодические диадические всплески с оптимальными значениями параметра a превосходят всплески Хаара и всплески Db4.

Авторы благодарят рецензента за несколько полезных замечаний.

Литература

[1] Chui C.K., Mhaskar H.N. *On trigonometric wavelets*, Constr. Approx. **9** (2–3), 167–190 (1993).
[2] Скопина М.А. *Ортогональные полиномиальные базисы Шаудера в* $C[-1,1]$ *с оптимальным ростом степеней*, Матем. сб. **192** (3), 115–136 (2001).
[3] Fischer B., Prestin J. *Wavelets based on orthogonal polynomials*, Math. Comp. **66** (220), 1593–1618 (1997).
[4] Петухов А.П. *Периодические дискретные всплески*, Алгебра и анализ **8** (3), 151–183 (1996).
[5] Петухов А.П. *Периодические всплески*, Матем. сб. **188** (10), 1481–1506 (1997).
[6] Skopina M. *Multiresolution analysis of periodic functions*, East J. Approx. **3** (2), 203–224 (1997).
[7] Максименко И.Е., Скопина М.А. *Многомерные периодические всплески*, Алгебра и анализ **15** (2), 1–39 (2003).
[8] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. *Теория всплесков* (Физматлит, М., 2006).
[9] Farkov Yu.A. *Wavelets and frames based on Walsh–Dirichlet type kernels*, Commun. Math. Appl. **1** (1), 27–46 (2010).
[10] Фарков Ю.А. *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах*, Изв. РАН. Сер. матем. **69** (3), 193–220 (2005).
[11] Фарков Ю.А. *Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона*, Матем. заметки **89** (6), 914–928 (2011).
[12] Farkov Yu.A., Rodionov E.A *Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups*, p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. **3** (3), 181–195 (2011).
[13] Farkov Yu.A. *Wavelets and frames in Walsh analysis*, In: Wavelets: Classification, Theory and Applications, Chapter 11, Ed. by Manel del Valle et al., (Nova Science Publishers, 2012), p. 267–304.
[14] Фарков Ю.А., Строганов С.А. *О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений*, Изв. вузов. Матем., № 7, 57–66 (2011).
[15] Farkov Yu.A., Maksimov A.Yu., Stroganov S.A. *On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. **9** (3), 485–499 (2011).
[16] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: теория и применения* (Изд-во ЛКИ, М., 2008).
[17] Голубов Б.И. *Элементы двоичного анализа* (Изд-во ЛКИ, М., 2007).
[18] Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis* (Adam Hilger, N. Y., 1990).
[19] Farkov Yu.A. *Periodic wavelets on the p-adic Vilenkin group*, p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. **3** (4), 281–287 (2011).
[20] Уэлстид С. *Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии* (Физматлит, М., 2007).
[21] Holshneider M. *Wavelets: an analysis tool* (Clarendon Press, Oxford, 1995).
[22] Jaffard S., Meyer Y. *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, Mem. Amer. Math. Soc., № 587, 1996.
[23] Медведев Ф.А. *Очерки истории теории функций действительного переменного* (КомКнига, М., 2006).

[24] *Новейшие методы обработки изображений* / под ред. А.А. Потапова (Физматлит, М., 2008).

Ю.А. Фарков

профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Российский государственный геологоразведочный университет,
ул. Миклухо-Маклая, д. 23, г. Москва, 117997, Россия,

e-mail: farkov@list.ru

М.Е. Борисов

аспирант, кафедра высшей математики,
Российский государственный геологоразведочный университет,
ул. Миклухо-Маклая, д. 23, г. Москва, 117997, Россия,

e-mail: borovikme@gmail.com

Yu.A. Farkov and M.E. Borisov

Periodic dyadic wavelets and coding of fractal functions

Abstract. Recently, using the Walsh–Dirichlet type kernel, the first author has defined periodic dyadic wavelets on the positive semiaxis which are similar to the Chui–Mhaskar trigonometric wavelets. In this paper we generalize this construction and give examples of applications of periodic dyadic wavelets for coding the Riemann, Weierstrass, Schwarz, van der Waerden, Hankel, and Takagi fractal functions.

Keywords: periodic dyadic wavelets, Walsh functions, Walsh–Dirichlet kernel, discrete Walsh transform, signal processing, fractal functions.

Yu.A. Farkov

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics,
Russian State Geological Prospecting University,
23 Miklukho-Maklai str., Moscow, 117997 Russia,

e-mail: farkov@list.ru

M.E. Borisov

Postgraduate, Chair of Higher Mathematics,
Russian State Geological Prospecting University,
23 Miklukho-Maklai str., Moscow, 117997 Russia,

e-mail: borovikme@gmail.com