The generalized Faber expansions for linear n-widths

Yu.A.Farkov

The extended talk at the International Conference "Extremal Problems in Complex and Real Analysis" held at People's Friendsip University of Russia, May 22-26, 2007

Abstract

Let Ω be an open subset of the plane $\mathbb{C}$ and let K be a compact subset of Ω. An analytic function $f : \Omega \to \mathbb{C}$ belongs to $BH^\infty(\Omega)$ if $|f(z)| \le 1$ for all $z \in \Omega$. Denote by $\mathrm{cap}\,(K, \Omega)$ the capacity of K related to Ω. For some K and Ω one can show that

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda_n(BH^\infty(\Omega); C(K))]^{1/n} = \exp(-1/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)),$$

where λ_n are the linear n-widths. In the case where K has a simply connected complement and Ω is a canonical neighbourhood of K, the classical tools for approximation of $f \in BH^\infty(\Omega)$ in $C(K)$ give the Faber series.

In this talk we consider the pairs (K, Ω) for which there exists a sequence functions $\{f_n\}$ with the following properties:

1. If f is analytic on Ω, then

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z), \quad z \in \Omega,$$

where the convergence is absolute and uniform over any compact subset of Ω. Moreover, this expansion is unique.

2. If $f \in BH^\infty(\Omega)$, then

$$\limsup_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_k||_{C(K)}^{1/n} \le \exp(-1/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)).$$

In special cases such systems of analytic functions was studied by J.L. Walsh, V.D. Erokhin, V.P. Zakharyuta, and others. If we assume that K is an union of several continua and $\partial K, \partial\Omega$ are smooth enough curves, then the relations

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega); C(K)) \asymp \exp(-n/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)),$$

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), L^q(K)) \asymp n^{-1/q} \exp(-n/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)), \quad 1 \le q < \infty,$$

are obtained by the consided generalized Faber expansions.

Ю.А.Фарков

Обобщенные разложения Фабера для линейных n-поперечников

§ 1. Введение

Линейный n-поперечник подмножества A нормированного пространства X определяется равенством

$$\lambda_n(A,X) := \inf_{\Lambda_n} \sup_{f\in A} ||f-\Lambda_n f||,$$

где нижняя грань берется по всем линейным ограниченным операторам Λ_n ранга n, отображающих X в себя. Уклонением множества A от подпространства L в X называют величину

$$d(A,L,X) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in L} ||x-y||,$$

а n-поперечник по Колмогорову множества A в X определяется равенством

$$d_n(A,X) := \inf_{L_n} d(A,L_n,X),$$

где L_n – произвольные подпространства из X размерности n. Легко видеть, что $d_n(A,X) \le \lambda_n(A,X)$. Для предкомпактного множества A через $N_\varepsilon(A;X)$ обозначают минимальное число точек в ε-сети для A в X. Величина

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A,X) := \log_2 N_\varepsilon(A,X)$$

называется ε-энтропией множества A относительно X. Об основных свойствах величин $\lambda_n(A,X)$, $d_n(A,X)$ и $\mathcal{H}_\varepsilon(A,X)$ можно прочитать, например, в [1].

Пусть Ω – открытое множество на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, E – компактное подмножество в Ω. Пространство $H^\infty(\Omega)$ состоит из функций f, аналитических в Ω и имеющих конечную норму $||f||_{H^\infty(\Omega)} := \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$. Обозначим через $A_\infty(\Omega)$ сужение на E замкнутого единичного шара пространства $H^\infty(\Omega)$. Емкость Грина множества E относительно Ω обозначается $\mathrm{cap}\,(E,\Omega)$.

Задача о вычислении асимптотики ε-энтропии класса $A_\infty(\Omega)$ в метрике $C(E)$ поставлена А.Н.Колмогоровым. Условия, при которых имеет место асимптотическая формула

$$H_\varepsilon(A_\infty(\Omega),C(E)) \sim \frac{\mathrm{cap}\,(E,\Omega)}{\log_2 e}(\log_2(1/\varepsilon))^2 \qquad (\varepsilon\to 0), \tag{1}$$

изучали К.И.Бабенко, А.Г.Витушкин, В.Д.Ерохин, В.М.Тихомиров, В.П.Захарюта, Г.Видом и др. (см. [1, с.218]). Известно, в частности, что формула (1) является следствием равенства

$$\lim_{n\to\infty}[d_n(A_\infty(\Omega),C(E))]^{1/n} = \exp(-1/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)), \tag{2}$$

и что равенство (2) имеет место, если Ω – ограниченное открытое множество, содержащее конечное или счетное число компонент, E – компактное подмножество в Ω положительной логарифмической емкости; кроме того, если Ω – многосвязная область либо конечное дизъюнктное объединение таких областей, то

$$d_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \geq c_1 \exp(-n/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)). \tag{3}$$

Пары (E,Ω), для которых верна обратная оценка, можно найти в работах Ганелиуса, Фишера, Мичелли и др. Так, например, при условии, что дополнение области Ω в расширенной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ состоит из $m+1$ компонент, установлено (см. [2]), что

1) $d_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \geq \exp[-(m+n)/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)]$

и

2) если $E = \{z \in \Omega : |B_0(z)| \leq \rho\}$ для некоторого произведения Бляшке B_0 и некоторого $\rho > 0$, то

$$d_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \asymp \exp(-n/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)).$$

В общем случае равенство (2) доказывается с помощью приближений функций f из класса $A_\infty(\Omega)$ рациональными функциями (см. [3]).

В данной обзорной статье указываются пары (E,Ω), для которых существуют системы аналитических функций $\{f_k\}$ такие, что:

1) любая функция f, аналитическая в Ω, единственным образом представима рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k(z), \quad z \in \Omega,$$

равномерно и абсолютно сходящимся на любом компакте из Ω;

2) если $f \in A_\infty(\Omega)$, то

$$\limsup_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_k||_{C(E)}^{1/n} \leq \exp(-1/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)).$$

Указанные разложения аналитических функций позволяют доказать формулу

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(E))]^{1/n} = \exp(-1/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)) \tag{4}$$

и оценку

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \leq c_2 \exp(-n/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)). \tag{5}$$

Из (3) и (5) имеем слабые асимптотики

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \asymp d_n(A_\infty(\Omega), C(E)) \asymp \exp(-n/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)).$$

Для некоторых пар (E,Ω) излагаемые методы приводят к соотношениям

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega), L^q(E)) \asymp d_n(A_\infty(\Omega), L^q(E)) \asymp n^{-1/q} \exp(-n/\mathrm{cap}\,(E,\Omega)), \quad 1 \leq q < \infty.$$

В § 2 определяются экстремальные методы для n-поперечников $\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(E))$ при условии, что Ω – односвязная область, а E – невырожденный континуум, не разбивающий плоскость. Центральную роль в оценках поперечников в этом случае играют базисы Тейлора, Фабера и Ерохина. Формулируются также родственные результаты о n-поперечниках класса $A^l_\infty(\Omega) := \{f : f^{(l)} \in A_\infty(\Omega)\}$ (l – целое неотрицательное). В § 3 и § 4 рассматриваются случаи, когда Ω – многосвязная область либо дизъюнктное объединение конечного числа таких областей, а E – континуум, разбивающий плоскость, либо объединение конечного числа попарно непересекающихся континуумов. В этих случаях формула (4) и оценка (5) доказываются с помощью базисов типа Ерохина, обобщающих классические базисы Лорана, Фабера, Якоби и Уолша.

§ 2. Линейные аппроксимации в односвязных областях

Пусть $U = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, $T = \partial U$ – его граница, $U_r = rU$ – круг радиуса $r, T_r = \partial U_r$, и пусть σ и ν - стандартные меры на окружности T и плоскости $\mathbf{C}$, определяемые равенствами $d\sigma(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi$ и $d\nu(x+iy) = dxdy/\pi$ соответственно. Произведением Бляшке порядка m в U_R называют функцию вида

$$B(z) = e^{i\theta}\prod_{j=1}^{m}\frac{z-z_j}{R-R^{-1}\overline{z}_j z}, \quad z_j \in U_R, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{6}$$

Множество всех произведений Бляшке (6) порядка $m \le n$ обозначим через $\mathcal{B}_n(U_R)$. Для данного компактного множества E из U_R и (нетривиальной) положительной меры μ на E пусть

$$\beta_n(U_R, L^q(\mu)) := \inf\{||B||_{L^q(\mu)} : B \in \mathcal{B}_n(U_R)\},$$

где при $q = \infty$ пространство $L^q(\mu)$ заменяется на $C(E)$. Фишер и Мичелли [2] доказали, что

$$\lambda_n(A_\infty(U_R), L^q(\mu)) = d_n(A_\infty(U_R), L^q(\mu)) = \beta_n(U_R, L^q(\mu)), \tag{7}$$

для всех $1 \le q \le \infty, R > 0$.

В случае $R > 1, E = \overline{U}$ экстремальным произведением для $\beta_n(U_R, C(E))$ является $\hat{B}(z) = (z/R)^n$ и, следовательно,

$$\lambda_n(A_\infty(U_R), C(\overline{U})) = d_n(A_\infty(U_R), C(\overline{U})) = R^{-n}. \tag{8}$$

Аналогично, если μ является радиально – симметричной мерой:

$$d\mu(re^{i\theta}) = dm(r)d\sigma(e^{i\theta}),$$

где m – положительная борелевская мера на $[0, \rho], 0 < \rho < R$, то (см. [4], [5]) имеем

$$\lambda_n(A_\infty(U_R), L^q(\mu)) = d_n(A_\infty(U_R), L^q(\mu)) = R^{-n}\Big(\int_0^\rho r^{nq}dm(r)\Big)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty. \tag{9}$$

В частности,

$$\lambda_n(A_\infty(U_R), L^q(\sigma)) = R^{-n} \quad \text{и} \quad \lambda_n(A_\infty(U_R), L^q(\nu)) = R^{-n}\left(\frac{qn}{2}+1\right)^{-1/q} \tag{10}$$

и такие же равенства верны для колмогоровских n-поперечников.

Экстремальный метод приближения для линейных n-поперечников в (9) имеет вид

$$f(z) \approx (G_n f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(|z|/R\right)^{2(n-k)}\right)(f^{(k)}(0)/k!)z^k \tag{11}$$

и связан с ядром Пуассона

$$\mathcal{P}(r,t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt, \quad 0 \le r < 1, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

равенством

$$f(re^{i\varphi}) - (G_n f)(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\varphi-\theta)}\mathcal{P}(r/R, \theta-\varphi) f(Re^{i\theta})d\theta. \tag{12}$$

Экстремальный метод для линейных n-поперечников в (8) (и в первой из формул (10)) получается из (11) заменой $|z|$ на 1. Отметим,что метод аппроксимации (11) одновременно решает задачу восстановления значения произвольной функции f из единичного шара пространства $H^\infty(U_R)$ в данной точке $z \in U_R \setminus \{0\}$ по тейлоровской информации $\{f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)\}$ (см. [6]).

Приведем аналог формулы (12) для класса $A^l_\infty(U_R) = \{f : f^{(l)} \in A_\infty(U_R)\}$ (l – целое неотрицательное, $A^0_\infty(U_R) = A_\infty(U_R)$). Для любого $n \ge l$ и каждой функции f, аналитической в U_R, положим

$$(G^l_n f)(z) := \sum_{k=0}^{l-1}(f^{(k)}(0)/k!)z^k + \sum_{k=l}^{n-1}\left(1-\left(\alpha^l_{2n-k}/\alpha^l_k\right)\left(|z|/R\right)^{2(n-k)}\right)(f^{(k)}(0)/k!)z^k \tag{13}$$

где $\alpha^l_k := (k-l)!/k!$. Тогда, полагая $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < R)$, простыми вычислениями получаем равенство

$$f(z) - (G^l_n f)(z) = \frac{z^l}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-l}\int_{-\pi}^{\pi} \exp i(l-n)(\theta-\varphi) B_{l,n}(r/R, \theta-\varphi) f^{(l)}(Re^{i\theta})d\theta. \tag{14}$$

Здесь

$$B_{l,n}(\rho, t) := \alpha^l_n + 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \alpha^l_{k+n}\cos kt, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad t \in [-\pi, \pi], \tag{15}$$

– ядро из работы К.И.Бабенко [7]. Это ядро связано с ядром Пуассона формулой

$$B_{l,n}(\rho, t) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1}\tau^{n-l}\mathcal{P}(\rho\tau, t)d\tau$$

и, следовательно, неотрицательно. Обозначим через $(P_n^l f)(z)$ выражение, которое получается из правой части (13) заменой $|z|$ на 1. Согласно (14) имеем

$$\sup\{||f - P_n^l f||_{C(\overline{U})} : f \in A_\infty^l(U_R)\} = d(A_\infty^l(U_R), \mathcal{P}_n, C(\overline{U})) = \alpha_n^l R^{l-n}, \qquad (16)$$

где $\mathcal{P}_n$ – множество полиномов степени не выше $n-1$ и супремум достигается на функции $f_0(z) = \alpha_n^l R^{l-n} z^n$. С другой стороны, из неравенств Бернштейна

$$||P_n'||_{C(T_R)} \le (n/R)||P_n||_{C(T_R)} \quad \text{и} \quad ||P_n||_{C(T_R)} \le R^n ||P_n||_{C(T)} \quad (P_n \in \mathcal{P}_{n+1},\ R \ge 1)$$

по теореме о поперечниках шара получается оценка

$$d_n(A_\infty^l(U_R), C(\overline{U})) \ge \alpha_n^l R^{l-n}.$$

Отсюда и из (16) имеем

$$\lambda_n(A_\infty^l(U_R), C(\overline{U})) = d_n(A_\infty^l(U_R), C(\overline{U})) = \alpha_n^l R^{l-n}, \qquad (17)$$

причем метод $f \approx P_n^l f$ оптимален для $n-$поперечника $\lambda_n(A_\infty^l(U_R), C(\overline{U}))$. Равенства (17) доказаны В.М.Тихомировым в 1960 г. При $l = 0$ из (17) получаем (7). Второе из равенств (16) выражает теорему К.И.Бабенко [7] о наилучших полиномиальных приближениях класса $A_\infty^l(U_R)$. Работа [6] содержит также простое доказательство теоремы С.Б.Стечкина о приближениях функций $f \in A_\infty^l(U_R)$ частичными суммами рядов Тейлора. Аналогичные результаты для классов Харди-Соболева $H_R(l,p)$, $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbf{N}$, получены Л.В.Тайковым [8]; при этом аналоги формул (17) доказываются с помощью ядра Бабенко. Напомним, что класс $H_R(l,p)$ состоит из аналитических в круге U_R функций f, производные порядка l которых принадлежат замкнутому единичному шару пространства Харди $H^p(U_R)$ (см., например, [9, гл.8]).

Ядро Бабенко генерирует также метод восстановления значений функций из классов Харди – Соболева в круге U_R по тейлоровской информации и экстремальные методы для линейных n-поперечников некоторых классов голоморфных функций с ограниченными производными в шаре из $\mathbf{C}^d$ и в ограниченных симметричных областях трубчатого типа (подробности см. в [10] и [11]).

Обозначим через $A_\infty^{0,l}(U_R)$ множество функций f из $A_\infty^l(U_R)$, у которых первые l коэффициентов Тейлора нулевые: $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(l-1)}(0) = 0$. Для любых $R > 1$, $l \in \mathbf{N}$ имеет место асимптотическая формула

$$H_\varepsilon(A_\infty^{0,l}(U_R), C(T)) = \frac{(\log_2(1/\varepsilon))^2}{\log_2 R} - 2l\,\frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_2 R}\log_2\log_2(1/\varepsilon) + O\left(\log_2(1/\varepsilon)\right). \quad (18)$$

При доказательстве этой формулы используется метод аппроксимации $f \approx P_n^l f$ (см. (16)) и разработанный В.М.Тихомировым уточненный метод подсчета ε-энтропии для пространств с базисом (см. [12, с.277]). Многомерный вариант формулы (18) приведен в работе [13]. По-существу, теми же средствами получаются аналоги формул (17) и (18) для некоторых других классов аналитических функций (см. [14] – [16]). Например, для класса аналитических функций с ограниченными дробными (в смысле Римана – Лиувилля) производными порядка α оптимальные линейные методы аппроксимации генерируются обобщенным ядром Бабенко:

$$K_{\alpha,n}(\rho,t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{n-l}\mathcal{P}(\rho\tau,t)d\tau, \quad 0\le\rho<1, \quad t\in[-\pi,\pi].$$

Класс $H^\infty(\Omega)$ инвариантен при конформных отображениях. Поэтому для любой односвязной области Ω, граница которой содержит более одной точки, и для любого компакта $E\subset\Omega$ в силу (7) имеем

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega),C(E)) = d_n(A_\infty(\Omega),C(E)) = \inf\{||B||_{C(E)}:\ B\in\mathcal{B}_n(\Omega)\}, \qquad (19)$$

где $\mathcal{B}_n(\Omega)$ – множество произведений Бляшке для Ω порядка n. В случае, когда $E=[-1,1]$ и $\partial\Omega$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1, точная нижняя грань в (19) достигается на произведении Бляшке $\tilde{B}$ с чебышевскими нулями $\tilde{z}_j^{(n)} = \cos(2j-1)/2\pi n\,(j=1,\dots,n)$ (см. [6]). Экстремальный метод для n-поперечника $\lambda_n(A_\infty(\Omega),C(E))$ в этом случае получается так: сначала с помощью конформного отображения $\zeta=\phi(z)$ области Ω на единичный круг U отрезок $[-1,1]$ переводят в отрезок $[-a,a]$, а точки $\tilde{z}_j^{(n)}$ – в точки $\tilde{\zeta}_j^{(n)}$, затем по произведению Бляшке

$$B(\zeta)=\prod_{j=1}^n \frac{\zeta-\tilde{\zeta}_j^{(n)}}{1-\overline{\tilde{\zeta}_j^{(n)}}\zeta}$$

известным методом (см. формулу (6) в [2]) определяют метод аппроксимации функций из $A_\infty(U)$ на $[-a,a]$ и выполняют замену переменного $z=\phi^{-1}(\zeta)$.

Пусть K – компактное множество в $\mathbf{C}$, содержащее более одной точки и имеющее односвязное дополнение в $\overline{\mathbf{C}}$. Обозначим через Φ конформное отображение $\overline{\mathbf{C}}\setminus K$ на $\overline{\mathbf{C}}\setminus\overline{U}$, нормированное условием $\lim\limits_{z\to\infty}(\Phi(z)/z)>0$, и пусть Ψ – отображение, обратное к Φ . Для $R>1$ внутренность кривой $\Gamma_R := \{z:|\Phi(z)|=R\}$ обозначается через G_R. Отметим, что $\operatorname{cap}(K,G_R)=\log_2 e/\log_2 R$. Классическим средством приближения функции $f\in H^\infty(G_R)$ в метрике $C(K)$ являются частичные суммы ряда Фабера:

$$f(z)\approx F_nf(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k\Phi_k(z), \quad z\in K. \qquad (20)$$

Напомним, что n-й многочлен Фабера $\Phi_n(z)$ совпадает с полиномиальной частью лорановского разложения n-й степени $[\Phi(z)]^n$ в окрестности точки ∞, а коэффициенты в (20) вычисляются по формуле

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_r} f[\Psi(t)]t^{-n-1}dt, \quad 1<r<R. \qquad (21)$$

Фаберовский метод аппроксимации (20) обобщает тейлоровский (K – круг) и чебышевский ($K = [-1,1]$) методы и наследует их многие замечательные свойства (см., напрмер, [17], [18]).

Пусть Γ – спрямляемая жорданова кривая. Кривую Γ называют *кривой ограниченного вращения*, если угловой коэффициент касательной этой кривой как функция длины дуги имеет ограниченную вариацию. Например, если кривая Γ состоит из конечного числа выпуклых дуг, то она является кривой ограниченного вращения. Класс всех кривых ограниченного вращения обозначается через BR (от bounded rotation). Если $\partial K \in BR$, то система многочленов Фабера $\{\Phi_n(z)\}$ ограничена на K:

$$\gamma(K) := \sup_n ||\Phi_n(z)||_{C(K)} < \infty.$$

Известно также, что $\gamma(K) \leq 2$ для любого выпуклого K (см. [17, с.224], [18, с.57]).

Из неравенства Бернштейна

$$||P_n||_{C(\overline{G}_R)} \leq R^n ||P_n||_{C(K)} \quad (P_n \in \mathcal{P}_{n+1},\, R > 1)$$

по теореме о поперечнике шара следует, что при $E = K, \Omega = G_R$ оценка (3) верна с константой $c_1 = 1$. Отсюда и из формул (20), (21) при условии $\partial K \in BR$ получаем, что

$$\frac{1}{R^n} \leq \lambda_n(A_\infty(G_R), C(K)) \leq \sup\{||f - F_n f||_{C(K)} :\, f \in A_\infty(G_R)\} \leq \frac{\gamma(K)}{R^n(R-1)}. \quad (22)$$

Пусть $A(\overline{G}_R) := \{f :\, f$ аналитическая в G_R и непрерывная в $\overline{G}_R\}$. Положим

$$J(R) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{|Re^{i\tau} - 1|}.$$

В случае, когда ∂K – выпуклая жорданова кривая, справедливы следующие утверждения:

(a) если $f \in H^\infty(G_R)$, то

$$||f - F_n f||_{C(K)} \leq J(R) R^{-n} ||f||_{H^\infty(G_R)}; \qquad (23)$$

(b) если $f \in A(\overline{G}_R)$, то

$$||f - F_n f||_{C(K)} \leq J(R) R^{-n} d(f, \mathcal{P}_n, C(\overline{G}_R)). \qquad (24)$$

Из (19) и (23) следует, что

$$\lambda_n(A_\infty(G_R), C(K)) = \inf\{||B||_{C(K)} :\; B \in \mathcal{B}_n(G_R)\} \leq J(R) R^{-n+1}. \qquad (25)$$

Для значений R, близких к 1, оценка (25) существенно лучше, чем верхняя оценка в (22), так как

$$J(R) < 2 \ln \left(\frac{R+1}{R-1} \right).$$

Область G называется *областью Радона*, если ее граница является кривой ограниченного вращения без точек заострения, т.е. ∂G почти всюду имеет касательную, угол наклона которой к вещественной оси имеет ограниченную вариацию как функция длины дуги, причем скачки этой функции по модулю меньше π. Оценки (23) – (25) и их обобщения на случай, когда K является замкнутой областью Радона, доказаны в [5]. О фаберовских аппроксимациях классов Соболева в областях Радона можно прочитать в [19].

В связи с неравенством (24) отметим, что в ряде случаев частичные суммы ряда Фабера вычисляются намного проще, чем соответствующие полиномы наилучшего приближения (см., например, [20] и [21, § 18.2]). На основе фаберовских разложений и аппроксимаций типа Паде и Каратеодори-Фейера построены эффективные численные алгоритмы как для вычисления значений аналитических функций, так и для решения основных задач линейной алгебры с несимметричными матрицами (см. библиографию в [5] и [20]). Некоторые из этих алгоритмов обобщают хорошо известные чебышевские методы вычисления значений специальных функций (см. [22]).

Наряду со многими преимуществами полиномиальные разложения, сходящиеся на K, слишком чувствительны по отношению к расположению особых точек: как только некоторая линия уровня Γ_R содержит хотя бы одну особенность функции f, ряд Фабера этой функции расходится в любой точке $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{G}_R$. Другое обстоятельство связано со скоростью сходимости этих рядов на K : порядок их сходимости в равномерной метрике на K определяется местонахождением ближайшей к K особенности и почти не реагирует на расположение области аналитичности f в остальной части плоскости $\mathbf{C}$ (подробнее об этом явлении можно прочитать, например, в [23, с.470]). Таким образом, если Ω – произвольная односвязная область, содержащая K, то оптимальный (в смысле линейных и колмогоровских n-поперечников) базис для приближения функций из $A_\infty(\Omega)$ в метрике $C(K)$ заведомо не будет полиномиальным. Такой базис был построен В.Д.Ерохиным [24] как естественное обобщение базиса Фабера. Остановимся на его конструкции подробнее.

Пусть Ω – односвязная область и K – невырожденный континуум такой, что область $\Omega \setminus K$ двусвязна. Обозначим через H конформное отображение области $D := \Omega \setminus K$ на кольцо $\{w : 1 < |w| < R\}$ (здесь R – конформный модуль области D). В основе конструкции В.Д.Ерохина лежит следующая

Лемма. *Если занумеровать в произвольном порядке пару граничных континуумов S_1 и S_2 двусвязной области D, то конформное отображение*

$$H : D \to \{w : 1 < |w| < R\}$$

можно представить в виде суперпозиции $H = F_2 \circ F_1$, где F_1 – конформное отображение односвязной области с границей S_1 и F_2 – конформное отображение односвязной области с границей $S_2^{(1)} = F_1(S_2)$ (при этом отображения F_1 и F_2 единственны с точностью до дробно-линейных подстановок).

Эта лемма и ее обобщения (см. [25] - [27]) применялись при решении некоторых задач конформных и квазиконформных отображений и при исследовании проблем теории однолистных функций.

В случае $S_1 = \partial\Omega$, $S_2 = \partial K$ выберем F_2 так, чтобы $F_2(\infty) = \infty$, и положим $F = F_1, \Phi = F_2$. Тогда

$$H(z) = \Phi[F(z)], \quad z \in D. \tag{26}$$

Обозначив $\chi = H^{-1}$, $\lambda = F^{-1}, \psi = \Phi^{-1}$, получим

$$\chi(w) = \lambda[\psi(w)], \quad 1 < |w| < R. \tag{27}$$

Пусть $H(\Omega)$ – пространство функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости внутри (на произвольных компактах) области Ω. Для $1 < \rho < R$ положим $C_\rho := \{z : \, |H(z)| = \rho\}$ и $\Omega_\rho := \operatorname{int} C_\rho$. Как показано в [25] (см. также [17, с.323]), формулы

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{\tau - w} \, d\tau, \quad w \in U_\rho, \tag{28}$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)} F'(\zeta) \, d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \tag{29}$$

устанавливают линейный топологический изоморфизм пространств $H(U_R)$ и $H(\Omega)$. В фаберовском случае, когда $\partial\Omega$ совпадает с линией уровня Γ_R континуума K, следует принять $F(z) \equiv z$ и тогда формула (29) задает классический оператор Фабера.

Для каждого целого неотрицательного n обозначим через $e_n(z)$ функцию, получаемую по формуле (29) при $\varphi(w) = w^n$. Затем возьмем произвольную функцию $f \in H(\Omega)$, найдем для нее по формуле (28) изоморфный образ $\varphi \in H(U_R)$ и разложим его в ряд Тейлора. Выполняя по формуле (29) обратное преобразование, придем к разложению

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z), \quad z \in \Omega, \tag{30}$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{\varphi(w)}{w^{k+1}} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{f[\chi(w)]}{w^{k+1}} \, dw. \tag{31}$$

Разложение (30) сходится равномерно и абсолютно на любом компакте, расположенном в Ω. Таким образом, система $\{e_n(z)\}$ является базисом пространства $H(\Omega)$.

Метод аппроксимации

$$f(z) \approx \mathcal{E}_n f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k(z), \quad z \in K,$$

приводит (см. [24]) к соотношениям

$$\lim_{n\to\infty}[\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(K))]^{1/n} = \lim_{n\to\infty}[d_n(A_\infty(\Omega), C(K))]^{1/n} = \frac{1}{R} \tag{32}$$

и асимптотической формуле

$$H_\varepsilon(A_\infty(\Omega), C(K)) = \frac{(\log_2(1/\varepsilon))^2}{\log_2 R} + O\left(\log_2(1/\varepsilon)\log_2\log_2(1/\varepsilon)\right) \tag{33}$$

(сравните с (1) и (18)). Учитывая (11), для аппроксимации на компакте K произвольной функции f из $A_\infty(\Omega)$ можно предложить модифицированный метод Ерохина:

$$f(z) \approx \mathcal{E}_n^* f(z) := \sum_{k=0}^{n-1}(1 - R^{-2(n-k)})a_k e_k(z), \quad z \in K.$$

Из определений видно, что

$$e_n(z) = \Phi_n[F(z)], \quad z \in \Omega, \tag{34}$$

где $\{\Phi_n(t)\}$ – система многочленов Фабера для континуума $K^{(1)} = F(K)$ (при условии $\partial\Omega = \Gamma_R$ имеем $e_n(z) \equiv \Phi_n(z)$). Отсюда и из неравенства Бернштейна по теореме о поперечниках шара следует, что

$$d_n(A_\infty(\Omega), C(K)) \geq \frac{1}{R^n}. \tag{35}$$

Далее с помощью (31), (34) и известных оценок многочленов Фабера (см., например, [17, с.233]) получается, что для данной пары (K, Ω) выполнены неравенства

$$\frac{1}{R^n} \leq \lambda_n(A_\infty(\Omega), C(K)) \leq \sup\{||f - \mathcal{E}_n f||_{C(K)} : f \in A_\infty(\Omega)\} \leq \frac{c_3 n^\beta}{R^n},$$

где $c_3 > 0$ и $0 < \beta < 1/2$. Кроме того, если $\partial K \in BR$, то

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(K)) \asymp d_n(A_\infty(\Omega), C(K)) \asymp R^{-n}.$$

Соотношения (32) и асимтотическая формула (33) выводятся также (см. [24]) с помощью базисной системы $\{f_n\}$, определяемой по формуле

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{[H(\zeta)]^n}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho,$$

и отвечающей случаю $S_1 = \partial K$, $S_2 = \partial\Omega$. В этом случае можно выбрать F_1 так, чтобы $F_1(\infty) = \infty$, и положить $P = F_1$, $Q = F_2$, $\sigma = P^{-1}$, $\kappa = Q^{-1}$. Тогда аналогично (26) и (27) имеем

$$H(z) = Q[P(z)], \quad z \in D,$$

и
$$\chi(w) = \sigma[\kappa(w)], \quad 1 < |w| < R.$$
При этом формулы
$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau) - \kappa(w)}\, d\tau, \quad w \in U_\rho,$$
и
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho,$$
где $1 < \rho < R$, задают изоморфизм пространств $H(U_R)$ и $H(\Omega)$.

Базис в $H(\Omega)$ называют *продолжаемым вовнутрь*, если он является базисом также хотя бы в одном из пространств $H(\Omega_0)$, где $\Omega_0 \subset \Omega$, или $H(\overline{\Omega}_0)$, где $\overline{\Omega}_0$ – замкнутая подобласть в Ω (пространство $H(\overline{\Omega}_0)$ рассматривается с двойственной индуктивной топологией). Очевидно, базисные системы $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ являются продолжаемыми вовнутрь базисами. Это свойство базисов В.Д. Ерохина послужило источником теории продолжаемых базисов (подробности и библиографию см. в [28]).

Обозначим $\mathcal{G} := \overline{\mathbf{C}} \setminus K$, $\mathcal{G}_\rho := \operatorname{ext} C_\rho$ и $H_0(\mathcal{G}) := \{f \in H(\mathcal{G}) :\ f(\infty) = \infty\}$. Для каждого натурального n положим
$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{1}{[H(\zeta)]^n} \frac{d\zeta}{z - \zeta}, \quad z \in \mathcal{G}_\rho,$$
и
$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{1}{[H(\zeta)]^n} \frac{P'(\zeta)}{P(z) - P(\zeta)}\, d\zeta, \quad z \in \mathcal{G}_\rho,$$
где $1 < \rho < R$. Системы функций $\{g_n(z)\}$ и $\{h_n(z)\}$ являются базисами пространства $H_0(\mathcal{G})$, так как каждая из следующих двух пар формул
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{z - \zeta}\, d\zeta, \qquad \varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]\psi'(\tau)}{\psi(w) - \psi(\tau)}\, d\tau,$$
и
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]P'(\zeta)}{P(z) - P(\zeta)}\, d\zeta, \qquad \varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{w - \tau}\, d\tau,$$
где $z \in \mathcal{G}_\rho$, $|w| > \rho$, $1 < \rho < R$, устанавливает изоморфизм пространств $H_0(\mathcal{G})$ и $H_0(\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{U})$. В случае, когда отображение H аналитически продолжается на K, функции $g_n(z)$ и $h_n(z)$ превращаются в рациональные функции Фабера (см. [17, с.309]).

Возвращаясь к фаберовскому случаю (когда $\Omega = G_R$), определим *оператор Фабера – Теплица*:

$$\mathcal{T}_g\colon \varphi \mapsto f, \quad f(z) = \mathcal{T}_g\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{g(\zeta)\varphi[\Phi(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G_\rho, \quad 1 < \rho \le R, \tag{36}$$

где φ – аналитическая в круге U_ρ функция, такая, что суперпозиция $\varphi \circ \Phi$ суммируема на Γ_ρ, а весовая функция g является аналитической и отличной от нуля в области $\mathcal{G}$. Например, если $g = \Phi'$, то оператор $\mathcal{T}_g$ переводит степенной базис $\{w^n\}$ в систему многочленов Фабера второго рода для K (в случае $K = [-1,1]$ получаются классические многочлены Чебышёва второго рода). Классический оператор Фабера соответствует случаю $g \equiv 1$ (см., например, [18]). Оператор $\mathcal{T}_g$ отображает пространство $\mathcal{P}_n$ на себя. Кроме того, если φ – рациональная функция, то $\mathcal{T}_g\varphi$ – тоже рациональная функция (это свойство используется, например, при определении упомянутых выше фаберовских аппроксимаций типа Паде и Каратеодори – Фейера). Если $K = \overline{G}$, где $\overline{G}$ – замкнутая область Жордана со спрямляемой границей Γ, то отображение Φ непрерывно продолжается на Γ и в этом случае (при надлежащем выборе g) в формуле (36) можно заменить Γ_ρ на Γ и G_ρ на G. Более того, с помощью оператора $\mathcal{T}_g$ можно определить изоморфные отображения различных пространств функций, аналитических в единичном круге U, на соответствующие пространства функций, аналитических в области G (см., например, [17, с. 209], [29]). Эти свойства позволяют распространить ряд важных результатов о полиномиальных и рациональных аппроксимациях функций, аналитических в круге, на функции, аналитические в областях Радона и в некоторых других односвязных областях ([29] – [31]).

Операторы Фабера – Ерохина с весовыми функциями и асимптотические свойства соответствующих базисных систем изучались в [32] и [33]. С помощью этих свойств доказывается, например, что если ∂K и $\partial\Omega$ – достаточно гладкие, то

$$\lambda_n(A^l_\infty(\Omega), C(K)) \asymp d_n(A^l_\infty(\Omega), C(K)) \asymp n^{-l}R^{-n},$$

$$\lambda_n(A^l_\infty(\Omega), L^q(K)) \asymp d_n(A^l_\infty(\Omega), L^q(K)) \asymp n^{-l-1/q}R^{-n}, \quad 1 \le q < \infty,$$

и аналогичные соотношения верны для n-поперечников классов функций, производные порядка l которых в области Ω принадлежат единичным шарам пространств Смирнова или Бергмана (см. [34]). Известно также, что для любой ограниченной односвязной области Ω, граница которой состоит из конечного числа дуг с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка положительные внешние углы, меньшие π, справедлива формула $d_n(A^l_\infty(\Omega), C(\overline{\Omega})) \asymp n^{-l}$ (см. [35]).

В заключение параграфа сформулируем две задачи о поперечниках классов Харди – Соболева. В связи с равенствами (10) (см. также [36]) естественно решать следующую задачу:

Задача 1. *Доказать, что при* $1 \le q \le p \le \infty$, $n \ge l$, $R \ge 1$, *справедливы равенства*

$$\lambda_n(H_R(l,p), L^q(\sigma)) = d_n(H_R(l,p), L^q(\sigma)) = \frac{(n-l)!}{n!}R^{l-n}$$

и
$$\lambda_n(H_R(l,p),L^q(\nu)) = d_n(H_R(l,p),L^q(\nu)) = \frac{(n-l)!}{n!}\left(\frac{qn}{2}+1\right)^{-1/q} R^{l-n}.$$

При $p=q$ эти равенства доказываются (см. [8], [9, гл. 8]) с помощью формулы (14).

Задача 2. *Известно, что*

$$\lambda_n(H_R(l,p),L^q(\sigma)) \asymp n^{-l}R^{-n}, \quad \lambda_n(H_R(l,p),L^q(\nu)) \asymp n^{-l-1/q}R^{-n}, \quad 1 \le q,p \le \infty,\ R>1.$$

Доказать многомерные аналоги этих соотношений, приведенные в предложении 4.1 *работы* [10] (*исправив тем самым рассуждения в* [10, *с.* 193 -194]).

Об аналогичных задачах для n-поперечников классов Бергмана – Соболева $A_R(l,p)$ см. в [9] и [34]. Подобные задачи можно рассматривать на некоторых трубчатых областях (см. [11]).

§ 3. Аппроксимации В.Д.Ерохина в многосвязных областях

Пусть континуум K имеет N областей смежности $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_N$ и многосвязная область Ω содержит K, причем $\partial\Omega \subset \cup_{\nu=1}^N \mathcal{G}_\nu$ и $\partial\Omega \cap \mathcal{G}_\nu \ne \emptyset$ для $\nu \in \{1,\dots,N\}$. Если каждое из множеств $\mathcal{C}_\nu := \partial\Omega \cap \mathcal{G}_\nu$ связно, то Ω называется *элементарной окрестностью* K. Имеет место (см. [37]) следующий аналог теоремы о монодромии:

Если Ω – элементарная окрестность K, то всякая непрерывно продолжимая по Ω функция f, регулярная в окрестности каждой точки области Ω и допускающая выделение однозначной ветви на K, однозначна в Ω.

Будем предполагать, что Ω – элементарная окрестность K. Тогда класс $A_\infty(\Omega)$ может быть определен как множество однозначных на K функций f, аналитических в окрестности каждой точки $z \in K$ и аналитически продолжимых вдоль любого пути, проходящего в Ω, так что аналитические продолжения этих функций имеют модуль не больше 1 в любой точке $z \in \Omega$.

По каждой двусвязной области $\mathcal{D}_\nu := \Omega \cap \mathcal{G}_\nu$, $\nu \in \{1,\dots,N\}$, определяются, как указано выше, четыре семейства базисных функций. Из этих семейств (на самом деле для каждого ν выбирается по одному семейству с учетом того, принадлежит или нет точка ∞ области $\mathcal{G}_\nu$) составляется двойная последовательность $\{e_{\nu k}\}$ такая, что:

1. Все функции $e_{\nu k}$ аналитичны и однозначны в области Ω.
2. Всякая функция f, регулярная в Ω, имеет разложение

$$f(z) = a_{00} + \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k} e_{\nu k}(z), \quad z \in \Omega, \tag{37}$$

равномерно и абсолютно сходящееся внутри Ω.

3. Разложение (37) для каждой функции $f \in H(\Omega)$ единственно.

Для вывода (37) область Ω записывается в виде пересечения N односвязных областей, а функция f (после применения интегральной формулы Коши) разлагается на сумму N функций f_ν, каждая из которых аналитична в соответствующей односвязной области. Записывая каждую f_ν в виде указанных выше рядов, получаем (37). Метод аппроксимации, сопоставляющий произвольной функции f из $A_\infty(\Omega)$ частичные суммы ряда (37), позволяет конструктивно доказать (см. [38]) для рассматриваемого случая асимптотическую формулу (1), однако обладает тем недостатком, что коэффициенты $a_{\nu k}$ вычисляются не по функции f, а по ее составляющим f_ν. Этот недостаток преодолевается в [37] с помощью понятия канонической окрестности.

Область Ω называется *канонической окрестностью* K, если все $\mathcal{C}_\nu$ суть замкнутые аналитические кривые Жордана (в расширенной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$) или точки, причем существуют такие точки $z_\nu \in \mathcal{G}_\nu$, $\nu \in \{1, \ldots, N\}$, что при конформных отображениях $\Phi_\nu : \mathcal{G}_\nu \to \{w : |w| > 1\}$, $\Phi_\nu(z_\nu) = \infty$, кривые $\mathcal{C}_\nu$ переходят в некоторые окружности T_{R_ν} (если $\mathcal{C}_\nu$ – точка, то полагаем $R_\nu = +\infty$). Произвольную элементарную окрестность континуума K можно конформно и однолистно преобразовать в каноническую окрестность некоторого континуума K_0, получающегося из K при том же самом преобразовании (для данной элементарной окрестности такое отображение единственно с точностью до дробно-линейной подстановки).

Предположим, что Ω – каноническая окрестность K с определяющими точками z_ν и модулями R_ν $(1 < R_\nu \le +\infty)$. Для $1 < R'_\nu < R_\nu$ положим

$$\mathcal{C}'_\nu := \{|\Phi_\nu(z)| = R'_\nu : z \in \mathcal{G}_\nu\}, \quad \nu \in \{1, \ldots, N\}.$$

Через Ω_ν обозначим область с границей $\mathcal{C}_\nu$, содержащую Ω, и через Ω'_ν – подобласть Ω_ν ограниченную $\mathcal{C}'_\nu$.

Базисную систему $\{f_{\nu k}\}$ определим при условии $\infty \in K$ (общий случай легко сводится к этому). Для всякой функции $f \in H(\Omega)$ по формуле Коши имеем

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu(z), \tag{38}$$

где f_ν регулярна в Ω_ν и $f_\nu(\infty) = 0$. Разлагая функцию $f_\nu \circ \Phi_\nu^{-1}$ в ряд Лорана и выполняя замену переменного, получим

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{\nu k} [\Phi_\nu(\zeta)]^k, \quad \zeta \in \mathcal{D}_\nu, \tag{39}$$

где

$$c_{\nu k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_{R'_\nu}} \frac{f[\Phi_\nu^{-1}(w)]}{w^{k+1}}\, dw, \quad 1 < R'_\nu < R_\nu. \tag{40}$$

(поскольку окрестность выбрана канонической, под знаком интеграла стоит f, а не f_ν). Замечая, что при $k \le 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}'_\nu} \frac{[\Phi_\nu(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad \text{для} \quad z \in \Omega'_\nu,$$

из (39) получаем

$$f_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\nu k} f_{\nu k}(z), \quad z \in \Omega_\nu,$$

где $f_{\nu k}$ – рациональные функции, представляющие главные части $[\Phi_\nu(\zeta)]^k$ в окрестности точки z_ν :

$$f_{\nu k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_\nu} \frac{[\Phi_\nu(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_{\nu k}^{(j)}}{(z - z_\nu)^j}. \tag{41}$$

Учитывая (38), для произвольной $f \in H(\Omega)$ имеем разложение

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} c_{\nu k} f_{\nu k}(z), \tag{42}$$

равномерно сходящееся внутри Ω. Таким образом, заданные формулой (41) функции $f_{\nu k}$, $1 \le \nu \le N$, $k \in \mathbf{N}$, образуют базис пространства $H(\Omega)$.

Приближая каждую функцию f из $A_\infty(\Omega)$ частичными суммами ряда (42), В.Д.Ерохин [37] доказывает для линейных n-поперечников равенство (4) при $E = K$ сначала для произвольной канонической окрестности Ω континуума K, а затем (привлекая методы теории униформизации) и для более широкого класса окрестностей. Разумеется, при некоторых дополнительных ограничениях (достаточно предположить, например, что базисные функции $f_{\nu k}$ равномерно ограничены на K) этим методом можно доказать и неравенство (5).

§ 4. Линейные аппроксимации в окрестности нескольких континуумов

Пусть на плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ даны ограниченные попарно-непересекающиеся континуумы $K_1, \ldots, K_q$ с жордановыми границами $\Gamma_l = \partial K_l \, (l = 1, \ldots, q)$ и односвязные попарно-непересекающиеся области $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ с жордановыми границами $C_j = \partial\Omega_j \, (j = 1, \ldots, s)$, причем выполнены следующие условия:

1) каждый из континуумов $\{K_l\}$ содержится в некоторой из областей $\{\Omega_j\}$;

2) в каждой из областей $\{\Omega_j\}$ содержится по крайней мере один из континуумов $\{K_l\}$.

Положим $K = \bigcup_{l=1}^{q} K_l, \Omega = \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j, D = \Omega \setminus K, \mathcal{G} = \overline{\mathbf{C}} \setminus K, \Gamma = \bigcup_{l=1}^{q} \Gamma_l, C = \bigcup_{j=1}^{s} C_j$, будем считать, что $\infty \notin \Omega$. В этом параграфе под областью будем понимать не только открытое связное множество на комплексной плоскости, но и конечное объединение таких множеств.

Дж.Уолшем [39] доказано существование конформного отображения $w = H(z)$ области D на область Δ, взаимно однозначного и непрерывного в замкнутых областях $\overline{D}$ и $\overline{\Delta}$, где область Δ определяется условиями

$$\Delta = \{w : 1 < |T(w)| < e^\alpha\},$$

$$T(w) = \frac{A(w - a_1)^{m_1} \ldots (w - a_q)^{m_q}}{(w - b_1)^{n_1} \ldots (w - b_s)^{n_s}}, \tag{43}$$

$$\sum_{l=1}^{q} m_l = \sum_{j=1}^{s} n_j = 1, \quad \alpha,\, m_l,\, n_j > 0.$$

При этом линия $\Lambda = \{w : |T(w)| = 1\}$ состоит из q попарно-непересекающихся жордановых кривых Λ_l (образов Γ_l), которые отделяют a_l от Δ, линия $L = \{w : |T(w)| = e^{\alpha}\}$ состоит из s попарно-непересекающихся жордановых кривых L_j (образов C_j), которые отделяют b_j от Δ. Функция $T(w)$ записана в виде (43) в предположении, что все числа a_l и b_j конечны. Если некоторые из этих чисел совпадают с $w = \infty$, то соответствующие множители в (43) следует опустить. В частности, если $b_1 = \cdots = b_s = \infty$, то имеем $T(w) = A(w - a_1)^{m_1} \ldots (w - a_q)^{m_q}$. Положим $\mathcal{M} = \{w : |T(w)| < e^{\alpha}\}$, $\mathcal{N} = \{w : |T(w)| > 1\}$, $\mathcal{M}_\rho = \{w : |T(w)| < \rho\}$, $L_\rho = \{w : |T(w)| = \rho\}$, где $1 < \rho < e^{\alpha}$. Отметим, что $\alpha = 1/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)$.

Базисные системы в $H(\Omega)$ определяются с помощью специальных изоморфных отображений пространства $H(\mathcal{M})$ на $H(\Omega)$. При этом канонический базис пространства $H(\mathcal{M})$ имеет вид

$$T_0(w) = 1,\ T_n(w) = A^n \frac{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)\ldots(w-\alpha_n)}{(w-\beta_1)(w-\beta_2)\ldots(w-\beta_n)}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{44}$$

где числа $\alpha_n \in \{a_1, \ldots, a_q\}$, $\beta_n \in \{b_1, \ldots, b_s\}$ выбраны так, чтобы на любом замкнутом ограниченном множестве $\mathcal{F}$, не содержащем точек $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_s$, выполнялись неравенства

$$0 < M_1 < \left| \frac{A^n}{[T(w)]^n} \frac{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)\ldots(w-\alpha_n)}{(w-\beta_1)(w-\beta_2)\ldots(w-\beta_n)} \right| < M_2 < +\infty$$

с константами M_1 и M_2, зависящими только от $\mathcal{F}$.

По заданным точкам $a_1, \ldots, a_q$ и положительным числам $m_1, \ldots, m_q$, $\sum_{l=1}^{q} m_l = 1$, последовательность $\{\alpha_n\}$ в (44) определяется следующим образом.

Шаг 1. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ находятся целые неотрицательные числа $N_{n1}, \ldots, N_{nq}$, такие, что

$$\sum_{l=1}^{q} N_{nl} = n, \quad N_{nl} \le N_{n+1,l} \le N_{nl} + 1,$$

$$|N_{nl} - nm_l| \le [\log_2 q] + 1, \quad l \in \{1, \ldots, q\},$$

где $[x]$ – целая часть числа x. Для этого в случае $q = 2$ применяют формулы $N_{n1} = [nm_1]$, $N_{n2} = n - [nm_1]$. Для $q = 3$ и $q = 4$ сначала полагают $m_1' = m_1 + m_2$, $N_{n1}' = [nm_1']$, $N_{n2}' = n - [nm_1']$, а затем (аналогично случаю $q = 2$) находят N_{n1} и N_{n2} такие, что

$$\left| N_{n1} - N_{n1}' \frac{m_1}{m_1'} \right| \le 1, \quad \left| N_{n2} - N_{n1}' \frac{m_2}{m_1'} \right| \le 1, \quad N_{n1}' = N_{n1} + N_{n2}.$$

При $q = 3$ последовательность $\{N_{n3}\}$ определяется по формуле $N_{n3} = n - N_{n1}'$, а при $q = 4$ полагают $m_2' = m_3 + m_4$ и последовательности $\{N_{n3}\}$ и $\{N_{n4}\}$ выбирают так, чтобы

$$\left| N_{n3} - N_{n2}' \frac{m_3}{m_2'} \right| \le 1, \quad \left| N_{n4} - N_{n2}' \frac{m_4}{m_2'} \right| \le 1, \quad N_{n2}' = N_{n3} + N_{n4}.$$

Далее этот процесс продолжается рекурсивно.

Шаг 2. По найденным на шаге 1 последовательностям $\{N_{n1}\}, \ldots, \{N_{nq}\}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ определяются так, чтобы среди них число a_l встретилось ровно N_{nl} раз.

В результате для каждого компактного множества $\mathcal{F}$, не содержащего $a_1, \ldots, a_q$, выполнено неравенство

$$\sup_{z \in \mathcal{F}} \left| \sum_{l=1}^{q} \log |z - a_l|^{N_{nl}} - n \sum_{l=1}^{q} \log |z - a_l|^{m_l} \right| < \infty$$

и для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) = \prod_{l=1}^{q} (z - a_l)^{N_{nl}}.$$

Последовательность $\{\beta_n\}$ в (44) по заданным точкам $b_1, \ldots, b_s$ и положительным числам $n_1, \ldots, n_s$, $\sum_{j=1}^{s} n_j = 1$, определяется аналогично.

Как доказано в [40], каждая функция φ из $H(\mathcal{M})$ единственным образом представима равномерно сходящимся внутри $\mathcal{M}$ рядом

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(w), \quad w \in \mathcal{M}, \tag{45}$$

с коэффициентами

$$c_0 = \varphi(\alpha_1), \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau)}{T_n(\tau)} \frac{\alpha_{n+1} - \beta_n}{(\tau - \alpha_{n+1})(\tau - \beta_n)} d\tau, \quad 1 < \rho < e^{\alpha}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Частная сумма

$$S_n(w) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(w)$$

ряда (45) является рациональной функцией порядка n, интерполирующей φ в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$. По формуле Эрмита

$$\varphi(w) - S_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} \frac{T_n(w)}{T_n(\tau)} \frac{(w - \alpha_{n+1})}{(\tau - \alpha_{n+1})} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - w)} d\tau, \quad w \in \mathcal{M}_\rho, \quad 1 < \rho < e^{\alpha}.$$

Если числа $m_1, \ldots, m_q$ рациональные и $b_1 = \cdots = b_s = \infty$, то линии L_ρ являются лемнискатами, а ряды (45) в этом случае совпадают с классическими рядами Якоби. Напомним, что сумма первых n членов ряда Якоби функции $\varphi \in H(\mathcal{M})$ определяется как полином степени $qn - 1$, интерполирующий функцию φ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_q$, причем каждая точка имеет кратность n (см. [23, с.76]). В случае, когда лемниската ограничивает континуум, не разбивающий плоскость, базисы Якоби и Фабера совпадают (см. [17, с.58]). Отметим также, что если $q = s =$

1 и границы ∂K, $\partial\Omega$ являются неконцентрическими окружностями, то система функций (44) совпадает с базисом $\{f_n\}$ из § 2 (при этом точки a_1 и b_1 взаимно симметричны относительно окружностей ∂K и $\partial\Omega$).

В работе [41] доказано следующее обобщение сформулированной выше леммы В.Д.Ерохина.

Теорема. *Функция $w = H(z)$ представима двумя способами в виде суперпозиции двух функций*

$$H(z) = Q[P(z)] = \Phi[F(z)], \quad z \in D, \tag{46}$$

со следующими свойствами:

1) *функция $t = P(z)\,(t = F(z))$ однолистна в области $\mathcal{G}$ (Ω) и отображает эту область на некоторую область $\mathcal{G}^{(1)}\,(\Omega^{(2)})$ при условии $P(\infty) = \infty$, причем контур $\Gamma = \partial\mathcal{G}$ $(C = \partial\Omega)$ переходит в контур $\Gamma^{(1)} = \partial\mathcal{G}^{(1)}$ $(C^{(2)} = \partial\Omega^{(2)})$;*

2) *функция $w = \Phi(t)(w = Q(t))$ отображает однолистно область $\mathcal{G}^{(2)} = \bigcap_{l=1}^{q} \mathcal{G}_l^{(2)}$, где $\mathcal{G}^{(2)} = \operatorname{ext}\Gamma_l^{(2)}$, $\Gamma_l^{(2)} = F(\Gamma_l)$, $l = 1,\dots,q$ (область $\Omega^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{s}\Omega_j^{(1)}$, где $\Omega^{(1)} = \operatorname{int} C_j^{(1)}$, $C_j^{(1)} = P(C_j)$, $j = 1,\dots,s$) на область $\mathcal{N}\,(\mathcal{M})$ при условии $\Phi(\infty) = \infty$, причем контур $C^{(2)}\,(\Gamma^{(1)})$ переходит в контур $L\,(\Lambda)$.*

Обозначив обратные функции через $\chi = H^{-1}, \sigma = P^{-1}, \kappa = Q^{-1}, \lambda = F^{-1}, \psi = \Phi^{-1}$, из (46) получим

$$\chi(w) = \sigma[\kappa(w)] = \lambda[\psi(w)], \quad w \in \Delta. \tag{47}$$

Пусть C_ρ – прообраз контура L_ρ при отображении $w = H(z)$. Имеем: $C_\rho = \bigcup_{j=1}^{p} C_{j\rho}$, где $s \le p \le q$ и кривые $C_{j\rho}\,(j = 1,\dots,p)$ жордановые. Положим $\Omega_\rho = \bigcup_{j=1}^{p}\Omega_{j\rho}, \mathcal{G}_\rho = \bigcap_{j=1}^{p}\mathcal{G}_{j\rho}$, где $\Omega_{j\rho} = \operatorname{int} C_{j\rho}, \mathcal{G}_{j\rho} = \operatorname{ext} C_{j\rho}$. Существует $\rho_0 > 1$ такое, что при всех $\rho_0 < \rho < e^\alpha$ кривые $C_{j\rho}\,(j = 1,\dots,p)$ попарно не пересекаются и $p = s$. Весовые функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ будем предполагать аналитическими и отличными от нуля в областях $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^{(2)}$ соответственно. В частности, можно принять $g_1(z) = P'(z), g_2(t) = \Phi'(t)$.

Как в случае $q = s = 1$ доказывается, что что каждая из двух пар формул

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{\phi_1[H(\zeta)]g_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \tag{48}$$

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{g_1[\chi(\tau)]}\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau) - \kappa(w)}d\tau, \quad z \in \mathcal{M}_\rho, \tag{49}$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{\phi_2[H(\zeta)]g_2[F(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)}d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \tag{50}$$

$$\varphi_2(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{g_2[\psi(\tau)]}\frac{d\tau}{\tau - w}, \quad z \in \mathcal{M}_\rho, \tag{51}$$

где $\rho_0 < \rho < e^{\alpha}$, устанавливает линейный топологический изоморфизм пространств $H(\Omega)$ и $H(\mathcal{M})$. Следовательно, системы аналитических функций

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{T_n[H(\zeta)]g_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{52}$$

и

$$e_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{T_n[H(\zeta)]g_2[F(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{53}$$

являются базисными в пространстве $H(\Omega)$, причем коэффициенты $\{c_n^{(1)}\}$ и $\{c_n^{(2)}\}$ в разложениях

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} f_n(z) \qquad \text{и} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} e_n(z), \qquad z \in \Omega, \tag{54}$$

произвольной функции f из $H(\Omega)$ определяются по формулам

$$c_0^{(\nu)} = \varphi_\nu(\alpha_1), \quad c_n^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi_\nu(\tau)}{T_n(\tau)} \frac{\alpha_{n+1} - \beta_n}{(\tau - \alpha_{n+1})(\tau - \beta_n)} d\tau, \quad \nu = 1, 2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Здесь φ_1 и φ_2 – функции, соответствующие f при линейном топологическом изоморфизме пространств $H(\Omega)$ и $H(\mathcal{M})$, задаваемом соответственно формулами (48),(49) и (50),(51). С помощью интегральной формулы Коши разложения вида (54) могут быть получены и для случая, когда континуумы $K_1, \dots, K_q$ и области $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ многосвязны. Кроме того, если $g_1(z) \equiv 1, g_2(t) \equiv 1, b_1 = \dots = b_s = \infty$, а отображение $w = H(z)$ аналитически и однолистно продолжается на всю область $\mathcal{G}$ при условии $H(\infty) = \infty$, то функции (52) и (53) совпадают с обобщенными многочленами Фабера для континуумов $K_1, \dots, K_q$, введенных Дж.Уолшем [42].

Для рассматриваемой пары (K, Ω) доказывается формула (4) и (при условии равномерной ограниченности функций f_n или e_n на K) неравенство (5). Аналогично (34) в случае $g_2(t) \equiv 1$ имеем

$$e_n(z) = \Phi_n[F(z)], \quad z \in \Omega, \tag{55}$$

где $\{\Phi_n(t)\}$ – система многочленов Фабера – Уолша для компакта $K^{(1)} = F(K)$. Поэтому для справедливости неравенства (5) достаточно предположить, что система многочленов $\{\Phi_n(t)\}$ ограничена на $K^{(1)}$ (ср. с [17, с.308], [43]).

Если границы ∂K и $\partial \Omega$ являются достаточно гладкими, то справедливы также соотношения

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega); C(K)) \asymp d_n(A_\infty(\Omega); C(K)) \asymp \exp(-n/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)) \tag{56}$$

и

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega); L^p(K)) \asymp d_n(A_\infty(\Omega); L^p(K)) \asymp n^{-1/p} \exp(-n/\mathrm{cap}\,(K, \Omega)), \tag{57}$$

где $1 \le p < \infty$. Покажем, например, как получаются соотношения (56). Из формулы (55) и инвариантности класса $A_\infty(\Omega)$ относительно конформных отображений следует, что достаточно ограничиться случаем, когда

$$\partial\Omega = \Gamma_R := \{z : \, G(z) = \log R\}, \quad R > 1,$$

где $G(z)$ – функция Грина для области $\mathcal{G} = \overline{\mathbf{C}} \setminus K$ с полюсом в бесконечности. В этом случае $F(z) \equiv z$ и согласно (54), (55) оптимальный линейный метод аппроксимации функций f из $A_\infty(\Omega)$ на K имеет вид

$$f(z) \approx F_n f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Phi_k(z), \quad z \in K,$$

где $\Phi_k(z)$ – многочлены Фабера – Уолша для K и коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{T_{n+1}(\tau)} \, d\tau, \quad 1 < \rho < R. \tag{58}$$

Контур ∂K выбирается таким, что

$$0 < M_3 < |\Phi'(z)| < M_4 < +\infty, \quad z \in \partial K. \tag{59}$$

По определению системы $\{T_n(w)\}$

$$|T_n(w)| \asymp |T(w)|^n, \quad w \in \mathcal{N}.$$

Следовательно, полагая $\tau = \Phi(\zeta)$ в (58), для любой $f \in A_\infty(\Omega)$ имеем $|c_k| \le M_5 R^{-k}$. Отсюда аналогично (22) получаются неравенства

$$\lambda_n(A_\infty(\Omega), C(K)) \le \sup\{||f - F_n f||_{C(K)} : \, f \in A_\infty(\Omega)\} \le M_6 R^{-n}.$$

Оценки снизу в (56) и (57) следуют из того, что при при некоторых условиях на K для любого полинома P_n степени не выше n справедливы неравенства

$$||P_n||_{C(\Gamma_R)} \le M_7 R^n ||P_n||_{C(K)} \quad \text{и} \quad ||P_n||_{L^p(\partial K)} \le M_8 n^{1/p} ||P_n||_{L^p(K)}, \tag{60}$$

где константы M_7 и M_8 не зависят от n и P_n (см., например, [44],[45]). Именно с выполнением условия (59) и неравенств (60) связаны ограничения на границу компакта K (ср. с [31], [35]).

Отметим в заключение, что в то время как многомерные аналоги формулы (2) доказаны [46], [47] при довольно общих условиях, соответствующие аналоги неравенства (5) и соотношений (56), (57) установлены (см. [10], [48]) только в простейших случаях.

Список литературы

[1] *Тихомиров В.М.* Теория приближений. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)." М., 1987. С.103-260.(*Tikhomirov V.M.* Approximation theory, in "Encyclopaedia of Mathematical Sciences," Vol.14: Analysis, II. Berlin: Springer-Verlag, 1990.)

[2] *Fisher S.D., Micchelli C.A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. P. 789-801.

[3] *Widom H.* Rational approximation and n-dimensional diameter // J. Approx. Theory. 1972. V. 5. № 1. P. 343-361.

[4] *Парфенов О.Г.* Поперечники единичного шара H^∞ в весовых пространствах $L^q(\mu)$ // Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. С. 85-87.

[5] *Farkov Yu.A.* n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J.Complexity 1994. V. 12. P. 58-79.

[6] *Осипенко К.Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 4. С. 465-476.

[7] *Бабенко К.И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С. 631-640.

[8] *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155-162.

[9] *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1985.

[10] *Farkov Yu.A.* The N-widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables // J. Approx. Theory. 1993. V. 75. P. 183-197.

[11] *Ding H., Gross K.I., Richards D.S.P.* The N-widths of spaces of holomorphic functions on bounded symmetric domains of tube type, I // J. Approx. Theory. 2000. V. 104. P. 121-141.

[12] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[13] *Фарков Ю.А.* Об ε-энтропии классов голоморфных функций // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 286-293.

[14] *Двейрин М.З.* Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге. В кн.: Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 24-28 июля 1975 г. М.: Наука, 1977. С. 129-132.

[15] *Вакарчук С.Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций // Украинский матем. журнал. 1990. Т. 42. № 7. С. 324-333.

[16] *Вакарчук С.Б.* О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 186-193.

[17] *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984.

[18] *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.

[19] *Dyn'kin E.M.* The rate of polynomial approximation in the complex domain // Lecture Notes in Mathematics. 1981. V. 864. P. 90 - 142.

[20] *Starke G., Varga R.S.* A hybrid Arnoldi - Faber iterative method for nonsymmetric systems of linear equations // Numer. Math. 1993. V. 64. P. 231-240.

[21] *Henrici P.* Applied and computation complex analysis. Vol. 3. New York/Toronto: Wiley, 1986.

[22] *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

[23] *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.

[24] *Ерохин В.Д.* О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитически продолжимых с данного континуума в данную область // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23. № 1. С. 91-132.

[25] *Ерохин В.Д.* Некоторые новые теоремы об аналитическом отображении многосвязных областей // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. № 4. С. 203-204.

[26] *Duren P.L.* Distortion in certain conformal mappings of an annulus // Michigan Math. J. 1963. V. 10. № 4. P. 431-441.

[27] *Hübner O.* Die Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen // Math. Zeitschr. 1967. Bd. 99. S. 193-206.

[28] *Драгилев М.М.* Об общих базисах пространств $A(G)$ и $\bar{A}(\bar{G})$ // Сибирский матем. журнал. 1999. Т. 40. № 1. С. 69-74.

[29] *Дынькин Е.М.* Конструктивная характеристика классов С.Л.Соболева и О.В.Бесова. В кн.: Спектральная теория функций и операторов. II. Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. Т. 155. Ленинград: Наука, 1980. С. 41-76.

[30] *Пеллер В.В.* Рациональная аппроксимация в L_p и преобразования Фабера // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 157. С. 70-75.

[31] *Пекарский А.А.* Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 2. С. 165-190.

[32] *Фарков Ю.А.* Асимптотические свойства обобщенных базисных функций Фабера - Ерохина // Сибирский матем. журнал. 1981. Т. 22. № 4. С. 173-189.

[33] *Фарков Ю.А.* Операторы Фабера - Ерохина и изоморфизмы некоторых пространств аналитических функций // Изв. вузов. Математика. 1982. № 7. С. 81-83.

[34] *Фарков Ю.А.* О поперечниках классов аналитических функций с ограниченными производными // Изв. вузов. Математика. 1988. № 4. С. 84-86.

[35] *Коновалов В.Н.* К задаче о поперечниках классов аналитических функций // Украинский матем. журнал. 1978. Т. 30. № 5. С. 668-670.

[36] *Fisher S.D., Stessin M.I.* Corrigendum // J. Approx. Theory. 1994. V. 79. P. 167-168.

[37] *Ерохин В.Д.* Оценки ε-энтропии и линейных поперечников некоторых классов аналитических функций. В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Сборник статей под редакцией А.И.Маркушевича. М.: Физматгиз, 1961. С. 159-167.

[38] *Ерохин В.Д.* Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 5. С. 949-952.

[39] *Walsh J.L.* On the conformal mapping of multiply connected regions // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82. № 1. P. 128-146.

[40] *Walsh J.L.* Sur l'approximation par fonctions rationnelles et par fonctions holomorphes bornées // Ann. Mat. 1955. V. 39. № 4. P. 267-277.

[41] *Фарков Ю.А.* Базисные функции Фабера – Ерохина в окрестности нескольких континуумов // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 6. С. 883-892.

[42] *Walsh J.L.* A generalization of Faber's polynomials// Math. Ann. 1958. V. 136. № 1. P. 23-33.

[43] *Ganelius T.H.* Rational approximation in the complex plane and on the line// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 1976. V. 2. P. 129-145.

[44] *Walsh J.L., Sewell W.E.* Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials// Duke Math. J. 1940. V. 6. № 3. P. 658-705.

[45] *Суетин П.К.* Порядковое сравнение различных норм многочленов в комплексной области // Матем. записки Уральского ун-та. 1966. Т. 5. № 4. С. 91-100.

[46] *Zahariuta V.* On approximation by special analytic polyhedral pairs // Ann. Polon. Math. 2003. V. 80. P. 243-256.

[47] *Tikhomirov V.M.* Approximation theory in the twentieth century. In "Mathematical events of the twentieth century" (Eds Bolibruch A.A. et al.) European Mathematical Society, FIZ Karlsruhe - Springer-Verlag, 2007. Transl. from the Russian. Moscow: PHASIS. 2006, 409-436.

[48] *Фарков Ю.А.* Базисные функции Фабера - Ерохина многих переменных и оценки ε-энтропии // Изв. вузов. Математика. 1982. № 3. С. 81-88.