

УДК 517.986.62

Биортогональные всплески на группах Виленкина

©2009 г. Ю. А. Фарков¹

Поступило в июне 2008 г.

Изложены алгоритмы построения биортогональных систем всплесков и масштабирующих функций, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша. Приведено несколько новых примеров биортогональных наборов всплесков с компактными носителями на группах Виленкина.

Известно, что ортогональные всплески с компактными носителями на группах Виленкина представимы лакунарными рядами по обобщенным функциям Уолша. В данной работе изложены алгоритмы построения биортогональных систем всплесков и масштабирующих функций, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша. Приведено несколько новых примеров биортогональных наборов всплесков.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основы теории рядов и преобразований Уолша как одного из разделов современного гармонического анализа изложены в монографиях [1–3]. В то время как характерами группы вращений окружности являются гармоники e^{ikt} , функции Уолша являются характерами канторовой диадической группы. Ортогональные всплески и соответствующие им масштабирующие функции, представимые в виде лакунарных рядов Уолша, изучались в [4–10]. Для данного $p \geq 2$ группа Виленкина G может быть определена как слабое прямое произведение счетного множества циклических групп p -го порядка (в случае $p = 2$ группа G изоморфна канторовой группе). Специфика построения всплесков на группах Кантора и Виленкина связана с тем обстоятельством, что эти группы (как и аддитивная группа поля p -адических чисел) содержат открытые компактные подгруппы (см. [11]). В настоящей работе вводятся биортогональные всплески и масштабирующие функции, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша, подобно тому как биортогональные всплески с компактными носителями на прямой \mathbb{R} определяются по надлежащим образом выбранным тригонометрическим полиномам (см., например, [12, § 8.3.5; 13, § 1.3]). Отметим, что для каждого $p \geq 2$ рассматриваемые обобщенные функции Уолша являются характерами соответствующей группы Виленкина.

Пусть G — локально компактная абелева группа, состоящая из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на G обозначается \oplus и определяется как покоординатное сложение по модулю p :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \Leftrightarrow z_j = x_j + y_j \pmod{p} \quad \text{для } j \in \mathbb{Z},$$

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

¹Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, Россия.
E-mail: farkov@list.ru

Группу G называют *группой Виленкина* (см., например, [2, р. 511]). Обозначим через \ominus операцию, обратную \oplus (так что $x \ominus x = \theta$, где θ — нулевая последовательность). Определим U как подгруппу группы G с множеством элементов U_0 .

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1 \leq q \leq \infty$, определяются по мере Хаара μ , заданной на борелевских множествах группы G и нормированной условием $\mu(U) = 1$. Обозначим через (\cdot, \cdot) и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная G , обозначается G^* и состоит из последовательностей вида

$$\omega = (\omega_j) = (\dots, 0, 0, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots),$$

где $\omega_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $\omega_j = 0$ для $j < k = k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара μ^* вводятся для G^* так же, как и для G . Каждый характер группы G может быть задан по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \omega_{1-j}\right), \quad x \in G,$$

для некоторого $\omega \in G^*$. Выделим в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \text{Aut } G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Легко видеть, что факторгруппа $H/A(H)$ содержит p элементов, а аннулятор H^\perp подгруппы H состоит из последовательностей $(\omega_j) \in G^*$, у которых $\omega_j = 0$ для $j > 0$.

Отображение $\lambda: G \rightarrow [0, +\infty)$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \quad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$ (в частности, $h_{[0]} = \theta$). Отображение $\lambda^*: G^* \rightarrow [0, +\infty)$, автоморфизм $B \in \text{Aut } G^*$, подгруппа U^* в G^* и элементы $\omega_{[\alpha]}$ из H^\perp определяются аналогично λ , A , U и $h_{[\alpha]}$ соответственно. Отметим, что $\chi(Ax, \omega) = \chi(x, B\omega)$ для всех $x \in G$, $\omega \in G^*$ (т.е. B — автоморфизм, сопряженный к A).

Обобщенные функции Уолша для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, \omega_{[\alpha]}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in G.$$

Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_U W_\alpha(x) \overline{W_\beta(x)} d\mu(x) = \delta_{\alpha, \beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ — символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы G^* определяется равенством

$$W_\alpha^*(\omega) = \chi(h_{[\alpha]}, \omega), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in G^*.$$

Система $\{W_\alpha^*\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Для любой функции $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ преобразование Фурье \widehat{f} , определенное по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x) \overline{\chi(x, \omega)} d\mu(x), \quad \omega \in G,$$

принадлежит пространству $L^2(G)$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}: L^1(G) \cap L^2(G) \rightarrow L^2(G), \quad \mathcal{F}f = \widehat{f},$$

стандартным образом продолжается на все пространство $L^2(G)$. Для любых $f, g \in L^2(G)$ имеет место равенство Парсеваля $(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})$.

Носитель функции $f \in L^2(G)$ обозначается $\text{supp } f$ и определяется как наименьшее по включению замкнутое множество, на дополнении которого функция f почти везде равна нулю. Обозначим через $L_c^2(G)$ множество функций из $L^2(G)$, имеющих компактный носитель.

Определение 1. Функцию $\varphi \in L_c^2(G)$ будем называть *масштабирующей функцией*, если она удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad x \in G, \quad (1.1)$$

где a_α — некоторые комплексные коэффициенты.

Характеристическую функцию множества $E \subset G$ будем обозначать через $\mathbf{1}_E$. Если $a_0 = \dots = a_{p-1} = 1/p$ и все $a_\alpha = 0$ для $\alpha \geq p$, то решением уравнения (1.1) является функция $\varphi = \mathbf{1}_{U_{n-1}}$. Соответствующие ортогональные всплески в $L^2(G)$ имеют вид

$$\psi^{(\nu)}(x) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\nu\alpha} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad \nu = 1, \dots, p-1,$$

где $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$ (ср. [14, теорема 2; 15, § 4]). Некоторые другие примеры масштабирующих функций, по которым определяются ортогональные всплески в $L^2(G)$, приведены в [6] и [10].

Функциональное уравнение (1.1) называется *масштабирующим уравнением*. Применяя преобразование Фурье, можем записать это уравнение в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(B^{-1}\omega) \widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \quad (1.2)$$

где

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \quad (1.3)$$

— обобщенный полином Уолша, называемый *маской* масштабирующей функции φ .

Множества

$$U_{n,s}^* = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*), \quad 0 \leq s \leq p^n - 1, \quad (1.4)$$

являются смежными классами группы U^* по подгруппе $B^{-n}(U^*)$. Каждая из функций $W_\alpha^*(\cdot)$ при $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$ постоянна на множествах (1.4). Коэффициенты масштабирующего уравнения (1.1) связаны со значениями b_s маски (1.3) на классах $U_{n,s}^*$ прямым и обратным дискретными преобразованиями Виленкина–Крестенсона:

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]}), \quad 0 \leq \alpha \leq p^n - 1, \quad (1.5)$$

$$b_s = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]})}, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1. \quad (1.6)$$

Формула Парсеваля для этих преобразований имеет вид

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{\tilde{a}_\alpha} = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s \overline{\tilde{b}_s}, \tag{1.7}$$

где a_α, b_s и $\tilde{a}_\alpha, \tilde{b}_s$ — произвольные наборы чисел, для которых имеют место равенства (1.5) и (1.6). Для вычисления дискретных преобразований Виленикина–Крестенсона применяются алгоритмы, аналогичные классическим алгоритмам для быстрого преобразования Фурье (см., например, [2, р. 463]).

Теорема А. Если функция $\varphi \in L_c^2(G)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \text{supp } \varphi \subset U_{1-n}.$$

В пространстве $L_c^2(G)$ это решение уравнения (1.1) единственно, дается формулой

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega)$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{\varphi}(h^*) = 0$ при всех $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ (модифицированное условие Стрэнга–Фикса);
- 2) $\sum_{h \in H} \varphi(x \oplus h) = 1$ для п.в. $x \in G$ (свойство разбиения единицы).

Определение 2. Функцию $f \in L^2(G)$ будем называть *стабильной*, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \right\| \leq c_2 \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \right)^{1/2}$$

для каждой последовательности $\{a_\alpha\}$ из ℓ^2 . Иначе говоря, функция f стабильна в $L^2(G)$, если функции $f(\cdot \ominus h)$, $h \in H$, образуют систему Рисса в пространстве $L^2(G)$.

Будем говорить, что функция $g: G^* \rightarrow \mathbb{C}$ имеет *периодический нуль* в точке $\omega \in G^*$, если $g(\omega \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Следующая теорема характеризует стабильные в $L^2(G)$ функции с компактными носителями.

Теорема В. Для произвольной функции $f \in L_c^2(G)$ следующие свойства эквивалентны:

- (а) функция f стабильна в $L^2(G)$;
- (б) система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно независима;
- (в) преобразование Уолша функции f не имеет периодических нулей.

Теоремы А и В доказаны в [10] и [16] (при $p = 2$ их аналоги для пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ имеются в [9]).

Определение 3. Семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* (сокращенно КМА) в $L^2(G)$, если выполнены следующие условия:

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $\bigcup V_j = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
- (iii) $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(A \cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;

- (iv) $f(\cdot) \in V_0 \Rightarrow f(\cdot \ominus h) \in V_0$ для $h \in H$;
- (v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является базисом Рисса в V_0 .

Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ положим

$$f_{j,h}(x) = p^{j/2} f(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Определение 4. Будем говорить, что функция φ порождает КМА в $L^2(G)$, если, во-первых, семейство $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является системой Рисса в $L^2(G)$ и, во-вторых, замкнутые подпространства $V_j = \overline{\text{span}}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$, $j \in \mathbb{Z}$, образуют КМА в $L^2(G)$.

В работах [8] и [10] для произвольных $p, n \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, найдены коэффициенты a_α такие, что масштабирующее уравнение (1.1) имеет решение $\varphi \in L^2_c(G)$, которое является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша и порождает КМА в $L^2(G)$. Более того, по каждой масштабирующей функции φ , порождающей КМА в $L^2(G)$, могут быть построены ортогональные всплески $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p-1)}$ таким образом, что функции

$$\psi_{j,h}^{(\nu)}(x) = p^{j/2} \psi^{(\nu)}(A^j x \ominus h), \quad 1 \leq \nu \leq p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$.

Приведем разложение масштабирующей функции в лакунарный ряд Уолша. Пусть $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_l (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\{\omega \in U^* \mid \chi(x, \omega) = 1 \text{ для } x \in A(H)\} = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\},$$

т.е. множество последовательностей δ_l является аннулятором подгруппы $A(H)$ в H . Заметим, что $W_\alpha^*(\delta_l) = \varepsilon_p^{\alpha l}$ и $\delta_l = B^{-n} \omega_{[lp^{n-1}]}$ для $0 \leq l \leq p-1$.

Предположим, что функция $\varphi \in L^2_c(G)$ является решением масштабирующего уравнения (1.1), маска которого удовлетворяет условиям

$$m(\theta) = 1, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*.$$

Тогда, как показано в [8], имеет место равенство

$$\varphi(x) = \frac{1}{p^{n-1}} \mathbf{1}_U(A^{1-n}x) \left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(p,n)} c_l[m] W_l(A^{1-n}x) \right), \quad x \in G, \quad (1.8)$$

где $\mathbb{N}(p, n)$ и $c_l[m]$ определяются следующим образом. Представим каждое $l \in \mathbb{N}$ в виде p -арного разложения

$$l = \sum_{j=0}^k \mu_j p^j, \quad \mu_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad \mu_k \neq 0, \quad k = k(l) \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.9)$$

и обозначим через $\mathbb{N}_0(p, n)$ множество всех натуральных чисел $l \geq p^{n-1}$, у которых среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+n-1})$ в разложении (1.9) отсутствуют наборы

$$(0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, 2), \dots, (0, 0, \dots, 0, p-1).$$

где $b_l^{(N)} = m(B^{-N}\omega_{[l]})$, $\tilde{b}_l^{(N)} = \tilde{m}(B^{-N}\omega_{[l]})$. Пусть \oplus_p и \ominus_p обозначают соответственно операции сложения и вычитания целых чисел по модулю p . Пользуясь равенством $W_\alpha^*(\omega)W_\beta^*(\omega) = W_{\alpha\oplus_p\beta}^*(\omega)$, получаем

$$m^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \sum_{\beta=0}^{p^{\tilde{n}}-1} a_\alpha \tilde{a}_\beta \overline{W_{\alpha\oplus_p\beta}^*(\omega)}.$$

Далее, полагая $a_\alpha = \tilde{a}_\beta = 0$ для $\alpha \geq p^n$, $\beta \geq p^{\tilde{n}}$, имеем

$$m^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^N-1} a_\alpha^* \overline{W_\alpha^*(\omega)}, \quad a_\alpha^* = \sum_{\gamma=0}^{p^N-1} a_\gamma \tilde{a}_{\gamma\ominus_p\alpha}.$$

Определим функцию φ^* по формуле

$$\varphi^*(x) = \int_G \varphi(t \oplus x) \overline{\tilde{\varphi}(t)} d\mu(t).$$

Преобразование Фурье этой функции связано с преобразованиями Фурье функций φ , $\tilde{\varphi}$ равенством $\widehat{\varphi^*}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega)}$. Более того, функция φ^* является масштабирующей функцией и удовлетворяет уравнению

$$\varphi^*(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^N-1} a_\alpha^* \varphi^*(Ax \ominus \alpha), \quad x \in G.$$

Таким образом, полином m^* является маской функции φ^* .

Пусть $M \subset U^*$ и

$$S_p M = \bigcup_{l=0}^{p-1} \{B^{-1}\omega_{[l]} + B^{-1}(\omega) \mid \omega \in M\}.$$

Предположим, что M совпадает с одним из множеств $U_{n-1,s}^*$, $1 \leq s \leq p^{n-1} - 1$, либо является объединением некоторых из этих множеств. Множество M называется *блокирующим* для маски m , если $m(\omega) = 0$ для всех $\omega \in S_p M \setminus M$. Согласно данному определению если M — блокирующее множество для m , то $M \cap U_{n-1,0}^* = \emptyset$. Кроме того, каждая маска может иметь только конечное число блокирующих множеств.

Предложение 3. Если одна из масок m , \tilde{m} , m^* имеет блокирующее множество, то системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\tilde{\varphi}(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ не являются биортонормированными в $L^2(G)$.

Это предложение доказывается с помощью теоремы В (случай $m = \tilde{m}$ подробно изложен в [10]).

Пусть E — компактное множество в G^* . Множество E называется *конгруэнтным* U^* по модулю H^\perp , если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$. Имеет место следующий аналог хорошо известного критерия Коэна (см., например, [13, теорема 2.5.6]).

Теорема 1. Пусть φ , $\tilde{\varphi}$ — масштабирующие функции такие, что их маски m , \tilde{m} удовлетворяют условию (2.2), и пусть $\widehat{\varphi}(\theta) = \widehat{\tilde{\varphi}}(\theta) = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (а) системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\tilde{\varphi}(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$;

(6) *существует множество E , конгруэнтное U^* по модулю H^\perp , содержащее окрестность нулевого элемента группы G^* и такое, что*

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m(B^{-j}\omega)| > 0, \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |\tilde{m}(B^{-j}\omega)| > 0. \quad (2.4)$$

Для случая $\varphi = \tilde{\varphi}$ эта теорема доказана в [10]. При построении биортогональных всплесковых систем одним из основных является вопрос о принадлежности функций $\varphi, \tilde{\varphi}$ классу L^2 . В некоторых случаях ответить на этот вопрос удастся с помощью совместного спектрального радиуса некоторых специальных линейных операторов, определяемых по соответствующим масштабирующим уравнениям (см., например, теорему А.6.5 в [13]).

Пусть $r = p^{n-1}$. Напомним, что совместный спектральный радиус комплексных матриц A_0, A_1, \dots, A_{p-1} размера $r \times r$ определяется по формуле

$$\hat{\rho}(A_0, A_1, \dots, A_{p-1}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \max \left\{ \|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_k}\|^{1/k} : d_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, 1 \leq j \leq k \right\},$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{C}^{r \times r}$. В случае $A_0 = A_1 = \dots = A_{p-1}$ величина $\hat{\rho}(A_0, A_1, \dots, A_{p-1})$ совпадает со спектральным радиусом $\rho(A_0)$. Совместный спектральный радиус конечномерных линейных операторов L_0, L_1, \dots, L_{p-1} определяется как совместный спектральный радиус их матриц в произвольном фиксированном базисе соответствующего линейного пространства.

Для данного масштабирующего уравнения (1.1) положим $c_\alpha = p a_\alpha$ и зададим матрицы T_0, T_1, \dots, T_{p-1} размера $r \times r$ по формулам

$$(T_0)_{i,j} = c_{(pi-p)\ominus_p(j-1)}, \quad (T_1)_{i,j} = c_{(pi-p+1)\ominus_p(j-1)}, \quad \dots, \quad (T_{p-1})_{i,j} = c_{(pi-1)\ominus_p(j-1)},$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Определим подпространство

$$V := \{u = (u_1, \dots, u_r)^t \mid u_1 + \dots + u_r = 0\}$$

и обозначим через L_0, L_1, \dots, L_{p-1} сужения на подпространство V линейных операторов, заданных на всем пространстве \mathbb{C}^r соответственно матрицами T_0, T_1, \dots, T_{p-1} .

Предложение 4. *Пусть маска m масштабирующего уравнения (1.1) удовлетворяет условиям*

$$m(\theta) = 1, \quad m(\delta_1) = m(\delta_2) = \dots = m(\delta_{p-1}) = 0,$$

и пусть $\hat{\rho}[m] := \hat{\rho}(L_0, L_1, \dots, L_{p-1}) < 1$. Тогда функция φ , заданная по формуле (1.8), удовлетворяет уравнению (1.1) и непрерывна на G .

Это предложение доказывается аналогично соответствующим результатам из § 2 и § 4 работы [8]; при этом оказывается, что ряд в (1.8) сходится равномерно на G (см. также § 5 в [9]). Легко видеть, что при условиях предложения 4 функция φ имеет компактный носитель и принадлежит пространству $L^2(G)$. При этом

$$\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_{p\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_{p\alpha+1} = \dots = \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_{p\alpha+p-1} = \frac{1}{p}.$$

В приведенных ниже графических иллюстрациях заданные на $[0, +\infty)$ функции $\Phi, \tilde{\Phi}$ связаны с масштабирующими функциями $\varphi, \tilde{\varphi}$ равенствами $\varphi(x) = \Phi[\lambda(x)], \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\Phi}[\lambda(x)]$ для

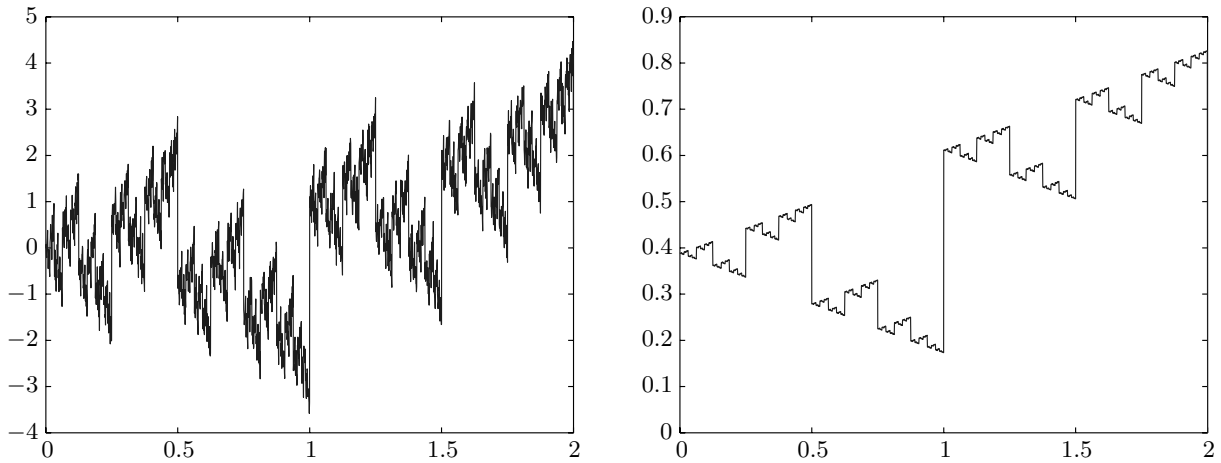


Рис. 1. Функции Φ (слева) и $\tilde{\Phi}$ (справа) из примера 1

почти всех $x \in G$ (очевидно, определенное в разд. 1 отображение $\lambda: G \rightarrow [0, +\infty)$ обратимо почти всюду). Отметим также, что в примерах 1–3 разложения вида (1.8) выводятся из формул

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \quad \tilde{\hat{\varphi}}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}(B^{-j}\omega) \quad (2.5)$$

с помощью преобразования Фурье.

Пример 1. Пусть $p = 2$, $n = \tilde{n} = 2$ и маски масштабирующих функций φ , $\tilde{\varphi}$ имеют вид

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in U_{2,0}^*, \\ a, & \omega \in U_{2,1}^*, \\ 0, & \omega \in U_{2,2}^*, \\ b, & \omega \in U_{2,3}^*, \end{cases} \quad \tilde{m}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in U_{2,0}^*, \\ \tilde{a}, & \omega \in U_{2,1}^*, \\ 0, & \omega \in U_{2,2}^*, \\ \tilde{b}, & \omega \in U_{2,3}^*, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a\tilde{a} + b\tilde{b} = 1$. Если $a = 0$ или $\tilde{a} = 0$, то класс $U_{1,1}^*$ является блокирующим множеством для m или \tilde{m} , а в остальных случаях блокирующих множеств для масок m , \tilde{m} , m^* не существует. Предположим дополнительно, что $|b| < 1$ и $|\tilde{b}| < 1$. Тогда $a\tilde{a} \neq 0$, блокирующие множества отсутствуют и условие (2.4) выполнено для $E = U^*$. Кроме того, как в ортогональном случае [4], имеет место разложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_U(A^{-1}x) \left(1 + a \sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x) \right)$$

и аналогичное разложение верно для $\tilde{\varphi}$, причем обе функции φ , $\tilde{\varphi}$ непрерывны на G . Действительно, указанные разложения для φ , $\tilde{\varphi}$ получаются непосредственно из (2.5) и (2.6), а из примера 4.3 в [8] и замечания 3 в [9] видно, что $\hat{\rho}[m] = |b|$, $\hat{\rho}[\tilde{m}] = |\tilde{b}|$; следовательно, можно применить предложение 4. Таким образом, если $a\tilde{a} + b\tilde{b} = 1$, $|b| < 1$, $|\tilde{b}| < 1$, то H -сдвиги масштабирующих функций φ , $\tilde{\varphi}$ образуют биортонормированную систему в $L^2(G)$. Графики функций Φ и $\tilde{\Phi}$ для значений

$$a = -1.835358, \quad b = -0.792570, \quad \tilde{a} = -0.332874, \quad \tilde{b} = -0.490884$$

изображены на рис. 1.

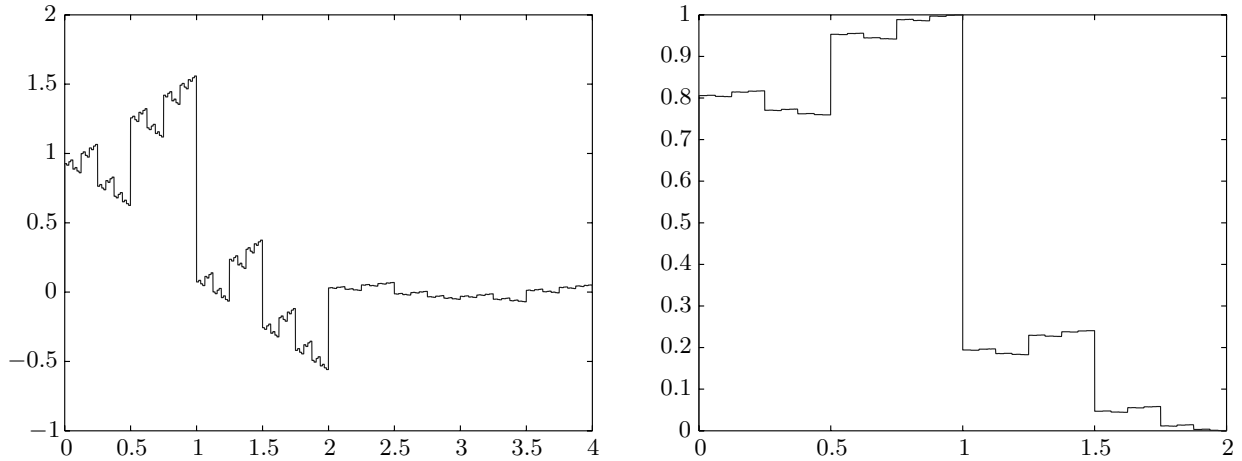


Рис. 2. Функции Φ (слева) и $\tilde{\Phi}$ (справа) из примера 2

Пример 2. Пусть $p = 2, n = 3, \tilde{n} = 2$, маска \tilde{m} такая же, как (2.6), а маска m задана равенствами

$$\begin{aligned} m(\omega) &= 1 \quad \text{для } \omega \in U_{3,0}^*, & m(\omega) &= 1 \quad \text{для } \omega \in U_{3,1}^*, \\ m(\omega) &= b \quad \text{для } \omega \in U_{3,2}^*, & m(\omega) &= c \quad \text{для } \omega \in U_{3,3}^*, \\ m(\omega) &= 0 \quad \text{для } \omega \in U_{3,4}^*, & m(\omega) &= 0 \quad \text{для } \omega \in U_{3,5}^*, \\ m(\omega) &= \beta \quad \text{для } \omega \in U_{3,6}^*, & m(\omega) &= \gamma \quad \text{для } \omega \in U_{3,7}^*. \end{aligned}$$

Класс $U_{1,1}^*$ является блокирующим множеством для m, \tilde{m}, m^* соответственно в следующих случаях: 1) $b = c = 0$, 2) $\tilde{a} = 0$, 3) $b\tilde{a} = c\tilde{a} = 0$. Кроме того, класс $U_{2,3}^*$ является блокирующим множеством для m и m^* при $c = 0$ и $c\tilde{a} = 0$ соответственно. Других блокирующих множеств для m, \tilde{m}, m^* не существует. Отметим, что в случае $\tilde{a} = 0, bc \neq 0$ класс $U_{2,3}^*$ является блокирующим множеством для m^* и не является блокирующим множеством для m, \tilde{m} . В соответствии с (2.3) предположим, что

$$b\tilde{a} + \beta\tilde{b} = c\tilde{a} + \gamma\tilde{b} = 1$$

(в частности, при $b = 0, c = 1$ имеем $\beta = 1/\tilde{b}, \gamma = (1 - \tilde{a})/\tilde{b}$). Блокирующие множества для m, \tilde{m}, m^* существуют, только если $\tilde{a} = 0$ или $c = 0$. В случае $c\tilde{a} \neq 0$ условие (2.4) выполнено для $E = U_{2,0}^* \cup U_{3,3}^* \cup U_{3,6}^*$. Согласно примерам 4.3 и 4.4 из [8] имеем $\hat{\rho}[m] = |\gamma|$ и $\hat{\rho}[\tilde{m}] = |\tilde{b}|$. Таким образом, если $c\tilde{a} \neq 0, |\gamma| < 1$ и $|\tilde{b}| < 1$, то H -сдвиги масштабирующих функций $\varphi, \tilde{\varphi}$ составляют биортонормированную систему в $L^2(G)$. Графики функций Φ и $\tilde{\Phi}$ для значений

$$\begin{aligned} b &= 1.201260, & c &= 1.166263, & \beta &= -0.367477, & \gamma &= -0.477955, \\ \tilde{a} &= 0.758916, & \tilde{b} &= -0.240408 \end{aligned}$$

приведены на рис. 2.

Пример 3. Пусть $p = 3, n = \tilde{n} = 2$, а маски m, \tilde{m} равны 1 на $U_{2,0}^*$, равны 0 на $U_{2,3}^* \cup U_{2,6}^*$, а на остальной части подгруппы U^* заданы равенствами

$$\begin{aligned} m(\omega) &= a \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{a} \quad \text{для } \omega \in U_{2,1}^*, & m(\omega) &= \alpha \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{\alpha} \quad \text{для } \omega \in U_{2,2}^*, \\ m(\omega) &= b \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{b} \quad \text{для } \omega \in U_{2,4}^*, & m(\omega) &= \beta \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{\beta} \quad \text{для } \omega \in U_{2,5}^*, \\ m(\omega) &= c \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{c} \quad \text{для } \omega \in U_{2,7}^*, & m(\omega) &= \gamma \text{ и } \tilde{m}(\omega) = \tilde{\gamma} \quad \text{для } \omega \in U_{2,8}^*, \end{aligned}$$

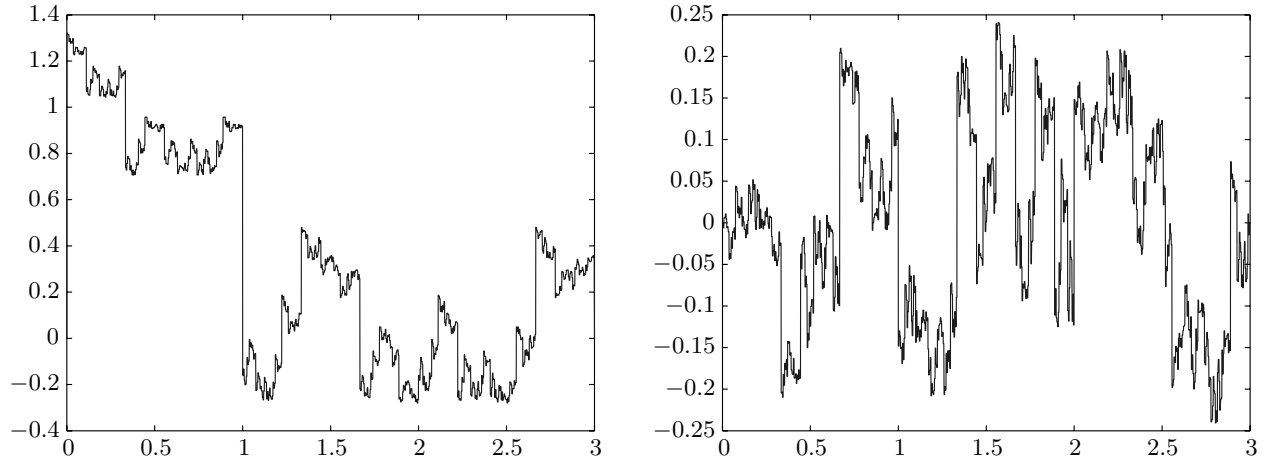


Рис. 3. Функции $\operatorname{Re} \Phi$ (слева) и $\operatorname{Im} \Phi$ (справа) из примера 3

где параметры удовлетворяют условию

$$a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 1.$$

В случаях $a\bar{a} = \alpha\bar{\alpha} = 0$, $a\bar{a} = c\bar{c} = 0$, $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = 0$ блокирующими множествами для маски m^* соответственно являются $U_{1,1}^* \cup U_{1,2}^*$, $U_{1,1}^*$, $U_{1,2}^*$. Условие (2.4) выполняется в следующих трех случаях:

- 1) $a\bar{a} \neq 0$, $\alpha\bar{\alpha} \neq 0$ и $E = U^*$;
- 2) $a\bar{a} \neq 0$, $\beta\bar{\beta} \neq 0$ и $E = U_{1,0}^* \cup U_{1,1}^* \cup U_{1,5}^*$;
- 3) $c\bar{c} \neq 0$, $\alpha\bar{\alpha} \neq 0$ и $E = U_{1,0}^* \cup U_{1,2}^* \cup U_{1,7}^*$.

Таким образом, если $\hat{\rho}[m] < 1$ и $\hat{\rho}[\tilde{m}] < 1$ (это условие при конкретных числовых значениях параметров проверяется численно), то в указанных трех случаях H -сдвиги масштабирующих функций φ , $\tilde{\varphi}$ составляют биортонормированную систему в $L^2(G)$. На рис. 3 и 4 изображены действительные и мнимые части функций Φ и $\tilde{\Phi}$ для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} a = 0.9, \quad b = -0.295272, \quad c = 0.403503, \quad \alpha = 0.9, \quad \beta = 0.478760, \quad \gamma = 0.144181, \\ \tilde{a} = 0.9, \quad \tilde{b} = 0.037839, \quad \tilde{c} = 0.498566, \quad \tilde{\alpha} = 0.9, \quad \tilde{\beta} = 0.270151, \quad \tilde{\gamma} = 0.420735. \end{aligned}$$

Отметим, что для указанных значений параметров имеют место оценки $\hat{\rho}[m] < 0.57$ и $\hat{\rho}[\tilde{m}] < 0.65$.

Определение 5. Пусть $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$ — два КМА в $L^2(G)$. Будем говорить, что функции $\psi^{(\nu)} \in V_1$, $\tilde{\psi}^{(\nu)} \in \tilde{V}_1$, $\nu = 1, \dots, p-1$, образуют биортонормальный набор всплесков относительно пары $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$, если $\psi^{(\nu)} \perp \tilde{V}_0$, $\tilde{\psi}^{(\nu)} \perp V_0$ для всех $\nu = 1, \dots, p-1$ и

$$(\psi^{(\nu)}(\cdot \oplus h_{[\alpha]}), \tilde{\psi}^{(\kappa)}(\cdot \oplus h_{[\beta]})) = \delta_{\nu, \kappa} \delta_{\alpha, \beta}, \quad \nu, \kappa \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+.$$

Как обычно, через \mathcal{M}^* обозначается матрица, сопряженная к матрице \mathcal{M} . Единичная матрица порядка p обозначается E_p .

Теорема 2. Пусть КМА $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$ соответственно порождены масштабирующими функциями φ , $\tilde{\varphi}$ с масками $t = t_0$, $\tilde{t} = \tilde{t}_0$ и системы $\{\varphi(\cdot \oplus h) \mid h \in H\}$, $\{\tilde{\varphi}(\cdot \oplus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными. Если матрицы

$$\mathcal{M} = \{m_\nu(\omega + \delta_k)\}_{\nu, k=0}^{p-1}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{m}_\nu(\omega + \delta_k)\}_{\nu, k=0}^{p-1}, \quad (2.7)$$

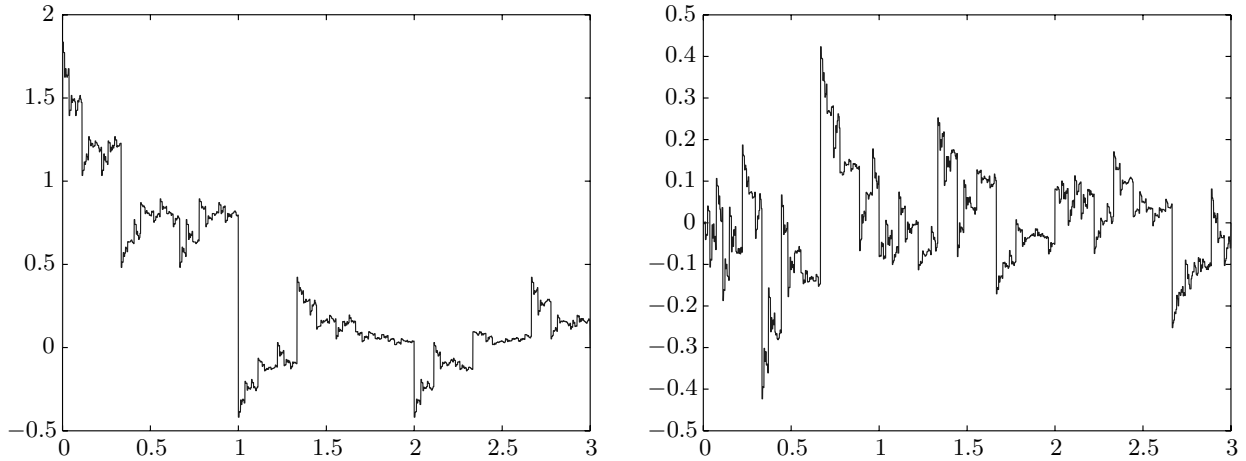


Рис. 4. Функции $\operatorname{Re} \tilde{\Phi}$ (слева) и $\operatorname{Im} \tilde{\Phi}$ (справа) из примера 3

где $m_\nu, \tilde{m}_\nu \in L^2(U^*)$, для почти всех $\omega \in U^*$ удовлетворяют условию

$$M\tilde{M}^* = E_p, \tag{2.8}$$

то функции $\psi^{(\nu)}, \tilde{\psi}^{(\nu)}, \nu = 1, \dots, p-1$, определенные равенствами

$$\tilde{\psi}^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \quad \widehat{\tilde{\psi}}^{(\nu)}(\omega) = \tilde{m}_\nu(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \tag{2.9}$$

образуют биортогональный набор всплесков относительно пары $\{V_j\}, \{\tilde{V}_j\}$.

Аналоги теоремы 2 для пространств $L^2(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$ содержатся в [13, гл. 2] и [17]. При $p = 2$ можно выбрать

$$m_1(\omega) = -w_1(\omega)\overline{\tilde{m}_0(\omega \oplus \delta_1)}, \quad \tilde{m}_1(\omega) = -w_1(\omega)\overline{m_0(\omega \oplus \delta_1)}. \tag{2.10}$$

Выполняя обратные преобразования Фурье и полагая $\psi = \psi^{(1)}, \tilde{\psi} = \tilde{\psi}^{(1)}$, из формул (2.1), (2.9) и (2.10) получим

$$\psi(x) = 2 \sum_{\alpha=0}^{2^n-1} (-1)^\alpha \tilde{a}_{\alpha \oplus 1} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad \tilde{\psi}(x) = 2 \sum_{\alpha=0}^{2^{\tilde{n}}-1} (-1)^\alpha \bar{a}_{\alpha \oplus 1} \tilde{\varphi}(Ax \ominus h_{[\alpha]}).$$

Согласно (2.1) для полиномов $m_0 = m, \tilde{m}_0 = \tilde{m}$ справедливы равенства

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} A_{0k}(\overline{W_p^*(\omega)}), \quad \tilde{m}_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} \tilde{A}_{0k}(\overline{W_p^*(\omega)}),$$

где

$$A_{0k}(z) = \sum_{l=0}^{p^{n-1}-1} a_{k+pl} z^l, \quad \tilde{A}_{0k}(z) = \sum_{l=0}^{p^{\tilde{n}-1}-1} \tilde{a}_{k+pl} z^l, \quad 0 \leq k \leq p-1.$$

Пусть \mathbb{T} — единичная окружность на комплексной плоскости \mathbb{C} . Коэффициенты $a_\alpha, \tilde{a}_\alpha$ в (2.1) выберем так, чтобы выполнялись условия

$$p \sum_{k=0}^{p-1} A_{0k}(z) \overline{\tilde{A}_{0k}(z)} = 1, \quad z \in \mathbb{T}, \tag{2.11}$$

и

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_{0k}(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{A}_{0k}(1) = 1 \tag{2.12}$$

(легко видеть, что тогда $m_0(\theta) = \tilde{m}_0(\theta) = 1$). Предположим, что нам удалось найти алгебраические полиномы $A_{\nu k}(z)$, $\tilde{A}_{\nu k}(z)$, $1 \leq \nu, k \leq p-1$, такие, что

$$p \sum_{k=0}^{p-1} A_{\nu k}(z) \overline{\tilde{A}_{\nu k}(z)} = \delta_{\nu, \nu}, \quad 1 \leq \nu, \nu \leq p-1, \quad z \in \mathbb{T}, \quad (2.13)$$

и

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_{\nu k}(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{A}_{\nu k}(1) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq p-1. \quad (2.14)$$

Положим тогда

$$m_\nu(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} A_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)}), \quad \tilde{m}_\nu(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} \tilde{A}_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)}), \quad 1 \leq \nu \leq p-1,$$

и образуем матрицы

$$\mathcal{M} = \{m_\nu(\omega \oplus \delta_k)\}_{\nu, k=0}^{p-1}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{m}_\nu(\omega \oplus \delta_k)\}_{\nu, k=0}^{p-1}, \quad \mathcal{D}(\omega) = \{W_\nu^*(\omega \oplus \delta_k)\}_{\nu, k=0}^{p-1}.$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{M} = A(\overline{W_p^*(\omega)})\mathcal{D}(\omega), \quad \tilde{\mathcal{M}} = \tilde{A}(\overline{W_p^*(\omega)})\mathcal{D}(\omega), \quad (2.15)$$

где $A(z) = \{A_{\nu k}(z)\}_{\nu, k=0}^{p-1}$, $\tilde{A}(z) = \{\tilde{A}_{\nu k}(z)\}_{\nu, k=0}^{p-1}$. Поскольку матрица $p^{-1/2}\mathcal{D}(\omega)$ унитарна, из (2.15) имеем

$$\mathcal{M}\tilde{\mathcal{M}}^* = pA(\overline{W_p^*(\omega)})\tilde{A}^*(\overline{W_p^*(\omega)}) \quad (2.16)$$

или, подробнее,

$$\sum_{k=0}^{p-1} m_\nu(\omega \oplus \delta_k) \overline{\tilde{m}_\nu(\omega \oplus \delta_k)} = p \sum_{k=0}^{p-1} A_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)}) \overline{\tilde{A}_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)})}, \quad 1 \leq \nu, \nu \leq p-1.$$

Из формул (2.13), (2.14) и (2.16) видно, что для матриц (2.15) условия (2.8) выполнены; кроме того, $m_\nu(\theta) = 0$, $\tilde{m}_\nu(\theta) = 0$ для $\nu = 1, \dots, p-1$.

Пример 4. Пусть $p = 3$, $n = \tilde{n} = 2$. Коэффициенты масок $m = m_0$, $\tilde{m} = \tilde{m}_0$ определим с помощью формул (1.5) по параметрам $a, \alpha, \dots, \tilde{\gamma}$ таким образом, что системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\tilde{\varphi}(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$ (см. пример 3). Напомним, что

$$a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 1. \quad (2.17)$$

Поскольку $b_0 = \tilde{b}_0 = 1$, то из (1.7) и (2.17) имеем

$$\sum_{\alpha=0}^8 a_\alpha \bar{a}_\alpha = \frac{1}{3}.$$

Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} A_{00}(z) &= a_0 + a_3z + a_6z^2, & A_{01}(z) &= a_1 + a_4z + a_7z^2, & A_{02}(z) &= a_2 + a_5z + a_8z^2, \\ \tilde{A}_{00}(z) &= \tilde{a}_0 + \tilde{a}_3z + \tilde{a}_6z^2, & \tilde{A}_{01}(z) &= \tilde{a}_1 + \tilde{a}_4z + \tilde{a}_7z^2, & \tilde{A}_{02}(z) &= \tilde{a}_2 + \tilde{a}_5z + \tilde{a}_8z^2. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $z \in \mathbb{T}$

$$\sum_{k=0}^3 A_{0k}(z) \overline{\widetilde{A}_{0k}(z)} = \frac{1}{3} + (a_0 \bar{a}_3 + a_1 \bar{a}_4 + a_2 \bar{a}_5) \bar{z} + (\bar{a}_0 a_3 + \bar{a}_1 a_4 + \bar{a}_2 a_5) z + (a_0 \bar{a}_6 + a_1 \bar{a}_7 + a_2 \bar{a}_8) \bar{z}^2 + (\bar{a}_0 a_6 + \bar{a}_1 a_7 + \bar{a}_2 a_8) z^2 + (a_3 \bar{a}_6 + a_4 \bar{a}_7 + a_5 \bar{a}_8) z \bar{z}^2 + (\bar{a}_3 a_6 + \bar{a}_4 a_7 + \bar{a}_5 a_8) \bar{z} z^2.$$

Отсюда получаем, что условие (2.11) выполняется в том и только том случае, когда

$$\begin{aligned} a + \alpha + (\bar{\alpha} + d) \varepsilon_3 + (\bar{a} + \tilde{d}) \varepsilon_3^2 &= \bar{a} + \bar{\alpha} + (\alpha + \tilde{d}) \varepsilon_3 + (a + d) \varepsilon_3^2 = 0, \\ a + \alpha + (\bar{a} + \tilde{d}) \varepsilon_3 + (\bar{\alpha} + d) \varepsilon_3^2 &= \bar{a} + \bar{\alpha} + (a + d) \varepsilon_3 + (\alpha + \tilde{d}) \varepsilon_3^2 = 0, \\ d + \tilde{d} + (a + \bar{a}) \varepsilon_3 + (\alpha + \bar{\alpha}) \varepsilon_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

где $d = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta} + c\bar{\gamma}$, $\tilde{d} = \bar{a}\alpha + \bar{b}\beta + \bar{c}\gamma$ (ср. с алгоритмами построения всплесков в [13, § 2.6; 18–20]).

Замечание 1. По аналогии с теоремой 2.7.5 из [13] можно сформулировать условия, при выполнении которых функции $\psi^{(\nu)}$, $\tilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, p - 1$, определенные по формулам (2.9), порождают фреймы или базисы Рисса в $L^2(G)$. Например, достаточно предположить, что $\hat{\rho}[m] = \hat{\rho}[\tilde{m}] = 0$; тогда для масштабирующих функций φ , $\tilde{\varphi}$ в разложениях вида (1.8) имеется только конечное число ненулевых коэффициентов, а их преобразования Фурье $\hat{\varphi}$, $\hat{\tilde{\varphi}}$ имеют компактные носители (см. [10, предложение 2]). В этом случае при выполнении равенств (2.2), условий (2.8) и

$$m_\nu(\theta) = 0, \quad \tilde{m}_\nu(\theta) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p - 1,$$

каждая из систем $\{\psi_{j,h}^{(\nu)}\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,h}^{(\nu)}\}$ является фреймом в $L^2(G)$. Если при этом системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\tilde{\varphi}(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными, то функции $\psi^{(\nu)}$, $\tilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, p - 1$, образуют биортогональный набор всплесков относительно пары $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$ и каждая из систем $\{\psi_{j,h}^{(\nu)}\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,h}^{(\nu)}\}$ является базисом Рисса в $L^2(G)$.

Замечание 2. Приведенные в примерах 1 и 2 графические иллюстрации даны для значений параметров, максимизирующих пиковое отношение сигнал–шум при сжатии изображений Lena и Bridge по методике, изложенной в [21] применительно к ортогональным двоичным всплескам.

Автор благодарит А.Ю. Максимова и С.А. Строганова за написание компьютерных программ и построение графиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
2. Schipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. New York: Adam Hilger, 1990.
3. Голубов Б.И. Элементы двоичного анализа. М.: МГУП, 2005.
4. Lang W.C. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 305–312.
5. Lang W.C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. P. 307–314.
6. Lang W.C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533–544.
7. Farkov Yu.A. Orthogonal p -wavelets on \mathbb{R}_+ // Wavelets and splines: Proc. Intern. Conf., July 3–8, 2003, St. Petersburg, Russia. St. Petersburg: St. Petersburg State Univ., 2005. P. 4–26.

8. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.
9. Протасов В.Ю., Фарков Ю.А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.
10. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.
11. Benedetto J.J., Benedetto R.L. A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geom. Anal. 2004. V. 14. P. 423–456.
12. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
13. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
14. Козырев С.В. Теория всплесков как p -адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
15. Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M. p -Adic refinable functions and MRA-based wavelets: E-print, 2007. arXiv: 0711.2820v1.
16. Farkov Yu.A. Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups // Facta Univ. Ser. Electron. and Energ. 2008. V. 21, N 3. P. 309–325.
17. Фарков Ю.А. Биортогональные диадические вейвлеты на \mathbb{R}_+ // УМН. 2007. Т. 62, № 6. С. 189–190.
18. Farkov Yu.A. On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory. 2008. doi:10.1016/j.jat.2008.10.003.
19. Soardi P.M. Biorthogonal M -channel compactly supported wavelets // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 283–311.
20. Bratteli O., Jorgensen P.E.T. Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups // Wavelet analysis and applications. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. P. 35–65. (AMS/IP Stud. Adv. Math.; V. 25).
21. Максимов А.Ю., Строганов С.А. О применении диадических вейвлетов для сжатия изображений // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимн. шк., посв. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С. 108–109.