УДК 517.58

Ю. А. Фарков

Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах

Дополняются и уточняются результаты У. Лэнга (1998) о вейвлет-анализе на канторовой диадической группе $\mathcal{C}$. Построение ведется на локально компактной абелевой группе G, определяемой по целому $p \geqslant 2$ и совпадающей при $p = 2$ с группой $\mathcal{C}$. Для любых целых $p, n \geqslant 2$ в пространстве $L^2(G)$ указывается функция φ, которая:

1) является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша;

2) имеет ортонормированную в $L^2(G)$ систему "целочисленных" сдвигов;

3) удовлетворяет "масштабирующему уравнению" с p^n числовыми коэффициентами;

4) имеет компактный носитель, мера Хаара которого пропорциональна p^n;

5) генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

По функциям φ определяются ортогональные вейвлеты ψ с компактными носителями на G. Семейство функций φ во многих отношениях аналогично хорошо известному семейству масштабирующих функций Добеши. Излагается метод оценки модулей гладкости функций φ, приводящий при малых значениях p и n к точным оценкам. Кроме того, показано, что предложенная недавно Бл. Сендовым концепция адаптивного кратномасштабного анализа применима в рассматриваемой ситуации.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

Кратномасштабный анализ в L^2-пространствах на локально компактных абелевых группах относится к числу фундаментальных понятий теории вейвлетов (см., например, [1], [2]) и определяется следующим образом.

Пусть G – локально компактная абелева группа и $L^2(G)$ – соответствующее пространство Лебега (см. [3]). Предположим, что H – дискретная подгруппа в G такая, что факторгруппа G/H компактна, и A – автоморфизм группы G такой, что $A(H)$ – собственная подгруппа в H. *Кратномасштабным анализом* в $L^2(G)$, ассоциированным с H и A, называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;

(iii) $f(\,\cdot\,) \in V_j \iff f(A\,\cdot\,) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;

(iv) $f(\,\cdot\,) \in V_0 \implies f(\,\cdot - h) \in V_0$ для $h \in H$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00386).

(v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot - h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция φ из условия (v) называется *масштабирующей функцией* в $L^2(G)$.

Из условий (iii) и (v) следует, что система $\{\varphi(A \cdot -h) \mid h \in H\}$ является ортогональным базисом в V_1. Поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, то имеет место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H} c(h)\varphi(Ax - h).$$

Функция ψ называется *ортогональным вейвлетом* в $L^2(G)$, если система функций $\{\psi(A^j \cdot -h) \mid j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ является ортогональным базисом в $L^2(G)$. Если факторгруппа $H/A(H)$ состоит из двух смежных классов (т.е. индекс подгруппы $A(H)$ в H равен двум), то по коэффициентам $\{c(h)\}$ находятся коэффициенты $\{d(h)\}$ такие, что формула

$$\psi(x) = \sum_{h\in H} d(h)\varphi(Ax - h)$$

задает ортогональный вейвлет в $L^2(G)$. Если же $\mathrm{card} H/A(H) = i > 2$, то по масштабирующей функции φ могут быть определены *вейвлеты* $\psi_1, \dots, \psi_{i-1}$ таким образом, что система функций

$$\{\psi_l(A^j \cdot -h) \mid 1 \leqslant l \leqslant i-1,\ j \in \mathbb{Z},\ h \in H\}$$

является ортогональным базисом в $L^2(G)$.

Классический вейвлет-анализ на прямой отвечает случаю $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$, $Ax = 2x$ для $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [1]). В случае $G = \mathbb{R}^d$ подгруппа H является решеткой в $\mathbb{R}^d$ и автоморфизм A может быть задан невырожденной матрицей размера $d \times d$ (см. [1, §10.3] и [4]–[6]). Для некоторых групп G, отличных от $\mathbb{R}^d$, кратномасштабные анализы изучались в [7]–[11]. В частности, в работах [7] и [8] определены групповые аналоги B-сплайновых вейвлет-базисов в $L^2(\mathbb{R})$. Структурные особенности локально компактных абелевых групп G, для которых существуют подгруппы H и автоморфизмы A с указанными выше свойствами ($A(H) \subset H$, $A(H) \neq H$, H дискретна и факторгруппа G/H компактна), приведены в [12].

В настоящей работе семейство масштабирующих функций построено на локально компактной группе G, определяемой по целому $p \geqslant 2$ и состоящей из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod p \quad \text{для} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leqslant l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Операция, обратная $\oplus$, обозначается $\ominus$ (так что $x \ominus x = \theta$, где θ – нулевая последовательность). Очевидно, каждая из окрестностей U_l является подгруппой в G, $U_{l+1} \subset U_l$ для $l \in \mathbb{Z}$ и $\bigcap U_l = \{\theta\}$.

Положим $U = U_0$. При $p = 2$ подгруппа U изоморфна *канторовой диадической группе*, т. е. топологическому прямому произведению счетного множества циклических групп второго порядка, рассматриваемых с дискретной топологией. Хорошо известно, что U, будучи совершенным нигде не плотным вполне несвязным метризуемым топологическим пространством, гомеоморфно канторову множеству (см. [13, с. 138]). Иногда (см., например, [10]) под канторовой группой понимают саму группу G при $p = 2$.

Элементы гармонического анализа на группе G и некоторые их приложения в задачах кодирования и обработки цифровой информации изложены, например, в [14] и [15]. О применениях канторовой группы в теории рядов Фурье см. в [16, гл. 14 и 15].

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, определяются по мере Хаара μ, заданной на борелевских множествах группы G и нормированной условием $\mu(U) = 1$ (см., например, [3]). Обозначим через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная G, обозначается G^* и состоит из последовательностей вида

$$\omega = (\omega_j) = (\dots, 0, 0, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots),$$

где $\omega_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $\omega_j = 0$ для $j < k = k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара μ^* вводятся для G^* так же, как и для G. Значение характера $\omega \in G^*$ на элементе $x \in G$ находится по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\biggl(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \omega_{1-j}\biggr),$$

а преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x) \overline{\chi(x, \omega)}\, d\mu(x).$$

Основные сведения о преобразовании Фурье на пространстве $L^2(G)$ см. в [3, гл. 8]. По формуле Планшереля

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}), \qquad f, g \in L^2(G).$$

Выделим в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0, j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \mathrm{Aut}G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Легко видеть, что факторгруппа $H/A(H)$ содержит p элементов, а аннулятор $H^\perp$ подгруппы H состоит из последовательностей $(\omega_j) \in G^*$, у которых $\omega_j = 0$ для $j > 0$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ положим

$$\begin{aligned} &\varphi_{j,h}(x) = p^{j/2} \varphi(A^j x \ominus h), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H, \\ &V_j = \mathrm{clos}_{L^2(G)} \mathrm{span}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Если система $\{\varphi(\,\cdot\, - h) \mid h \in H\}$ ортонормирована и заданное формулой (1.1) семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$, то φ является масштабирующей функцией. В этом случае при каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_j и по функции φ стандартным методом (см., например, [4], [8]) определяются вейвлеты $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,h}(x) = p^{j/2}\psi_l(A^j x \ominus h), \qquad 1 \leqslant l \leqslant p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$. При $p = 2$ получается один вейвлет ψ и система $\{2^{j/2}\psi(A^j \cdot \ominus h) \mid j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(G)$ (см. [10, § 3]).

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Отображение $\lambda\colon G \to \mathbb{R}_+$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G.$$

Отметим, что отображение λ переводит подгруппу U в отрезок $[0,1]$ и задает изоморфизм пространств с мерой (G,μ) и $(\mathbb{R}_+,\nu)$, где ν – мера Лебега на $\mathbb{R}_+$ (ср. с [16, с. 256]). Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{N}$ через $h_{[\alpha]}$ и $h^-_{[\alpha]}$ обозначим элементы из G такие, что

$$\lambda(h_{[\alpha]}) = \lambda(h^-_{[\alpha]}) = \alpha,$$

где все компоненты последовательности $h_{[\alpha]}$ (соответственно, $h^-_{[\alpha]}$), начиная с некоторого номера, равны нулю (соответственно, $p-1$). Положим также $h_{[\alpha]} = \theta$ для $\alpha = 0$ (так что $h_{[\alpha]} \in H$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$). Отображение $\lambda^*\colon G^* \to \mathbb{R}_+$, автоморфизм $B \in \mathrm{Aut}G^*$, подгруппа U^* в G^* и элементы $\omega_{[\alpha]}$, $\omega^-_{[\alpha]}$ из $H^\perp$ определяются аналогично λ, A, U, $h_{[\alpha]}$ и $h^-_{[\alpha]}$ соответственно. Отметим, что

$$\chi(Ax,\omega) = \chi(x, B\omega), \qquad x \in G, \quad \omega \in G^*.$$

Обобщенные функции Уолша $\{W_\alpha\}$ для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, \omega_{[\alpha]}), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in G$$

(иногда семейство функций $\{W_\alpha\}$ называют *системой Прайса*; см. [14, с. 30]). Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\int_U W_\alpha(x)\overline{W_\beta(x)}\,d\mu(x) = \delta_{\alpha,\beta} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы G^* определяется равенством

$$W^*_\alpha(\omega) = \chi(h_{[\alpha]}, \omega), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in G^*.$$

Система $\{W^*_\alpha\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$U_{n,s}^* = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*),$$

так что $\lambda^*(U_{n,s}^*) = [sp^{-n}, (s+1)p^{-n}]$. Множества $U_{n,s}^*$, $0 \leqslant s \leqslant p^n - 1$, являются смежными классами группы U^* по подгруппе $B^{-n}(U^*)$.

В настоящей работе для произвольных $p, n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, определены коэффициенты a_α такие, что функциональное уравнение

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) \tag{1.2}$$

имеет решение $\varphi \in L^2(G)$ со следующими свойствами:

1) система $\{\varphi(\,\cdot\, \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$;

2) $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$;

3) φ генерирует по формуле (1.1) кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

Например, при $n = 1$ все $a_\alpha = 1/p$ и решением уравнения (1.2) является функция Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_U$ (через $\mathbf{1}_E$ обозначается характеристическая функция множества $E \subset G$). В общем случае φ может быть задана разложением в обобщенный ряд Уолша, а коэффициенты a_α находятся из некоторой системы линейных алгебраических уравнений с помощью дискретного преобразования Виленкина–Крестенсона. Об аналогичной конструкции масштабирующих функций в L^2-пространстве на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ сообщалось автором в [17].

Для формулировки теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}_0(p,n)$ – множество всех натуральных чисел $m \geqslant p^{n-1}$, у которых в p-арном разложении

$$m = \sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j, \qquad \mu_j \in \{0,1,\dots,p-1\}, \quad \mu_k \neq 0, \quad k = k(m) \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.3}$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+n-1})$ отсутствуют наборы

$$(0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,0,2), \dots, (0,0,\dots,0,p-1).$$

Положим $\mathbb{N}(p,n) = \{1,2,\dots,p^{n-1}-1\} \bigcup \mathbb{N}_0(p,n)$. Имеем, в частности,

$$\mathbb{N}(2,2) = \{2^{j+1} - 1 \mid j \in \mathbb{Z}_+\} = \{1,3,7,15,31,\dots\},$$
$$\mathbb{N}(p,2) = \biggl\{ \sum_{j=0}^{k} m_j p^j \mid m_j \in \{1,2,\dots,p-1\},\ k \in \mathbb{Z}_+ \biggr\}, \qquad p \geqslant 3.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}(p,n)$, $1 \leqslant m \leqslant p^n - 1$, выберем (действительное или комплексное) число b_m такое, чтобы для всех $j \in \{1,2,\dots,p^{n-1}-1\}$ выполнялись условия

$$b_j \neq 0 \quad \text{и} \quad |b_j|^2 + |b_{p^{n-1}+j}|^2 + |b_{2p^{n-1}+j}|^2 + \dots + |b_{(p-1)p^{n-1}+j}|^2 = 1. \tag{1.4}$$

В частности, для $p = n = 2$ требуется только одно равенство: $|b_1|^2 + |b_3|^2 = 1$, а для $p = 3,\ n = 2$ имеем

$$|b_1|^2 + |b_4|^2 + |b_7|^2 = |b_2|^2 + |b_5|^2 + |b_8|^2 = 1.$$

Условия (1.4) будут использованы при доказательстве ортонормированности системы $\{\varphi(\,\cdot\,\ominus h) \mid h \in H\}$ в сформулированной ниже теореме (в связи с неравенством $b_j \neq 0$ см. замечание 1.1 и (3.4)).

Далее, для $m \in \mathbb{N}(p,n),\ 1 \leqslant m \leqslant p^n - 1$, положим

$$\gamma(i_1, i_2, \dots, i_n) = b_m, \quad \text{если} \quad m = i_1p^0 + i_2p^1 + \dots + i_np^{n-1}, \qquad i_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

После этого представим каждое $m \in \mathbb{N}(p,n)$ в виде p-арного разложения (1.3) и определим коэффициенты $\{c(m)\}$ с помощью равенств:

$$\begin{gathered}
c(m) = \gamma(\mu_0, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(m) = 0; \\
c(m) = \gamma(\mu_1, 0, 0, \dots, 0, 0)\gamma(\mu_0, \mu_1, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(m) = 1; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c(m) = \gamma(\mu_k, 0, 0, \dots, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, \dots, 0, 0)\dots\gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}),
\end{gathered}$$

если $k = k(m) \geqslant n - 1$. Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются "сдвигом" индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из p-арного разложения (1.3) числа m (так что, например, за множителем $\gamma(\mu_{k-l}, \mu_{k-l+1}, \dots, \mu_k, 0, 0, \dots, 0)$ следует $\gamma(\mu_{k-l-1}, \mu_{k-l}, \dots$ $\dots, \mu_{k-1}, \mu_k, 0, \dots, 0))$.

Для $s \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ положим

$$d_s^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0, \\ b_s, & \text{если } s = j + lp^{n-1},\ 1 \leqslant j \leqslant p^{n-1} - 1,\ 0 \leqslant l \leqslant p - 1, \\ 0, & \text{если } s = p^n - lp^{n-1},\ 1 \leqslant l \leqslant p - 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция φ задана разложением*

$$\varphi(x) = p^{1-n}\mathbf{1}_U(A^{1-n}x)\biggl(1 + \sum_{m \in \mathbb{N}(p,n)} c(m)W_m(A^{1-n}x)\biggr), \qquad x \in G, \tag{1.6}$$

а коэффициенты a_α определены формулами

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n}\sum_{s=0}^{p^n-1} d_s^{(n)} W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]}), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant p^n - 1. \tag{1.7}$$

Тогда:

(a) *функция φ удовлетворяет уравнению* (1.2);

(b) *система $\{\varphi(\,\cdot\,\ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$*;

(c) *заданное формулой* (1.1) *семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$*.

Замечание 1.1. Уравнение (1.2) в терминах преобразования Фурье записывается следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega)\,\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \tag{1.8}$$

где

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}.$$

Применяя дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона (см., например, [18]), получаем, что заданные формулами (1.7) коэффициенты a_α удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]})} = d_s^{(n)}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant p^n-1,$$

и обратно, из этой системы следуют формулы (1.7). Поскольку полином $m_0(\omega)$ постоянен на $U_{n,s}^*$, равенства (1.7) эквивалентны тому, что

$$m_0(\omega) = d_s^{(n)} \quad \text{для} \quad \omega \in U_{n,s}^*, \qquad 0 \leqslant s \leqslant p^n-1. \tag{1.9}$$

Так как $d_0^{(n)} = 1$, из соотношения (1.8) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega),$$

где для каждого $\omega \in G^*$ все множители, начиная с некоторого, равны 1. Отсюда видно, что $\widehat{\varphi}$ непрерывна на G^*. Учитывая, что

$$\bigcup_{s=0}^{p^{n-1}-1} U_{n,s}^* = B^{-1}(U^*),$$

из формул (1.4), (1.5) и (1.9) получаем

$$m_0(B^{-1}\omega) \neq 0, \qquad \omega \in U^*.$$

Кроме того, из соотношения (1.6) следует, что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$.

Замечание 1.2. Обобщенные функции Уолша $\{w_m\}$ на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ определяются равенствами

$$w_0(t) \equiv 1, \quad w_m(t) = \prod_{j=0}^{k} (r(p^j t))^{\mu_j}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где μ_j берутся из p-арного разложения (1.3) числа m, а r – функция, заданная на $[0,1)$ формулой

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1/p), \\ \exp(2\pi i l), & \text{если } t \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}),\ l = 1, 2, \dots, p-1, \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbb{R}_+$ так, что $r(t+1) = r(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Ряды по ортогональным системам $\{W_m\}$ и $\{w_m\}$ изучаются (см., например, [14] и [15]) параллельно, причем преобразование Фурье в пространстве $L^2(G)$ заменяется (при $p = 2$) преобразованием Уолша–Фурье или (при $p > 2$) соответствующим мультипликативным преобразованием в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [14, с. 127]). Поэтому наряду с масштабирующими функциями φ вида (1.6) естественно изучать их аналоги Φ на $\mathbb{R}_+$, определяемые формулой

$$\Phi(t) = p^{1-n}\mathbf{1}_{[0,1)}(p^{1-n}t)\biggl(1 + \sum_{m\in\mathbb{N}(p,n)} c(m)w_m(p^{1-n}t)\biggr), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{N}(p,n)$ и $c(m)$ – такие же, как в (1.6). Каждая такая функция Φ удовлетворяет уравнению вида

$$\Phi(t) = p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \Phi(pt \ominus_p \alpha), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

и генерирует кратномасштабный анализ в L^2-пространстве на $(\mathbb{R}_+, \oplus_p)$ (через $\oplus_p$ и $\ominus_p$ обозначены операции "сложения" и "вычитания" по модулю p, определяемые по p-арным разложениям чисел из $\mathbb{R}_+$; см. [14], [15]).

Замечание 1.3. Пользуясь равенством

$$\sum_{m=0}^{p^{n-1}-1} \chi(y,m) = \begin{cases} p^{n-1}, & \text{если } y \in U_{n-1}, \\ 0, & \text{если } y \in U \setminus U_{n-1}, \end{cases}$$

нетрудно проверить, что из (1.6) при $b_1 = b_2 = \cdots = b_{p^{n-1}-1} = 1$ получается функция $\varphi = \mathbf{1}_{U_{1-n}}$. Отсюда видно, что теорема верна и при $n = 1$ (случай Хаара), если положить $\mathbb{N}(p,1) = \varnothing$.

Пример 1.4. При $p = n = 2$ после подстановки $b_1 = a,\ b_3 = b$ формула (1.6) приводится к виду

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_U(A^{-1}x)\biggl(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x)\biggr), \qquad x \in G, \tag{1.10}$$

где $a \neq 0,\ |a|^2 + |b|^2 = 1$. Коэффициенты уравнения (1.2) в этом случае определяются равенствами

$$a_0 = \frac{1+a+b}{4}\,, \qquad a_1 = \frac{1+a-b}{4}\,, \qquad a_2 = \frac{1-a-b}{4}\,, \qquad a_3 = \frac{1-a+b}{4}\,.$$

Формула (1.10) была найдена Лэнгом (см. [10]).

Пример 1.5. Для $p=2,\ n=3$ согласно (1.4) имеем

$$|b_1|^2+|b_5|^2=|b_2|^2+|b_6|^2=|b_3|^2+|b_7|^2=1.$$

Полагая $b_1=a,\ b_2=b,\ b_3=c,\ b_5=\alpha,\ b_6=\beta,\ b_7=\gamma$, из (1.7) находим

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{8}(1+a+b+c+\alpha+\beta+\gamma),\\
a_1&=\frac{1}{8}(1+a+b+c-\alpha-\beta-\gamma),\\
a_2&=\frac{1}{8}(1+a-b-c+\alpha-\beta-\gamma),\\
a_3&=\frac{1}{8}(1+a-b-c-\alpha+\beta+\gamma),\\
a_4&=\frac{1}{8}(1-a+b-c-\alpha+\beta-\gamma),\\
a_5&=\frac{1}{8}(1-a+b-c+\alpha-\beta+\gamma),\\
a_6&=\frac{1}{8}(1-a-b+c-\alpha-\beta+\gamma),\\
a_7&=\frac{1}{8}(1-a-b+c+\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
&\gamma(1,0,0)=a, \quad \gamma(0,1,0)=b, \quad \gamma(1,1,0)=c,\\
&\gamma(1,0,1)=\alpha, \quad \gamma(0,1,1)=\beta, \quad \gamma(1,1,1)=\gamma
\end{aligned}$$

и

$$c(m)=\gamma(\mu_k,0,0)\gamma(\mu_{k-1},\mu_k,0)\dots\gamma(\mu_0,\mu_1,\mu_2),$$

где

$$m=\sum_{i=0}^{k}\mu_i 2^i, \qquad \mu_k\neq 0, \quad \mu_i\in\{0,1\}.$$

Учитывая, что

$$\mathbb{N}(2,3)=\{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,21,22,23,26,27,29,30,31,42,\dots\},$$

и полагая $y=A^{-2}x$, из (1.6) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=\frac{1}{4}\,\mathbf{1}_U(y)\biggl(1+\sum_{m\in\mathbb{N}(2,3)}c(m)W_m(y)\biggr)\\
&=\frac{1}{4}\,\mathbf{1}_U(y)\bigl(1+aW_1(y)+abW_2(y)+acW_3(y)+ab\alpha W_5(y)\\
&\quad+ac\beta W_6(y)+ac\gamma W_7(y)+ab^2\alpha W_{10}(y)+abc\alpha W_{11}(y)\\
&\quad+ac\alpha\beta W_{13}(y)+ac\beta\gamma W_{14}(y)+ac\gamma^2W_{15}(y)+ab^2\alpha^2W_{21}(y)\\
&\quad+abc\alpha\beta W_{22}(y)+ab\alpha\beta\gamma W_{23}(y)+abc\alpha\beta W_{26}(y)\\
&\quad+ac^2\alpha\beta W_{27}(y)+ac\alpha\beta\gamma W_{29}(y)+ac\beta\gamma^2W_{30}(y)+\dots\bigr).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Замечание 1.6. В работе [10] разложение (1.11) было найдено в следующих случаях:

1) $a = 1,\ b = 0,\ |c| < 1$ (соответственно, $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ |\gamma| < 1$);

2) $|a| < 1,\ b = 1,\ c = 0$ (соответственно, $|\alpha| < 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$).

Кроме этих двух случаев формула (1.6) была известна только при $p = n = 2$ (пример 1.4). Приведенные выше (и легко компьютеризуемые) правила вычисления коэффициентов a_α, $c(m)$ и элементов множества $\mathbb{N}(p, n)$ являются новыми. При вычислении коэффициентов a_α рекомендуется использовать формулу (1.7) и алгоритмы быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона [18, §4].

В §2 дано доказательство сформулированной выше теоремы, а в §3 показано, что предложенная в [19] конструкция адаптивного кратномасштабного анализа после соответствующей модификации может быть применена к решению задачи об "оптимальном" выборе параметров b_m для аппроксимации "сигнала" f его проекциями на подпространства в $L^2(G)$. В заключительном §4 обсуждается вопрос о гладкости построенных масштабирующих функций. Например, при $p = n = 2$ гладкость функции φ характеризуется последовательностью

$$\Omega_j(\varphi) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid x, y \in U_{-1},\ x \ominus y \in U_j\}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Установлено, в частности, что если φ задана формулой (1.10), то имеет место точная по порядку оценка $\Omega_j(\varphi) \leqslant C2^{-\mu j}$, где $\mu = \log_2(1/|b|)$ (ср. с [1, с. 319], [10, с. 541]).

§2. Доказательство теоремы

Пусть $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_l (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\{\omega \in H^* \mid \chi(x, \omega) = 1,\ x \in A(H)\} = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\}, \tag{2.1}$$

т. е. множество последовательностей $\{\delta_l\}$ является аннулятором подгруппы $A(H)$ в H.

Лемма 2.1. *Пусть полином*

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \tag{2.2}$$

удовлетворяет условиям:

(a) $m_0(\theta) = 1$;

(b) $m_0(B^{-1}\omega) \neq 0$ *для* $\omega \in U^*$;

(c) $\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-n}\omega_{[s]} \oplus \delta_l)|^2 = 1$ *для* $s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1}-1\}$.

Тогда функция g, *заданная равенством*

$$g(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega), \tag{2.3}$$

принадлежит классу $L^2(G^*)$. *Более того, если функция* φ *получена из* g *обратным преобразованием Фурье (так что* $\varphi \in L^2(G)$ *и* $\widehat{\varphi} = g$*), то система* $\{\varphi(\cdot \ominus h \mid h \in H\}$ *ортонормирована в* $L^2(G)$ *и* φ *генерирует по формуле* (1.1) *кратномасштабный анализ в* $L^2(G)$.

Доказательство. Пусть функция g определена равенством (2.3), где $m_0(\omega)$ имеет вид (2.2) и удовлетворяет условиям (a)–(c). Поскольку $m_0(\omega \oplus h^*) = m_0(\omega)$ для $h^* \in H^\perp$ и полином $m_0(\omega)$ постоянен на каждом из классов $U^*_{n,s}$, $s \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$, условие (c) эквивалентно тому, что

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \qquad \omega \in G^*. \tag{2.4}$$

Шаг 1. Установим, что

$$\int_{G^*} |g(\omega)|^2 \, d\mu^*(\omega) \leqslant 1. \tag{2.5}$$

Для произвольного натурального k положим

$$\mu^{[k]}(\omega) = \prod_{j=1}^{k} m_0(B^{-j}\omega) \mathbf{1}_{U^*}(B^{-k}\omega), \qquad \omega \in G^*.$$

Согласно условию (a) $m_0(\omega) = 1$ для $\omega \in U^*_{n,0}$. Поэтому из равенства (2.3) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \mu^{[k]}(\omega) = g(\omega), \qquad \omega \in G^*. \tag{2.6}$$

Учитывая, что $B^{-n}\omega \in U^*_{n,0}$ для $\omega \in U^*$, имеем

$$g(\omega) = \prod_{j=1}^{n-1} m_0(B^{-j}\omega), \qquad \omega \in U^*.$$

В силу условия (b) существует константа $c_1 > 0$ такая, что

$$|m_0(B^{-j}\omega)| \geqslant c_1, \qquad j \in \mathbb{N}, \quad \omega \in U^*,$$

и, значит, $c_1^{1-n}|g(\omega)| \geqslant \mathbf{1}_{U^*}(\omega)$ для $\omega \in G^*$. Отсюда получаем

$$|\mu^{[k]}(\omega)| = \prod_{j=1}^{k} |m_0(B^{-j}\omega)| \mathbf{1}_{U^*}(B^{-k}\omega) \leqslant c_1^{1-n} \prod_{j=1}^{k} |m_0(B^{-j}\omega)||g(B^{-k}\omega)|$$

и, учитывая (2.3), имеем

$$|\mu^{[k]}(\omega)| \leqslant c_1^{1-n}|g(\omega)|, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \omega \in G^*. \tag{2.7}$$

Пусть теперь

$$I_k(s) := \int_{G^*} |\mu^{[k]}(\omega)|^2 \, \overline{W^*_s(\omega)} \, d\mu^*(\omega), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

Полагая $\zeta = B^{-k}\omega$, находим

$$\begin{aligned} I_k(s) &= \int_{U^*_{k,0}} \prod_{j=1}^{k} |m_0(B^{-j}\omega)|^2 \overline{W^*_s(\omega)}\, d\mu^*(\omega) \\ &= p^k \int_{U^*} |m_0(\zeta)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(B^j\zeta)|^2 \overline{W^*_s(B^k\zeta)}\, d\mu^*(\zeta). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Поскольку $U^* = \bigcup_{l=0}^{p-1}\big(B^{-1}(U^*) \oplus \delta_l\big)$, где δ_l из (2.1), то

$$I_k(s) = p^{k-1} \int_{U^*} \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(B^{j-1}\omega)|^2 \overline{W^*_s(B^{k-1}\omega)}\, d\mu^*(\omega),$$

и в силу (2.4) имеем

$$I_k(s) = p^{k-1} \int_{U^*} \prod_{j=0}^{k-2} |m_0(B^j\omega)|^2 \overline{W^*_s(B^{k-1}\omega)}\, d\mu^*(\omega).$$

Отсюда и из соотношения (2.8) следует, что

$$I_k(s) = I_{k-1}(s).$$

Аналогично, при $k = 1$

$$I_1(s) = p \int_{U^*} |m_0(\omega)|^2\, \overline{W^*_s(B\omega)}\, d\mu^*(\omega) = \int_{U^*} \overline{W^*_s(\omega)}\, d\mu^*(\omega),$$

где последний интеграл равен $\delta_{0,s}$ в силу ортонормированности системы $\{W^*_\alpha\}$ в $L^2(U^*)$. Значит,

$$I_k(s) = \delta_{0,s}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.9}$$

В частности, для всех $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(0) = \int_{G^*} |\mu^{[k]}(\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) = 1.$$

В силу (2.6) отсюда по лемме Фату получаем (2.5).

Шаг 2. Определим функцию φ из $L^2(G)$ условием $\widehat{\varphi} = g$, где g задана по формуле (2.3). Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, из соотношений (2.6), (2.7) и (2.9) находим

$$\int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \overline{W^*_s(\omega)}\, d\mu^*(\omega) = \lim_{k\to\infty} I_k(s) = \delta_{0,s}.$$

Отсюда по формуле Планшереля следует, что система $\{\varphi(\,\cdot\, \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$.

Шаг 3. Заметим, что функция φ удовлетворяет уравнению (1.2), если коэффициенты a_α в этом уравнении выбраны, как у полинома (2.2). Действительно, из (2.3) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega)\,\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega). \tag{2.10}$$

Применив к обеим частям этого равенства обратное преобразование Фурье, получаем (1.2). Отсюда видно, что для семейства подпространств $\{V_j\}$, заданного по функции φ с помощью формулы (1.1), условие $V_j \subset V_{j+1}$ выполнено. Из доказанного на шаге 2 следует, что выполнено также и условие (v) приведенного выше определения кратномасштабного анализа, а условия (iii) и (iv) непосредственно следуют из (1.1).

Шаг 4. Докажем, что $\bigcap V_j = \{0\}$. Из условия (v) и равенства (1.1) следует, что при каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом пространства V_j. Поэтому ортогональный проектор $P_j \colon L^2(G) \to V_j$ действует по формуле

$$P_j f = \sum_{h\in H} (f, \varphi_{j,h})\varphi_{j,h}, \qquad f \in L^2(G). \tag{2.11}$$

Предположим, что $f \in \bigcap V_j$, и фиксируем $\varepsilon > 0$. Множество $C_0(G)$ непрерывных на G функций с компактным носителем плотно в $L^2(G)$ (см. [3, (12.10)]). Выберем $f_0 \in C_0(G)$ так, чтобы $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - P_j f_0\| \leqslant \|P_j(f - f_0)\| \leqslant \|f - f_0\| < \varepsilon$$

и, значит,

$$\|f\| \leqslant \|P_j f_0\| + \varepsilon \tag{2.12}$$

для каждого $j \in \mathbb{Z}$. Если $\operatorname{supp} f_0 \subset U_l$, то

$$(P_j f_0, \varphi_{j,h}) = (f_0, \varphi_{j,h}) = p^{j/2} \int_{U_l} f_0(x)\overline{\varphi(A^j x \ominus h)}\, d\mu(x),$$

где число l зависит от f_0. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, отсюда получаем

$$\|P_j f_0\|^2 = \sum_{h\in H} |(P_j f_0, \varphi_{j,h})|^2 \leqslant \|f_0\|^2 \sum_{h\in H} p^j \int_{U_l} |\varphi(A^j x \ominus h)|^2\, d\mu(x).$$

Для $j < l$ имеем

$$\sum_{h\in H} p^j \int_{U_l} |\varphi(A^j x \ominus h)|^2\, d\mu(x) = \int_{S_{l,j}} |\varphi(x)|^2\, d\mu(x),$$

где

$$S_{l,j} := \bigcup_{h\in H} \{y \ominus h \mid y \in U_{l-j}\}.$$

Следовательно,

$$\|P_j f_0\|^2 \leqslant \|f_0\|^2 \int_G \mathbf{1}_{S_{l,j}}(x)|\varphi(x)|^2\, d\mu(x). \tag{2.13}$$

Легко видеть, что $\lim_{j\to-\infty}\mathbf{1}_{S_{l,j}}(x) = 0$ для всех $x \notin H$. По теореме Лебега из (2.13) получаем, что

$$\lim_{j\to-\infty}\|P_j u\| = 0.$$

Учитывая (2.12), заключаем, что $\|f\| \leqslant \varepsilon$, и поэтому $\bigcap V_j = \{0\}$.

Шаг 5. Покажем, что

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(G). \tag{2.14}$$

Пусть $f \in (\bigcup V_j)^\perp$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $u \in L^2(G)$ так, чтобы $\widehat{u} \in C_0(G^*)$ и $\|\widehat{f} - \widehat{u}\| < \varepsilon$. Для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ согласно (2.11) имеем

$$\|P_j f\|^2 = (P_j f, P_j f) = (f, P_j f) = 0$$

и, значит,

$$\|P_j u\| = \|P_j(f-u)\| \leqslant \|f-u\| = \|\widehat{f} - \widehat{u}\| < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Фиксируем номер $j \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\operatorname{supp}\widehat{u} \subset U^*_{-j}$ и $B^{-j}\omega \in U^*_{n-1}$ для всех $\omega \in \operatorname{supp}\widehat{u}$. Пользуясь тем, что система $\{p^{-j/2}W^*_\alpha(B^{-j}\,\cdot)\}$ ортонормирована и полна в $L^2(U^*_{-j})$, для функции $\Gamma(\omega) = \widehat{u}(\omega)\,\widehat{\varphi}(B^{-j}\omega)$ имеем

$$p^{-j}\int_{U^*_{-j}} |\Gamma(\omega)|^2\,d\mu^*(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} |c_\alpha(\Gamma)|^2, \tag{2.16}$$

где

$$c_\alpha(\Gamma) = p^{-j/2}\int_{U^*_{-j}} \Gamma(\omega)\overline{W^*_\alpha(B^{-j}\omega)}\,d\mu^*(\omega).$$

Замечая, что

$$\int_G \varphi(A^j x \ominus h_{[\alpha]})\overline{\chi(x,\omega)}\,d\mu(x) = p^{-j}\widehat{\varphi}(B^{-j}\omega)\overline{W^*_\alpha(B^{-j}\omega)},$$

получаем

$$p^{-j/2}(u, \varphi_{j,h}) = p^{-j}\int_{U^*_{-j}} \Gamma(\omega)\overline{W^*_\alpha(B^{-j}\omega)}\,d\mu^*(\omega).$$

Отсюда и из равенства (2.16) находим

$$\|P_j u\|^2 = \sum_{h\in H} |(u, \varphi_{j,h})|^2 = \int_{U^*_{-j}} |\widehat{u}(\omega)|^2 |\widehat{\varphi}(B^{-j}\omega)|^2\,d\mu^*(\omega). \tag{2.17}$$

По условию, $m_0(\omega) = 1$ на $U^*_{n,0}$, а число j выбрано так, что $B^{-j}\omega \in U^*_{n+1}$ для $\omega \in \operatorname{supp}\widehat{u}$. Отсюда и из (2.3) (напомним, что $\widehat{\varphi} = g$) видно, что $\widehat{\varphi}(B^{-j}\omega) = 1$ для всех $\omega \in \operatorname{supp}\widehat{u}$. Учитывая, что $\operatorname{supp}\widehat{u} \subset U^*_{-j}$, из соотношений (2.15) и (2.17) получаем

$$\varepsilon > \|P_j u\| = \|\widehat{u}\| = \|u\|.$$

Следовательно, $\|f\| < \varepsilon + \|u\| < 2\varepsilon$. Таким образом, $(\bigcup V_j)^\perp = \{0\}$, и поэтому верно (2.14). Лемма доказана

Замечание 2.2. В связи с условием (b) леммы 2.1 отметим, что, вообще говоря, существуют точки $\omega \in U^*$, для которых $m_0(\omega) = 0$ (см. примеры 1.4, 1.5 и предложение 3.3).

Доказательство теоремы. Положим $X_{n-1} = \mathbf{1}_{U^*_{n-1}}$. Для любых $x \in G$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_G X_{n-1}(\omega \ominus B^{1-n}\omega_{[m]})\chi(x,\omega)\,d\mu^*(\omega) = \chi(x, B^{1-n}\omega_{[m]}) \int_{U_{n-1}} \chi(x,\omega)\,d\mu^*(\omega)$$
$$= p^{1-n}\mathbf{1}_U(A^{1-n}x)\chi(A^{1-n}x, \omega_{[m]}) = p^{1-n}\mathbf{1}_U(A^{1-n}x)W_m(A^{1-n}x).$$

Отсюда и из (1.6), применяя преобразование Фурье, получим

$$\widehat{\varphi}(\omega) = X_{n-1}(\omega) + \sum_{m \in \mathbb{N}(p,n)} c(m) X_{n-1}(\omega \ominus B^{1-n}\omega_{[m]}).$$

Следовательно, для $m \in \mathbb{N}(p,n)$

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in U^*_{n-1}, \\ c(m), & \text{если } \omega \in U^*_{n-1,m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.18}$$

Предположим теперь, что коэффициенты a_α заданы формулой (1.7). Согласно (1.9) полином

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)}$$

удовлетворяет условиям

$$m_0(B^{-n}(\omega_{[s]})) = d_s^{(n)}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant p^n - 1.$$

Отсюда и из (2.18), учитывая определение коэффициентов $c(m)$, имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega)$$

и, значит,

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega)\,\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega).$$

Отсюда следует утверждение (a). Пользуясь леммой 2.1, заключаем, что верны также утверждения (b) и (c). Теорема доказана.

§ 3. Об условиях ортонормированности в $L^2(G)$ и оптимизации параметров

Следующее утверждение может быть выведено из обобщенной формулы суммирования Пуассона (см., например, [2, с. 377]) и приводится здесь с элементарным доказательством для полноты изложения.

Предложение 3.1. *Пусть* $\varphi \in L^2(G)$. *Система* $\{\varphi(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$ *ортонормирована в* $L^2(G)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{h^*\in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 = 1 \qquad \text{для п. в.} \quad \omega \in G^*. \tag{3.1}$$

Доказательство. Функция

$$\Phi(\omega) = \sum_{h^*\in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2$$

является $H^\perp$-периодической: $\Phi(\omega \oplus h^*) = \Phi(\omega)$ для всех $h^* \in H^\perp$. Кроме того, она имеет конечную L^1-норму на U^*, так как

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_{U^*} \Phi(\omega)\,d\mu^*(\omega) &= \int_{U^*} \sum_{h^*\in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2\,d\mu^*(\omega)\\ &= \sum_{h^*\in H^\perp} \int_{U^*\oplus h^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\,d\mu^*(\omega) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\,d\mu^*(\omega) < +\infty.\end{aligned}$$

Обозначим через $\{\widehat{\Phi}(h)\}$ коэффициенты Фурье функции Φ по системе $\{\chi(h,\,\cdot\,)\}$. Для любого $h \in H$ с помощью подстановки $\eta = \omega \ominus h^*$ имеем

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(h) &= \int_{U^*} \Phi(\omega)\overline{\chi(h,\omega)}\,d\mu^*(\omega) = \int_{U^*} \overline{\chi(h,\omega)} \sum_{h^*\in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2\,d\mu^*(\omega)\\ &= \sum_{h^*\in H^\perp} \int_{U^*\oplus h^*} \overline{\chi(h,\eta)}|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\mu^*(\eta) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\overline{\chi(h,\omega)}\,d\mu^*(\omega).\end{aligned}$$

Применив равенство Планшереля, отсюда получаем

$$\int_G \varphi(x \ominus h)\overline{\varphi(x)}\,d\mu(x) = \widehat{\Phi}(h), \qquad h \in H.$$

Остается отметить, что условие (3.1) равносильно тому, что $\widehat{\Phi}(h) = \delta_{\theta,\,h}$ для $h \in H$. Предложение доказано.

Предложение 3.2. *Если функция* $\varphi \in L^2(G)$ *удовлетворяет уравнению* (1.2) *и система* $\{\varphi(\,\cdot\,\ominus h) \mid h \in H\}$ *ортонормирована в* $L^2(G)$, *то*

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \textit{для всех} \quad \omega \in G^*, \tag{3.2}$$

где

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}.$$

Доказательство. Для $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ положим

$$H_l^\perp = \{h^* \in H^\perp \mid B^{-1}h^* \ominus \delta_l \in H^\perp\}$$

(отметим, что $h_0^* = l$ для $h^* = (h_j^*) \in H_l^\perp$). Поскольку $\widehat{\varphi}$ непрерывна на G^* (см. замечание 1.1), из (3.1) для любого $\omega \in G^*$ получаем

$$\sum_{h^* \in H_l^\perp} |\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega \oplus B^{-1}h^*)|^2 = 1, \qquad l \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Отсюда и из формулы (1.8) следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{h^* \in H^\perp} \bigl|m_0\bigl(B^{-1}(\omega \oplus h^*)\bigr)\bigr|^2 \bigl|\widehat{\varphi}\bigl(B^{-1}(\omega \oplus h^*)\bigr)\bigr|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2 \sum_{h^* \in H_l^\perp} |\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega \oplus B^{-1}h^*)|^2 = \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2. \end{aligned}$$

Поэтому верно соотношение (3.2). Предложение доказано.

Множество E, расположенное в G^*, называется *конгруэнтным* U^* *по модулю* $H^\perp$, если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$. Имеет место (см. [20]) следующий аналог известной теоремы Коэна.

Предложение 3.3. *Пусть* m_0 *– полином вида*

$$m_0(\omega) = \sum_{h \in H} a(h) \overline{\chi(h, \omega)},$$

где $a(\,\cdot\,)$ *– финитная на* H *функция. Следующие два утверждения эквивалентны*:

1) *полином* m_0 *удовлетворяет условиям*

$$m_0(\theta) = 1, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \qquad \omega \in G^*, \tag{3.3}$$

и существует компактное множество E, конгруэнтное U^* по модулю $H^{\perp}$, содержащее окрестность нулевого элемента и такое, что

$$\inf_{j\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in E}|m_0(B^{-j}\omega)|>0; \tag{3.4}$$

2) *существует функция $\varphi\in L^2(G)$, преобразование Фурье которой имеет вид*

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(B^{-j}\omega)$$

и для которой система $\{\varphi(\,\cdot\ominus h)\mid h\in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$.

Отметим, что в силу компактности множества E существует номер j_0 такой, что $m_0(B^{-j}\omega)=1$ для всех $j>j_0$, $\omega\in E$. Поэтому (3.4) верно, если полином $m_0(\omega)$ не обращается в нуль на множествах $B^{-1}(E),\dots,B^{-j_0}(E)$.

Замечание 3.4. Если φ удовлетворяет условиям предложения 3.3, то заданное формулой (1.1) семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$ (ср. с [1, с. 248]).

Пусть функция φ задана разложением (1.6), а коэффициенты a_α найдены по формуле (1.7) (согласно замечанию 1.1 тогда (3.4) выполнено для $E=U^*$). Как и выше, для каждого $j\in\mathbb{Z}$ через P_j обозначается ортогональный проектор пространства $L^2(G)$ на подпространство

$$V_j=\operatorname{clos}_{L^2(G)}\operatorname{span}\{\varphi_{j,h}\mid h\in H\}.$$

Для данной функции f из $L^2(G)$ естественно выбрать параметры b_m в (1.4) так, чтобы аппроксимации $f\approx P_jf$ были оптимальны. Если известно, что f принадлежит некоторому классу $\mathcal{M}$ в $L^2(G)$, то методами теории приближений (см., например, [14, гл. 10] и [21, гл. 2]) можно искать параметры b_m, минимизирующие для некоторого фиксированного значения j величину

$$\sup\{\|f-P_jf\|\mid f\in\mathcal{M}\},$$

а также изучать поведение этой величины при $j\to+\infty$. По аналогии с недавно опубликованной работой [19] обсудим здесь иной подход к проблеме оптимизации аппроксимаций $f\approx P_jf$ данной функции f.

Для каждого $j\in\mathbb{Z}$ обозначим через W_j ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} и через Q_j ортогональный проектор пространства $L^2(G)$ на W_j. Поскольку $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом, то для любой $f\in L^2(G)$

$$f=\sum_j Q_jf=P_0f+\sum_{j\geqslant0}Q_jf$$

и

$$\lim_{j\to+\infty}\|f-P_jf\|=0,\qquad\lim_{j\to-\infty}\|P_jf\|=0.$$

Легко видеть также, что

$$P_j f = Q_{j-1} f + Q_{j-2} f + \cdots + Q_{j-s} f + P_{j-s} f, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Равенство $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ показывает, что W_{j-1} содержит "детали", необходимые для перехода от $(j-1)$-го уровня аппроксимации к более точному j-му уровню. Так как $\|P_j f\|^2 = \|P_{j-1} f\|^2 + \|Q_{j-1} f\|^2$, то параметры b_m естественно выбирать так, чтобы норма $\|P_{j-1} f\|$ была максимальной (и, соответственно, норма $\|Q_{j-1} f\|$ была минимальной).

Запишем равенство (1.2) в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{p} \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \widetilde{a}_\alpha \varphi\big(Ax \ominus h_{[\alpha]}\big),$$

где

$$\widetilde{a}_\alpha = \sqrt{p}\, a_\alpha = \sqrt{p}\, \big(\varphi(\,\cdot\,), \varphi\big(A \cdot \ominus h_{[\alpha]}\big)\big).$$

Положим $\varphi_j(x) = p^{j/2} \varphi(A^j x)$. Тогда

$$\varphi_{j-1}(x) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \widetilde{a}_\alpha \varphi_j\big(x \ominus A^{-j} h_{[\alpha]}\big) \tag{3.5}$$

и

$$\varphi_j(x \ominus A^{-j} h) = \varphi_{j,h}(x) = p^{j/2} \varphi_j(A^j x \ominus h), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Для данной $f \in L^2(G)$ положим

$$f(j,h) := (f, \varphi_{j,h}) = \int_G f(x) \overline{\varphi_j(x \ominus A^{-j} h)}\, d\mu(x), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Пользуясь соотношениями (3.5), получаем

$$\begin{aligned} f(j-1,h) &= \int_G f(x) \overline{\varphi_{j-1}(x \ominus A^{-j+1} h)}\, d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \overline{\widetilde{a}}_\alpha \int_G f(x) \overline{\varphi_j\big(x \ominus A^{-j}\big(Ah \oplus h_{[\alpha]}\big)\big)}\, d\mu(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f(j-1,h) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \overline{\widetilde{a}}_\alpha f\big(j, Ah \oplus h_{[\alpha]}\big). \tag{3.6}$$

Поскольку

$$P_j f = \sum_{h \in H} f(j,h) \varphi_{j,h}, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

то согласно (3.6) имеем

$$
\begin{aligned}
\|P_{j-1}f\|^2 &= \sum_{h\in H}|f(j-1,h)|^2 = \sum_{h\in H}\left|\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}\overline{\widetilde{a}}_\alpha f\bigl(j,Ah\oplus h_{[\alpha]}\bigr)\right|^2 \\
&= \sum_{h\in H}\left(\sum_{\alpha,\beta=0}^{p^n-1}\overline{\widetilde{a}}_\alpha\widetilde{a}_\beta f\bigl(j,Ah\oplus h_{[\alpha]}\bigr)\overline{f\bigl(j,Ah\oplus h_{[\beta]}\bigr)}\right). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Для $0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant p^n-1$ положим

$$F_{\alpha,\beta}(j):=\sum_{h\in H}f\bigl(j,Ah\oplus h_{[\alpha]}\bigr)\overline{f\bigl(j,Ah\oplus h_{[\beta]}\bigr)}.$$

Тогда $F_{\beta,\alpha}(j)=\overline{F_{\alpha,\beta}(j)}$ и из (3.7) имеем

$$\|P_{j-1}f\|^2=\sum_{\alpha,\beta=0}^{p^n-1}F_{\alpha,\beta}(j)\overline{\widetilde{a}}_\alpha\widetilde{a}_\beta. \qquad (3.8)$$

Обозначим через $\mathcal{U}(p,n)$ множество векторов $u=(u_0,u_1,\dots,u_{p^n-1})$ таких, что

$$u_0=1,\quad u_j=0,\qquad j\in\{p^{n-1},2p^{n-1},\dots,(p-1)p^{n-1}\},$$

и

$$u_j\neq0,\quad \sum_{l=0}^{p-1}|u_{lp^{n-1}+j}|^2=1,\qquad j\in\{1,2,\dots,p^{n-1}-1\}.$$

Для каждого $u=(u_0,u_1,\dots,u_{p^n-1})$ из $\mathcal{U}(p,n)$ коэффициенты $a_\alpha(u)$ определим из системы

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}a_\alpha(u)\overline{W_\alpha^*\bigl(B^{-n}\omega_{[s]}\bigr)}=u_s,\qquad 0\leqslant s\leqslant p^n-1.$$

Пусть j_0 – фиксированное натуральное число. Если вектор u^* является решением экстремальной задачи

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{p^n-1}F_{\alpha,\beta}(j_0)\overline{a_\alpha(u)}a_\beta(u)\to\max,\qquad u\in\mathcal{U}(p,n), \qquad (3.9)$$

то функция $\varphi^*_{j_0-1}$ определяется по формуле

$$\varphi^*_{j_0-1}(x)=\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}a_\alpha(u^*)\varphi_{j_0}\bigl(x\ominus A^{-j_0}h_{[\alpha]}\bigr).$$

Из (3.8) и (3.9) видно, что $\|P_j^*f\|\geqslant\|P_jf\|$ для $j=j_0-1$. Аналогично по $\varphi^*_{j_0-1}$ конструируется $\varphi^*_{j_0-2}$ и т. д. После этого для $j\in\{j_0-1,\dots,j_0-s\}$ (число s фиксировано) ортогональные проекции P_jf заменяются ортогональными проекциями P_j^*f функции f на подпространства V_j^*, заданные равенствами

$$V_j^*=\operatorname{clos}_{L^2(G)}\operatorname{span}\{\varphi_j^*(\,\cdot\,-A^{-j}h)\mid h\in H\}.$$

Эффективность этого метода адаптации может быть продемонстрирована на числовых примерах с помощью энтропийного критерия (аналогичные примеры для кратномасштабного анализа Добеши и вейвлет-пакетов приведены в [19] и [22]).

§ 4. О гладкости масштабирующих функций

Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(G)$, определенная по формуле (1.6) (так что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$). Напомним, что для $l \in \mathbb{Z}$

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leqslant l\} \quad \text{и} \quad U_l \supset U_{l+1}.$$

Модулем непрерывности произвольной непрерывной на U_{1-n} комплекснозначной функции f назовем последовательность $\{\Omega_j(f)\}$, заданную равенством

$$\Omega_j(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in U_{1-n},\ x \ominus y \in U_j\}$$

для целых $j \geqslant 1 - n$. Для любой невозрастающей и сходящейся к нулю числовой последовательности

$$\varepsilon_{1-n} \geqslant \varepsilon_{2-n} \geqslant \varepsilon_{3-n} \geqslant \dots, \qquad \lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0,$$

существует (см. [23]) функция $f \in C(U_{1-n})$ такая, что $\Omega_j(f) = \varepsilon_j$ для всех $j \geqslant 1 - n$. Ограничиваясь для краткости случаем $p = 2$, покажем, как применить предложенный в [24] метод оценки гладкости масштабирующих функций к оценке модуля непрерывности функции φ. Коэффициенты a_α будем предполагать вещественными, хотя все последующие рассуждения легко распространяются на комплексный случай.

Итак, пусть $p = 2$ и $c_\alpha = 2a_\alpha$ для $\alpha \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, где a_α вещественны и определены по формуле (1.7). Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{2^n-1} c_\alpha \varphi\bigl(Ax \ominus h_{[\alpha]}\bigr), \qquad x \in G, \tag{4.1}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{2^n-1} c_\alpha = 2, \qquad \sum_{\alpha=0}^{2^{n-1}-1} c_{2\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{2^{n-1}-1} c_{2\alpha+1} = 1. \tag{4.2}$$

Положим $N = 2^{n-1}$. Из формулы (1.6) и легко проверяемых равенств

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} W_m\bigl(A^{1-n}h_{[\alpha]}\bigr) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} W_m\bigl(A^{1-n}h^-_{[\alpha+1]}\bigr) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}(2, n),$$

следует, что

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi\bigl(h_{[\alpha]}\bigr) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi\bigl(h^-_{[\alpha+1]}\bigr) = 1. \tag{4.3}$$

Для $i, j, k \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$ равенство $k = i \oplus_2 j$ по определению означает, что

$$k_s = i_s + j_s \pmod 2, \qquad s \in \{0, 1, \dots, 2N - 1\},$$

где $i_s,\ j_s,\ k_s$ – цифры двоичных разложений

$$i = \sum_{s=0}^{2N-1} i_s 2^s, \qquad j = \sum_{s=0}^{2N-1} j_s 2^s, \qquad k = \sum_{s=0}^{2N-1} k_s 2^s.$$

Зададим $(N \times N)$-матрицы T_0 и T_1 формулами

$$(T_0)_{i,j} = c_{2(i-1)\oplus_2(j-1)}, \qquad (T_1)_{i,j} = c_{(2i-1)\oplus_2(j-1)}, \tag{4.4}$$

где $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. В частности, для $n = 2$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix},$$

а для $n = 3$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_6 & c_7 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_7 & c_6 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ – N-мерный вектор, все компоненты которого равны 1. Согласно (4.2) имеем

$$e_1 T_0 = e_1 T_1 = e_1. \tag{4.5}$$

Для любых двух N-мерных векторов $v = (v_1, \ldots, v_N)$ и $w = (w_1, \ldots, w_N)$ полагаем

$$v \cdot w^{\mathrm{T}} := \sum_{j=1}^{N} v_j w_j, \qquad \|v\| := \sqrt{v \cdot v^{\mathrm{T}}}\,,$$

где v^{T} и w^{T} – векторы-столбцы, получаемые из векторов-строк v и w транспонированием.

Обозначим через E_1 подпространство в $\mathbb{R}^N$, ортогональное вектору e_1:

$$E_1 := \{u = (u_1, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}} \mid e_1 \cdot u = 0\}.$$

Для произвольной вещественной $(N \times N)$-матрицы M положим

$$\|M\| := \sup\{\|Mu\|/\|u\| \mid u \in \mathbb{R}^N,\ u \neq 0\},$$
$$\|M|_{E_1}\| := \sup\{\|Mu\|/\|u\| \mid u \in E_1,\ u \neq 0\}.$$

Хорошо известно, что значение $\|M\|$ совпадает с квадратным корнем из наибольшего собственного значения матрицы $M^{\mathrm{T}} M$.

Имеет место следующий аналог теоремы 2.2 работы [24].

Предложение 4.1. *Пусть функция φ задана формулой* (1.6) *и коэффициенты a_α определены равенством* (1.7) *при $p = 2$. Предположим, что элементы $(N \times N)$-матриц T_0, T_1 имеют вид* (4.4), *где $N = 2^{n-1}$ и $c_\alpha = 2a_\alpha$. Если для всех $m \in \mathbb{N}$*

$$\max\bigl\{\|T_{d_1} T_{d_2} \ldots T_{d_m}|_{E_1}\| \mid d_j \in \{0, 1\},\ 1 \leqslant j \leqslant m\bigr\} \leqslant C q^m, \tag{4.6}$$

где $0 < q < 1$ и $C > 0$, то φ непрерывна на U_{1-n} и для любого целого $j \geqslant n - 1$ справедливо неравенство

$$\Omega_j(\varphi) \leqslant C q^j. \tag{4.7}$$

Доказательство. Для любых $x \in U$ и $\alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ положим

$$\varphi_0\bigl(x \oplus h_{[\alpha]}\bigr) := \bigl(1 - \lambda(x)\bigr)\,\varphi\bigl(h_{[\alpha]}\bigr) + \lambda(x)\,\varphi\bigl(h^-_{[\alpha+1]}\bigr). \tag{4.8}$$

По подгруппе $A^{-1}(U)$ группа U имеет два смежных класса:

$$U_{1,0} := A^{-1}(U), \qquad U_{1,1} := A^{-1}\bigl(h_{[1]}\bigr) \oplus A^{-1}(U).$$

Последовательность вектор-функций $v_j(x)$ для $j \in \mathbb{Z}_+,\ x \in U$ определим равенствами

$$v_0(x) := \bigl(\varphi_0(x), \varphi_0(x \oplus h_{[1]}), \dots, \varphi_0(x \oplus h_{[N-1]})\bigr)^{\mathrm{T}},$$
$$v_{j+1}(x) := \begin{cases} T_0 v_j(Ax), & \text{если} \quad x \in U_{1,0}, \\ T_1 v_j(Ax \ominus h_{[1]}), & \text{если} \quad x \in U_{1,1}. \end{cases}$$

Для каждого $x = (x_j)$ из U положим $d_j(x) = x_j$, и пусть

$$\tau(x) := \begin{cases} Ax, & \text{если} \quad x \in U_{1,0}, \\ Ax \ominus h_{[1]}, & \text{если} \quad x \in U_{1,1}. \end{cases}$$

Тогда

$$v_{j+1}(x) = T_{d_1(x)} v_j(\tau x)$$

и, следовательно,

$$v_j(x) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} v_0(\tau^j x). \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.3) и (4.8) находим

$$e_1 \cdot v_0(x) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi_0\bigl(x \oplus h_{[\alpha]}\bigr)$$
$$= \bigl(1 - \lambda(x)\bigr) \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi\bigl(h_{[\alpha]}\bigr) + \lambda(x) \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi\bigl(h^-_{[\alpha+1]}\bigr) = 1.$$

Отсюда и из соотношений (4.6), (4.9) получаем

$$e_1 \cdot v_j(x) = e_1 T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} v_0(\tau^j x) = e_1 \cdot v_0(\tau^j x) = 1.$$

Следовательно, для каждого $l \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$e_1 \cdot \bigl(v_{j+l}(x) - v_l(x)\bigr) = 0.$$

Таким образом, для всех $x \in U$ и всех $j, l \in \mathbb{Z}_+$

$$e_1 \cdot v_j(x) = 1, \qquad v_{j+l}(x) - v_l(x) \in E_1, \tag{4.10}$$

и согласно (4.9) имеем

$$v_{j+l}(x) - v_j(x) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} [v_l(\tau^j x) - v_0(\tau^j x)]. \tag{4.11}$$

При $l = 1$ из соотношений (4.6), (4.10) и (4.11) получаем

$$\|v_{j+1}(x) - v_j(x)\| \leqslant Cq^j \sup_{y\in U} \|v_1(y) - v_0(y)\|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|v_j(x)\| &\leqslant \|v_0(x)\| + \sum_{l=1}^{j} \|v_l(x) - v_{l-1}(x)\| \\ &\leqslant \sup_{y\in U} \|v_0(y)\| + C(1-q)^{-1} \sup_{y\in U} \|v_1(y) - v_0(y)\|.\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{v_j(\,\cdot\,)\}$ равномерно ограничена на U:

$$\sup\{\|v_j(x)\| \mid x \in U,\ j \in \mathbb{Z}_+\} < \infty. \tag{4.12}$$

Как и выше, для любых $x \in U$ и $l \in \mathbb{N}$ в силу (4.6), (4.10) и (4.11) имеем

$$\|v_{j+l}(x) - v_j(x)\| \leqslant Cq^j \sup_{y\in U} \|v_l(y) - v_0(y)\|.$$

Отсюда и из (4.12) следует неравенство

$$\sup_{x\in U} \|v_{j+l}(x) - v_j(x)\| \leqslant Cq^j, \tag{4.13}$$

где C не зависит от l. Значит, последовательность $\{v_j(\,\cdot\,)\}$ является фундаментальной в пространстве $[C(U)]^N = C(U) \times \cdots \times C(U)$.

Предельная вектор-функция $\widetilde{v}(\,\cdot\,)$ последовательности $\{v_j(\,\cdot\,)\}$ непрерывна на U, и в силу (4.13) имеем

$$\sup_{x\in U} \|\widetilde{v}(x) - v_j(x)\| \leqslant Cq^j. \tag{4.14}$$

Пусть

$$v(x) := \bigl(\varphi(x), \varphi\bigl(x \oplus h_{[1]}\bigr), \dots, \varphi\bigl(x \oplus h_{[N-1]}\bigr)\bigr)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда для $x \in U$

$$v(x) = T_{d_1(x)} v(\tau x),$$

и, полагая $j \to \infty$ в равенстве $v_{j+1}(x) = T_{d_1(x)} v_j(\tau x)$, заключаем, что $\widetilde{v}(x) = v(x)$. Отсюда и из (4.14) для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\sup_{x\in U_{1-n}} \|\varphi(x) - \varphi_j(x)\| \leqslant Cq^j. \tag{4.15}$$

Фиксируем целое $j \geqslant n$ и выберем в U_{1-n} элементы

$$\begin{aligned} x &= (\dots, 0, 0, x_{2-n}, x_{3-n}, \dots, x_0, x_1, \dots), \\ y &= (\dots, 0, 0, y_{2-n}, y_{3-n}, \dots, y_0, y_1, \dots) \end{aligned}$$

так, чтобы $y \ominus x \in U_j \setminus U_{j+1}$. Тогда $x_i = y_i$ для $2-n \leqslant i \leqslant j$ и $x_{j+1} \neq y_{j+1}$. Следовательно, оба элемента x и y принадлежат классу $A^{-j}\big(h_{[m]} \oplus U\big)$, где

$$m = \sum_{i=2-n}^{j} x_i 2^{j-i} = \sum_{i=2-n}^{j} y_i 2^{j-i}.$$

Согласно (4.15) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(x)-\varphi(y)| &\leqslant |\varphi(x)-\varphi_j(x)| + \big|\varphi_j(x)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big| \\ &\quad + \big|\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)-\varphi_j(y)\big| + |\varphi_j(y)-\varphi(y)| \\ &\leqslant 2Cq^j + \big|\varphi_j(x)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big| + \big|\varphi_j(y)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big|. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Предположим, что $x \in U$, т.е. $x_0 = x_{-1} = \dots = x_{2-n} = 0$. Тогда

$$m = x_1 2^{j-1} + x_2 2^{j-2} + \dots + x_j 2^0$$

и, аналогично (4.11),

$$v_j(x) - v_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} \big[v_0(\tau^j x) - v_0\big(\tau^j A^{-j} h_{[m]}\big)\big]. \tag{4.17}$$

Учитывая, что $v_0(\tau^j\,\cdot\,)$ равномерно ограничены на U, а также что

$$\begin{gathered} \big|\varphi_j(x)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big| \leqslant \big\|v_j(x)-v_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big\|, \\ \|T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)}\| \leqslant Cq^j, \end{gathered}$$

из соотношения (4.17) получаем неравенство

$$\big|\varphi_j(x)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big| \leqslant Cq^j. \tag{4.18}$$

Пусть теперь $x \in U_{n-1} \setminus U$. Положим $x' = x \ominus h_{[k]}$ и $m' = m - k$, где

$$k = x_0 2^j + x_{-1} 2^{j+1} + \dots + x_{2-n} 2^{j+n-2}.$$

Тогда $x' \in U$ и

$$v_j(x') - v_j\big(A^{-j}h_{[m']}\big) = T_{d_1(x')} T_{d_2(x')} \dots T_{d_j(x')} \big[v_0(\tau^j x') - v_0\big(\tau^j A^{-j} h_{[m']}\big)\big].$$

Поскольку

$$\big|\varphi_j(x)-\varphi_j\big(A^{-j}h_{[m]}\big)\big| \leqslant \big\|v_j(x')-v_j\big(A^{-j}h_{[m']}\big)\big\|,$$

вновь приходим к оценке (4.18). Аналогично оценивается последнее слагаемое в (4.16). Поэтому верно неравенство (4.7). Предложение доказано.

Замечание 4.2. Для вычисления значений функции φ полезна формула

$$v(x) = \begin{cases} T_0 v(Ax), & \text{если} \quad x \in U_{1,0}, \\ T_1 v\big(Ax \ominus h_{[1]}\big), & \text{если} \quad x \in U_{1,1}. \end{cases} \tag{4.19}$$

В частности, полагая $x = \theta$ в (4.19), видим, что вектор

$$v(\theta) = \big(\varphi\big(h_{[0]}\big), \varphi\big(h_{[1]}\big), \dots, \varphi\big(h_{[N-1]}\big)\big)^{\mathrm{T}}$$

является собственным вектором матрицы T_0, отвечающим собственному значению 1. Отметим, что принадлежность числа 1 спектру матрицы T_0 следует из условий (4.2). При $p = n = 2$ из (4.3) и (4.19) имеем

$$\varphi\big(h_{[0]}\big) = \frac{1+a-b}{2(1-b)}\,, \qquad \varphi\big(h_{[1]}^{-}\big) = \frac{1+a+b}{2(1+b)}\,,$$
$$\varphi\big(h_{[1]}\big) = \frac{1-a-b}{2(1-b)}\,, \qquad \varphi\big(h_{[2]}^{-}\big) = \frac{1-a+b}{2(1+b)}\,,$$

где параметры a и b такие, как в (1.10). Для случая $p = 2$, $n = 3$ отметим, что если функция φ определена формулой (1.11) при $a = 1$, $|\gamma| < 1$, то

$$\varphi\big(h_{[0]}\big) = \frac{1+c-\gamma}{2(1-\gamma)} - \frac{c(1-\beta)}{4(1-\gamma)} + \frac{b}{4}\,,$$
$$\varphi\big(h_{[1]}\big) = \frac{1-c-\gamma}{2(1-\gamma)} + \frac{c(1-\beta)}{4(1-\gamma)} - \frac{b}{4}\,,$$
$$\varphi\big(h_{[2]}\big) = \frac{b}{2} - \frac{c(1-\beta)}{2(1-\gamma)}\,,$$
$$\varphi\big(h_{[3]}\big) = -\frac{b}{2} + \frac{c(1-\beta)}{2(1-\gamma)}\,.$$

Здесь $\varphi\big(h_{[2]}\big) = \varphi\big(h_{[3]}\big) = 0$, если $b = 0$ ($\beta = 1$) или $b = c$ ($\beta = \gamma$).

Пример 4.3. Для функции φ, заданной формулой (1.10), имеет место оценка

$$\Omega_j(\varphi) \leqslant C|b|^j, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Действительно, при $n = 2$

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 + v_2 = 0\} = \{te_1^0 \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$T_0 e_1^0 = b e_1^0, \qquad T_1 e_1^0 = -b e_1^0,$$

где $e_1^0 = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$. Поэтому неравенство (4.20) следует из предложения 4.1. Поскольку

$$\varphi\big(h_{[0]}\big) - \varphi\big(A^{-j} h_{[1]}\big) = \frac{ab^j}{1-b}\,,$$

то оценка (4.20) является точной по порядку. Учитывая условие $|b| < 1$, из (4.20) получаем непрерывность φ.

Пример 4.4. Для функции φ, заданной формулой (1.11) при $a = 1,\ 0 < |\gamma| < 1$, справедлива оценка

$$\Omega_j(\varphi) \leqslant C|\gamma|^j, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Действительно, при $n = 3$ базис пространства E_1 образуют векторы

$$e_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При условии $a = 1$ имеем

$$\begin{gathered} T_0e_1^0 = T_1e_1^0 = 0, \\ T_0e_2^0 = -T_1e_2^0 = \beta e_1^0 + \gamma e_2^0, \\ T_0e_3^0 = T_1e_3^0 = be_1^0 + ce_2^0. \end{gathered}$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w = \nu_1 e_1^0 + \nu_2 e_2^0 + \nu_3 e_3^0$ пространства E_1 получаем

$$T_0^2 w = -T_1T_0 w = (\nu_2\gamma + \nu_3 c)T_0e_2^0, \qquad T_1^2 w = -T_0T_1 w = (\nu_2\gamma - \nu_3 c)T_0e_2^0 \tag{4.22}$$

и, в частности,

$$T_0^2 e_2^0 = T_1^2 e_2^0 = -T_0T_1e_2^0 = -T_1T_0e_2^0 = \gamma T_0 e_2^0.$$

Поэтому для любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ справедливо равенство

$$T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}e_2^0 = \pm\gamma^{m-1}T_0e_2^0.$$

Отсюда и из равенств (4.22) видно, что

$$\|T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}|_{E_1}\| \leqslant C|\gamma|^m$$

и оценка (4.21) следует из предложения 4.1. Из формулы (1.11) при $a = 1,\ b = 0$, $|\gamma| < 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$ выводится равенство

$$\varphi\bigl(h_{[0]}\bigr) - \varphi\bigl(A^{-j}h_{[1]}\bigr) = \frac{c\gamma^{j+3}}{4(1-\gamma)}\,.$$

Таким образом, оценка (4.21) также является точной по порядку.

Автор благодарит В. Ю. Протасова за полезные замечания по первоначальному варианту статьи.

Список литературы

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
2. *Holshneider M.* Wavelets: an analysis tool. Oxford: Clarendon Press, 1995.
3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975; Т. 2. М.: Мир, 1975.

4. *Jia R. Q.*, *Shen Z.* Multiresolution and wavelets // Proc. Edinburg Math. Soc. 1994. V. 37. P. 271–300.
5. *Gröchenig K.*, *Madych W. R.* Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tiling of $\mathbb{R}^n$ // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. V. 38. P. 556–568.
6. *Speegle D.* On the existence of wavelets for non-expansive dilation matrices // Collect. Math. 2003. V. 54. P. 163–179.
7. *Dahlke S.* Multiresolution analysis and wavelets on locally compact abelian groups // Wavelets, Images, and Surface Fitting / Eds. P. J. Laurent, A. Le Méhauté, L. L. Schumaker. Wellesley, Massachusetts: AK Peters, 1994. P. 141–156.
8. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. №4. С. 86–88.
9. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №2. С. 149–158.
10. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533–544.
11. *Lemarié P. G.* Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés // Bull. Math. Soc. France. 1989. V. 117. P. 211–232.
12. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
13. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
14. *Голубов Б. И.*, *Ефимов А. В.*, *Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
15. *Schipp F.*, *Wade W. R.*, *Simon P.* Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N. Y.: Adam Hilger, 1990.
16. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
17. *Фарков Ю. А.* Об ортогональных вейвлетах на полуоси // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы. Саратов, 27 января–3 февраля 2004 года. Саратов: Изд-во УНЦ "Колледж", 2004. С. 187–188.
18. *Малоземов В. Н.*, *Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. С. 111–157.
19. *Sendov Bl.* Adapted multiresolution analysis // Functions, series, operators / Eds. L. Leindler, F. Schipp, J. Szabados. Budapest, 2002. P. 23–38.
20. *Бычков С. А.*, *Фарков Ю. А.* О теореме Коэна для вейвлет-разложений на группах // VI Международная конференция "Новые идеи в науках о Земле" (Москва, апрель 2003 г.). Избранные доклады. М.: МГГРУ, 2003. С. 226–233.
21. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. С. 103–260.
22. *Wickerhauser M. V.* Adapted Wavelet Analysis. Wellesley, MA: AK Peters Ltd, 1994.
23. *Рубинштейн А. И.* О модулях непрерывности функций, определенных на нульмерной группе // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №3. С. 379–388.
24. *Daubechies I.*, *Lagarias J. C.* Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1031–1078.

Московский государственный
геологоразведочный университет
E-mail: `farkov@msgpa.ru`

Поступило в редакцию
05.07.2004