УДК 517.986.62

**Ю.А.Фарков**

# Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп

**1. Формулировки теорем**. Основы вейвлет-анализа на локально компактных абелевых группах изложены в главе 5 монографии [1], а подробная библиография приведена в статье [2]. В работах [3] - [5] построены первые примеры ортогональных вейвлетов на канторовой диадической группе $\mathcal{C}$, выявлена их мультифрактальная структура и найдены условия, при которых эти вейвлеты порождают безусловные базисы в пространствах $L^q(\mathcal{C})$, $1 < q < \infty$. Эти исследования были продолжены в [6], где получены точные по порядку оценки модулей гладкости масштабирующих функций, построенных в [4], и найдены аналогичные масштабирующие функции на локально компактной абелевой группе $G$, являющейся слабым прямым произведением счетного множества циклических групп $p$-го порядка (в случае $p = 2$ группа $G$ изоморфна канторовой группе $\mathcal{C}$). Напомним некоторые определения, использованные в [6], и сформулируем основные результаты настоящей работы.

Пусть $G$ – локально компактная абелева группа, состоящая из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbf{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на $G$ обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю $p$ :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{для} \quad j \in \mathbf{Z}\,,$$

а топология в $G$ вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \le l\}, \quad l \in \mathbf{Z}\,,$$

(см., например, [7, § 10.2], [8, § 1.5]). Положим $U = U_0$ и обозначим через $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$ (так что $x \ominus x = \theta$, где $\theta$ – нулевая последовательность).

Пространства Лебега $L^q(G), 1 \le q \le \infty$, определяются по мере Хаара $\mu$, заданной на борелевских множествах группы $G$ и нормированной условием $\mu(U) = 1$ (см., например, [7]). Обозначим через $(\cdot\,,\cdot)$ и $||\cdot||$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная $G$, обозначается $G^*$ и состоит из последовательностей вида

$$\omega = (\omega_j) = (\dots, 0, 0, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots),$$

где $\omega_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbf{Z}$ и $\omega_j = 0$ для $j < k = k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара $\mu^*$ вводятся для $G^*$ так же, как и для $G$. Каждый характер группы $G$ может быть задан по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j \in \mathbf{Z}} x_j \omega_{1-j}\right), \qquad x \in G,$$

для некоторого $\omega \in G^*$ (см. [7, § 25]).

Выделим в $G$ дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \operatorname{Aut} G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Легко видеть, что фактор-группа $H/A(H)$ содержит $p$ элементов, а аннулятор $H^\perp$ подгруппы $H$ состоит из последовательностей $(\omega_j) \in G^*$, у которых $\omega_j = 0$ для $j > 0$.

*Кратномасштабным анализом* (*КМА*) в $L^2(G)$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;

(iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(A\cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;

(iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot \ominus h) \in V_0$ для $h \in H$;

(v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $V_0$.

Функция $\varphi$ из условия (v) называетя *масштабирующей функцией* в $L^2(G)$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ положим

$$\varphi_{j,h}(x) = p^{j/2} \varphi(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbf{Z},\ h \in H.$$

Будем говорить, что *функция $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$*, если, во-первых система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ и, во-вторых, семейство подпространств

$$V_j = \operatorname{clos}_{L^2(G)} \operatorname{span} \{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}, \quad j \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

является КМА в $L^2(G)$. Если функция $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$, то $\varphi$ является масштабирующей функцией. В этом случае при каждом $j \in \mathbf{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $V_j$ и по функции $\varphi$ определяются *ортогональные вейвлеты* $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,h}(x) = p^{j/2} \psi_l(A^j x \ominus h), \quad 1 \le l \le p-1,\ j \in \mathbf{Z},\ h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$ (см. [9], [10, § 10.3], а также приведенную ниже процедуру). При $p = 2$ получается один вейвлет $\psi$ и система $\{2^{j/2}\psi(A^j \cdot \ominus h) \mid j \in \mathbf{Z},\ h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(G)$.

Отображение $\lambda : G \to [0, +\infty)$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы $H$ при отображении $\lambda$ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbf{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbf{N}$ через $h_{[\alpha]}$ и $h^-_{[\alpha]}$ обозначим элементы из $G$ такие, что

$$\lambda(h_{[\alpha]}) = \lambda(h^-_{[\alpha]}) = \alpha,$$

где все компоненты последовательности $h_{[\alpha]}$ (соотв. $h^-_{[\alpha]}$ ), начиная с некоторого номера, равны 0 (соотв. $p-1$ ). Положим также $h_{[\alpha]} = \theta$ для $\alpha = 0$ (так что $h_{[\alpha]} \in H$ при всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+$). Отображение $\lambda^* : G^* \to [0, +\infty)$, автоморфизм $B \in \operatorname{Aut} G^*$, подгруппа $U^*$ в $G^*$ и элементы $\omega_{[\alpha]}$, $\omega^-_{[\alpha]}$ из $H^\perp$ определяются аналогично $\lambda, A, U, h_{[\alpha]}$ и $h^-_{[\alpha]}$ соответственно. Отметим, что $\chi(Ax, \omega) = \chi(x, B\omega)$ для $x \in G$, $\omega \in G^*$.

*Обобщенные функции Уолша* для группы $G$ могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, \omega_{[\alpha]}), \qquad \alpha \in \mathbf{Z}_+,\ x \in G.$$

Эти функции непрерывны на $G$ и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_U W_\alpha(x)\overline{W_\beta(x)}d\mu(x) = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ - символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы $G^*$ определяется равенством

$$W^*_\alpha(\omega) = \chi(h_{[\alpha]}, \omega), \qquad \alpha \in \mathbf{Z}_+,\ \omega \in G^*.$$

Система $\{W^*_\alpha\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Главная цель настоящей работы – установить необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующих уравнений вида

$$\varphi(x) = p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) \tag{2}$$

генерируют КМА в $L^2(G)$. Для вейвлетов на вещественной прямой $\mathbf{R}$ соответствующие условия подробно изложены в книге Добеши (см. [10, § 6.3]). В случае $p = 2$ полученные результаты представляют собой групповые аналоги соответствующих результатов статьи [11], относящихся к вейвлет-анализу на положительной полупрямой $\mathbf{R}_+$.

Обобщенный полином Уолша

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)} \tag{3}$$

называется *маской* уравнения (2). Множества

$$U^*_{n,s} = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*), \quad 0 \le s \le p^n - 1, \tag{4}$$

являются смежными классами группы $U^*$ по подгруппе $B^{-n}(U^*)$. Каждая из функций $W^*_\alpha(\cdot)$ при $0 \le \alpha \le p^n - 1$ постоянна на множествах (4). Коэффициенты масштабирующего уравнения (2) связаны со значениями $b_s$ маски (3) на смежных классах $U^*_{n,s}$ прямым и обратным дискретными преобразованиями Виленкина – Крестенсона:

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s W^*_\alpha(B^{-n}\omega_{[s]}), \quad 0 \le \alpha \le p^n - 1, \tag{5}$$

$$b_s = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(B^{-n}\omega_{[s]})}, \qquad 0 \le s \le p^n - 1. \tag{6}$$

Для реализации этих преобразований имеются быстрые алгоритмы (см., например, [12, с.463 ], [13]). Таким образом, выбор значений маски (3) на множествах (4) одновременно определяет коэффициенты уравнения (2), которому удовлетворяет соответствующая функция $\varphi$.

Как обычно, через $\widehat{\varphi}$ обозначается преобразование Фурье функции $\varphi$ (см. раздел 2).

Теорема 1. *Если функция $\varphi \in L^2(G)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению* (2) *и условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то*

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \quad \textit{и} \quad \operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}.$$

*Это решение единственно, дается формулой*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega)$$

*и обладает следующими свойствами* :

1) $\widehat{\varphi}(h^*) = 0$ *при всех* $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ (*модифицированное условие Стрэнга – Фикса*);

2) $\sum_{h \in H} \varphi(x \oplus h) = 1$ *для п.в.* $x \in G$ (*свойство разбиения единицы*).

Пусть $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \ne 1$, обозначим через $\delta_l$ (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\{\omega \in H^* \mid \chi(x,\omega) = 1 \text{ для } x \in A(H)\} = \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}\},$$

т.е. множество последовательностей $\{\delta_l\}$ является аннулятором подгруппы $A(H)$ в $H$. Если финитное $L^2$-решение $\varphi$ уравнения (2) удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$ и система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то

$$m(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*,$$

(см. [6, § 3]). Отсюда следует, что равенства

$$b_0 = 1, \quad |b_j|^2 + |b_{j+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{j+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \le j \le p^{n-1} - 1 \tag{7}$$

необходимы (но недостаточны, см. пример 2 в разделе 4) для ортонормированности в $L^2(G)$ системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) | \, h \in H\}$. При каких дополнительных условиях функция $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$? Ответ на этот вопрос содержится в приведенной ниже теореме 2.

Пусть $E$ – компактное множество в $G^*$. Множество $E$ называется *конгруэнтным* $U^*$ *по модулю* $H^\perp$, если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$.

Пусть $m$ – маска масштабирующего уравнения (2). Будем говорить, что маска $m$ удовлетворяет *модифицированному условию Коэна*, если в группе $G^*$ найдется компактное подмножество $E$ такое, что:

1) $E$ конгруэнтно $U^*$ по модулю $H^\perp$ и содержит некоторую окрестность нулевого элемента группы $G^*$;

2) выполнено неравенство

$$\inf_{j \in \mathbf{N}} \inf_{\omega \in E} |m(B^{-j}\omega)| > 0. \tag{8}$$

При условии $m(\theta) = 1$ в силу компактности множества $E$ существует номер $j_0$ такой, что $m(B^{-j}\omega) = 1$ для всех $j > j_0$, $\omega \in E$. Поэтому (8) верно, если полином $m(\omega)$ не обращается в нуль на множествах $B^{-1}(E), \dots, B^{-j_0}(E)$. Отметим, что всегда можно выбрать $j_0 \le p^n$, так как маска $m$ полностью определяется своими значениями на множествах (4) и является $H^\perp$- периодической функцией.

Пусть $M \subset U^*$ и

$$T_p M = \bigcup_{l=0}^{p-1} \Big\{ B^{-1}\omega_{[l]} + B^{-1}(\omega) \mid \omega \in M \Big\}.$$

Множество $M$ называется *блокированным* (для маски $m$), если оно представимо в виде объединения некоторых из множеств

$$U^*_{n-1,s} = B^{1-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{1-n}(U^*), \quad 0 \le s \le p^{n-1} - 1, \tag{9}$$

не содержит множества $U^*_{n-1,0}$ и обладает свойством $T_p M \subset M \cup \operatorname{Null} m$, где $\operatorname{Null} m$ – множество всех нулей маски $m$ на подгруппе $U^*$. Очевидно, каждая маска может иметь только конечное число блокированных множеств.

Функцию $f \in L^2(G)$ будем называть *стабильной*, если существуют положительные константы $c_1$, $c_2$, такие, что

$$c_1 \Big( \sum_{\alpha=0}^{\infty} |\, a_\alpha|^2 \Big)^{1/2} \le \Big\| \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \Big\| \le c_2 \Big( \sum_{\alpha=0}^{\infty} |\, a_\alpha|^2 \Big)^{1/2} \tag{10}$$

для каждой последовательности $\{a_\alpha\}$ из $\ell^2$. Иначе говоря, функция $f$ стабильна в $L^2(G)$, если функции $f(\cdot \ominus h)$, $h \in H$, образуют систему Рисса в пространстве $L^2(G)$. Будем говорить, что функция $g : G^* \to \mathbf{C}$ имеет *периодический нуль* в точке $\omega \in G^*$, если $g(\omega \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ с компактным носителем следующие свойства (см. раздел 2) эквивалентны:

(a) Функция $f$ стабильна в $L^2(G)$.

(b) Система $\{f(\cdot \ominus h) |\, h \in H\}$ линейно независима.

(c) Преобразование Фурье функции $f$ не имеет периодических нулей.

Кроме того, установлено, что финитное $L^2$-решение $\varphi$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, нестабильно тогда и только тогда, когда маска уравнения (2) имеет блокированное множество. Справедлива также следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть маска $m$ финитного $L^2$-решения $\varphi$ уравнения* (2) *удовлетворяет условиям* (7) *и пусть $\widehat{\phi}(\theta) = 1$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны*:

(a) *Функция $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$.*

(b) *Маска $m$ удовлетворяет модифицированному условию Коэна.*

(c) *Маска $m$ не имеет блокированных множеств.*

Теоремы 1 и 2 доказаны в разделе 3 (при $p = 2$ их аналоги для пространства $L^2(\mathbf{R}_+)$ имеются в [11]). Из этих теорем получается (сравните с [9] и [14]) следующая процедура построения ортогональных вейвлетов в $L^2(G)$.

1. Выбрать числа $b_s$, $0 \le s \le p^n - 1$, для которых выполнены условия (7).

2. По формуле (5) вычислить коэффициенты $a_\alpha$, $0 \le \alpha \le p^n - 1$, и проверить, что маска

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}.$$

не имеет блокированных множеств.

3. Найти

$$m_l(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+} a_\alpha^{(l)} \overline{W_\alpha^*(\omega)}, \quad 1 \le l \le p-1,$$

такие, что матрица $(m_l(\omega + B^{-1}\omega_{[k]}))_{l,k=0}^{p-1}$ унитарна.

4. Определить $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ по формуле

$$\psi_l(x) = p \sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+} a_\alpha^{(l)} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \le l \le p-1. \tag{11}$$

Например, при $p = 2$ в разложении (11) можно положить $a_\alpha^{(1)} = (-1)^\alpha a_{\alpha\oplus 1}$ или $a_\alpha^{(1)} = (-1)^\alpha a_{2^n-1-\alpha}$ для $0 \le \alpha \le 2^n - 1$ (и $a_\alpha^{(1)} = 0$ для остальных $\alpha$). Некоторые методы реализации третьего шага указанной процедуры для $p > 2$ изложены в [15, § 2.6].

**2. Предварительные сведения**. Для любой функции $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ преобразование Фурье $\widehat{f}$, определенное по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x)\overline{\chi(x, \omega)} d\mu(x), \quad \omega \in G,$$

принадлежит пространству $L^2(G)$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}\,:\ L^1(G)\cap L^2(G)\to L^2(G),\quad \mathcal{F}f=\widehat{f},$$

стандартным образом продолжается на все пространство $L^2(G)$. Через $C_0(G^*)$ обозначается множество всех непрерывных комплекснозначных функций $g$ на $G^*$ таких, что для любого $\varepsilon>0$ существует компакт $E\subset G^*$ (зависящий от $g$ и $\varepsilon$), для которого $|\,g(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in G^*\setminus E$.

Предложение 1 (см. [7]). *Справедливы свойства:*

(a) *Если* $f\in L^1(G)$, *то* $\widehat{f}\in C_0(G^*)$.

(b) *Оператор Фурье* $\mathcal{F}$ *отображает пространство* $L^2(G)$ *на себя линейно, непрерывно и взаимно однозначно.*

(c) *Если* $f,g\in L^2(G)$, *то* $(f,g)=(\widehat{f},\widehat{g}\,)$ *(равенство Парсеваля).*

Для каждого натурального $n$ через $\mathcal{E}_n(G)$ обозначается пространство функций, заданных на $G$ и постоянных на множествах

$$U_{n,\alpha}=A^{-n}(h_{[\alpha]})\oplus A^{-n}(U),\quad \alpha\in\mathbf{Z}_+.$$

Класс $\mathcal{E}_n(G^*)$ определяется аналогично. Маска масштабирующего уравнения (2) принадлежит классу $\mathcal{E}_n(G^*)$.

Характеристическая функция множества $E$, расположенного в $G$, обозначается $\mathbf{1}_E$. Любая функция $f\in\mathcal{E}_n(G)$ представима в виде ряда

$$f(x)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}f_{n,\alpha}\mathbf{1}_{U_{n,\alpha}},\tag{12}$$

где $f_{n,\alpha}$ – значения, принимаемые $f$ на $U_{n,\alpha}$ (т.е. $f_{n,\alpha}=f(A^{-n}(h_{[\alpha]})))$. Отметим также, что аналогично соотношениям (1.5.18) в [8] доказываются равенства

$$\int_{U_{l,\alpha}}W_\beta(x)\,d\mu(x)=0,\qquad 0\le\alpha\le p^{l+1}-1,\quad p^l\le\beta\le p^{l+1}-1,\quad l\in\mathbf{Z}_+.\tag{13}$$

Аналог следующего предложения для $p$-ично целых функций на положительной полупрямой $\mathbf{R}_+$ доказан в [8, § 6.2]

Предложение 2. *Справедливы свойства:*

(a) *Если* $f\in L^1(G)\cap\mathcal{E}_n(G)$, *то* $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset U^*_{-n}$.

(b) *Если* $f\in L^1(G)$ *и* $\operatorname{supp}f\subset U_{-n}$, *то* $\widehat{f}\in\mathcal{E}_n(G^*)$.

Доказательство. Пусть $f\in L^1(G)\cap\mathcal{E}_n(G)$. Тогда из (12) для любого $\omega\in G^*$ имеем

$$\widehat{f}(\omega)=\int_G f(t)\overline{\chi(t,\omega)}\,d\mu(t)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}f_{n,\alpha}\int_{U_{n,\alpha}}\overline{\chi(t,\omega)}\,d\mu(t).$$

Полагая $t = A^{-n}(h_{[\alpha]}) \oplus x$ и замечая, что $A^{-n}(U) = U_n$, получим

$$\int_{U_{n,\alpha}} \chi(t,\omega)\,d\mu(t) = \chi(A^{-n}(h_{[\alpha]}),\omega) \int_{U_n} \chi(x,\omega)\,d\mu(x).$$

Для произвольного элемента $\omega = (\omega_j)$ из $G^* \setminus U^*_{-n}$ положим $s = \min\{j \mid \omega_j \neq 0\}$. Легко видеть, что $s \le -n$. Пусть $l = -s$. Тогда для любого элемента $x = (x_j)$ из $U_n$ имеем

$$\chi(x,\omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\left(x_{n+1}\omega_{-n} + x_{n+2}\omega_{-n-1} + \cdots + x_{l+1}\omega_{-l}\right)\right) = W_\beta(x),$$

где $\beta = \omega_{-n}p^n + \omega_{-n-1}p^{n-1} + \cdots + \omega_{-l}p^l$. Далее, разбивая $U_n$ на множества $U_{l,\alpha}$ и пользуясь (13), получаем

$$\int_{U_n} \chi(x,\omega)\,d\mu(x) = \sum_{\alpha=0}^{p^{l-n}-1} \int_{U_{l,\alpha}} W_\beta(x)\,d\mu(x) = 0.$$

Таким образом, $\widehat{f}(\omega) = 0$ для всех $\omega \in G^* \setminus U^*_{-n}$ и утверждение (а) доказано.

Пусть теперь $f \in L^1(G)$ и $\operatorname{supp} f \subset U_{-n}$. Тогда

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{U_{-n}} f(t)\overline{\chi(t,\omega)}\,d\mu(t) = \sum_{s=0}^{p^n-1} \int_{U_{0,s}} f(t)\overline{\chi(t,\omega)}\,d\mu(t).$$

Отсюда для

$$\omega = (\ldots, 0, 0, \omega_{-l}, \omega_{-l+1}, \ldots, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$$

после подстановки $t = h_{[s]} \oplus x$ получаем

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{s=0}^{p^n-1} c_{s,\beta}\overline{W^*_s(\omega)}, \tag{14}$$

где

$$c_{s,\beta} = \int_U f(h_{[s]} \oplus x)\overline{W_\beta(x)}\,d\mu(x), \quad \beta = \beta(\omega) = \omega_{-l}p^l + \omega_{-l+1}p^{l-1} + \cdots + \omega_{-l}p + \omega_0.$$

Поскольку $W^*_s(\omega)$ и $\beta(\omega)$ постоянны на множествах

$$U^*_{n,s} = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*), \quad s \in \mathbf{Z}_+,$$

из (14) следует, что $\widehat{f} \in \mathcal{E}_n(G^*)$. Предложение 2 доказано.

Напомним, что функция $f \in L^2(G)$ называется стабильной, если система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является системой Рисса в пространстве $L^2(G)$. Имеет место следующий аналог теоремы 2 из [11].

Предложение 3. *Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ с компактным носителем следующие свойства эквивалентны*:

(a) *Функция $f$ стабильна в $L^2(G)$.*

(b) *Система $\{f(\cdot \ominus h) |\, h \in H\}$ линейно независима.*

(c) *Преобразование Фурье функции $f$ не имеет периодических нулей.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \subset U_{1-n}$ для некоторого натурального $n$. По предложению 2 тогда $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$. Кроме того, если $\lambda(h) > p^{n-1}$, то

$$\mu\{\operatorname{supp} f(\cdot \ominus h) \cap U_{1-n}\} = 0.$$

Отсюда видно, что система $\{f(\cdot \ominus h) |\, h \in H\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима ее конечная подсистема $\{f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) |\, \alpha = 0, 1, \ldots, p^{n-1} - 1\}$. Положим

$$S = \{c = (c_0, c_1, \ldots, c_{p^{n-1}-1}) \,|\, \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} |\, c_\alpha|^2 = 1\}$$

и определим функцию $F$ по формуле

$$F(c) = \Big\| \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} c_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \Big\|, \quad c \in S.$$

Если функция $F$ обращается в нуль на $S$ в некоторой точке $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{p^{n-1}-1})$, то для последовательности $(c_0, \ldots, c_{p^{n-1}-1}, 0, 0, \ldots)$ нарушается нижняя оценка в (10). С помощью неравенства Коши – Буняковского из условия $\operatorname{supp} f \subset U_{1-n}$ для любой последовательности $\{a_\alpha\}$ из $\ell^2$ имеем

$$\| \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \| \le c(n) \left( \sum_{\alpha=0}^{\infty} |\, a_\alpha|^2 \right)^{1/2},$$

где константа $c(n)$ не зависит от $\{a_\alpha\}$. Поэтому функция $f$ не является стабильной тогда и только тогда, когда функция $F$ принимает на $S$ сколь угодно малые значения. Но тогда (в силу компактности $S$) существует точка $c \in S$, для которой $F(c) = 0$. Таким образом, (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Далее, если для некоторого вектора $(a_0, \ldots, a_{p^{n-1}-1})$ выполнены условия

$$\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) = 0 \quad \text{и} \quad |a_0| + \cdots + |a_{2^{n-1}-1}| > 0, \tag{15}$$

то применив преобразование Уолша, получаем

$$\widehat{f}(\omega) \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha W_\alpha^*(\omega) \;=\; 0 \quad \text{для п.в.} \quad \omega \in G^*.$$

Полином Уолша

$$W^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha W_\alpha^*(\omega)$$

не обращается в нуль тождественно, поэтому среди множеств $U^*_{n-1,s}$, $0 \le s \le p^{n-1}-1$, найдется такое (обозначим его $X$), для которого $W^*(X \oplus h^*) \neq 0$, $h^* \in H^\perp$. Поскольку $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$, отсюда получаем, что (15) выполнено тогда и только тогда, когда на $U^*$ существует множество $X = U^*_{n-1,s}$, такое, что $\widehat{f}(X \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Следовательно, (b)$\Leftrightarrow$ (c). Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть $\varphi \in L^2(G)$. Система $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 = 1 \qquad \text{для п. в.} \quad \omega \in G^*.$$

Это утверждение может быть выведено из обобщенной формулы суммирования Пуассона (см., например, [1, с. 377]), а его элементарное доказательство дано в [6, § 3].

При доказательстве леммы 2.1 работы [6] установлено, что аналогично предложению 5.3.1 из [10] имеет место следующее

Предложение 5. *Если система $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $V_0$, то $\bigcap V_j = \{0\}$.*

Здесь семейство $\{V_j\}$ определено по произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ с помощью формулы (1).

Предложение 6. *Пусть полином*

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)}$$

*удовлетворяет условиям*

$$m(\theta) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |\, m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in G^*,$$

*а функция $\varphi \in L^2(G)$ определена с помощью формулы*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \qquad \omega \in G^*.$$

*Система $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда полином $m$ удовлетворяет модифицированному условию Коэна.*

Этот аналог теоремы Коэна (см. [10; теорема 6.3.1]) доказан в [16].

**3. Доказательства теорем**. Пусть функция $\varphi \in L^2(G)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (2) и условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Применив преобразование Фурье, из (2) получим

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \tag{16}$$

где

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \tag{17}$$

– маска уравнения (2).

Доказательство теоремы 1. Поскольку $W_\alpha^*(\theta) = \widehat{\varphi}(\theta) = 1$, после подстановки в (16) и (17) значения $\omega = \theta$ получаем равенство

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1.$$

Пусть $s$ – наибольшее целое число такое, что

$$\mu\{x \in U_{0,\,s-1} \mid \varphi(x) \neq 0\} > 0,$$

где $U_{0,\,s-1} = h_{[s-1]} \oplus U$. Предположим, что $s \geq p^{n-1}+1$. Тогда произвольный элемент $x$ из $U_{0,\,s-1}$ имеет вид

$$x = (\dots, 0, 0, x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \tag{18}$$

где

$$x_{-k}p^k + x_{-k+1}p^{k-1} + \dots + x_{-1}p + x_0 = s-1, \quad x_{-k} \neq 0, \quad k \geq n-1. \tag{19}$$

Выберем этот элемент так, чтобы число $\lambda(x)$ не было $p$-ично рациональным (тогда среди компонент $x_j$ с положительными индексами имеется бесконечное число отличных от нуля). Для любого $\alpha \in \{0, 1, \dots, p^n-1\}$ элемент $y^{(\alpha)} = Ax \ominus h_{[\alpha]}$ имеет вид

$$y^{(\alpha)} = (\dots, 0, 0, y_{-k-1}^{(\alpha)}, y_{-k}^{(\alpha)}, \dots, y_{-1}^{(\alpha)}, y_0^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \dots), \quad k+1 \geq n,$$

где $y_{-k-1}^{(\alpha)} = x_{-k} \neq 0$ и среди цифр $y_j^{(\alpha)}$, $j \geq 0$, имеются отличные от нуля. Следовательно,

$$\lambda(Ax \ominus h_{[\alpha]}) > p^n \quad \text{для п.в.} \quad x \in U_{0,\,s-1}. \tag{20}$$

Если $s \leq p^n$, то из (20) получаем, что $\varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,\,s-1}$. Но тогда, в силу (2), $\varphi(x) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,\,s-1}$, что противоречит выбору $s$. Поэтому $s \geq p^n+1$. Пользуясь этим неравенством, для любого $\alpha \in \{0, 1, \dots, p^n-1\}$ из (18) и (19) получаем

$$\lambda(Ax \ominus h_{[\alpha]}) > p(s-1) - (p^n-1) \geq 2(s-1) - (s-2) = s.$$

Отсюда как и выше следует, что $\varphi(x) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,\,s-1}$. Поэтому $s \leq p^{n-1}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$.

Докажем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega). \tag{21}$$

Так как $\varphi$ финитна и принадлежит $L^2(G)$, то она принадлежит и $L^1(G)$. Поскольку $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$, то $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$ (предложение 2). В силу условия $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$ получаем, что $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ для $\omega \in U^*_{n-1}$. С другой стороны, $m(\omega) = 1$ при $\omega \in U^*_{n-1}$. Значит, для любого натурального $l$

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(B^{-l-n}\omega)\prod_{j=1}^{l+n} m(B^{-j}\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \quad \omega \in U^*_{-l}.$$

Поэтому верно равенство (21) и решение $\varphi$ единственно.

Пользуясь предложением 1, для любого $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ имеем

$$\widehat{\varphi}(h^*) = \widehat{\varphi}(h^*)\prod_{s=0}^{j-1} m(B^s h^*) = \widehat{\varphi}(B^j h^*) \to 0$$

при $j \to \infty$ (так как $\varphi \in L^1(G)$ и $m(B^s h^*) = 1$ в силу равенства $m(\theta) = 1$ и периодичности $m$). Отсюда следует, что

$$\widehat{\varphi}(h^*) = 0, \qquad h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}. \tag{22}$$

Применяя теперь формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{h\in H} \varphi(x \oplus h) = \sum_{h^*\in H^\perp} \widehat{\varphi}(h^*)\chi(x, h^*),$$

пользуясь (22) и условием $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, получаем

$$\sum\nolimits_{h\in H} \varphi(x \oplus h) = 1 \quad \text{для п.в.} \quad x \in G.$$

Теорема 1 доказана.

Лемма 1. *Пусть $\varphi$ – финитное $L^2$-решение уравнения (2) такое, что $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Функция $\varphi$ нестабильна тогда и только тогда, когда маска $m$ уравнения (2) имеет блокированное множество.*

Доказательство. Применяя теорему 1 и предложение 2, имеем $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}$ и $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$. Предположим, что функция $\varphi$ нестабильна. При доказательстве предложения 3 было установлено, что если нестабильная функция $f \in L^2(G)$ имеет носитель в $U_{1-n}$, то существует множество $X = U^*_{n-1,s}$, такое, что все точки множества $X$ являются периодическими нулями преобразования Фурье $\widehat{f}$ (и любой периодический нуль $\omega \in U^*$ для $\widehat{f}$ расположен в таком множестве $X$). Поэтому множество

$$M_0 = \{\omega \in U^* \mid \widehat{\varphi}(\omega + h^*) = 0 \quad \text{для всех} \quad h^* \in H^\perp\}$$

представимо в виде объединения некоторых из множеств $U^*_{n-1,s}$, $0 \le s \le p^{n-1} - 1$. Поскольку $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то $M_0$ не содержит $U^*_{n-1,0}$. Кроме того, если $\omega \in M_0$, то по формуле (16)

$$m(B^{-1}\omega + B^{-1}h^*)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega + B^{-1}h^*) = 0 \quad \text{для всех} \quad h^* \in H^\perp$$

и, следовательно, элементы $B^{-1}\omega+B^{-1}\omega_{[l]}$, $l=0,1,\dots,p-1$, принадлежат либо $M_0$, либо $\mathrm{Null}\, m$. Таким образом, если $\varphi$ нестабильна, то множество $M_0$ является блокированным множеством для $m$.

Обратно, пусть маска $m$ имеет блокированное множество $M$. Покажем, что тогда каждый элемент из $M$ является периодическим нулем для $\widehat{\varphi}$ (и, следовательно, по предложению 3 функция $\varphi$ нестабильна). Предположим, что существуют $\omega \in M$ и $h^* \in H^\perp$ такие, что $\widehat{\varphi}(\omega \oplus h^*) \neq 0$. Выберем натуральное число $j$, для которого $B^{-j}(\omega \oplus h^*) \in U^*_{n-1}$, а затем для каждого $r \in \{0,1,\dots,j\}$ найдем $u^*_r \in U^*$, $h^*_r \in H^\perp$, такие, что $B^{-r}(\omega \oplus h^*) = u^*_r \oplus h^*_r$. Далее, для каждого $r \in \{0,1,\dots,j-1\}$ возьмем $l \in \{0,1,\dots,p-1\}$ такое, что

$$B^{-1}h^*_r = B^{-1}\omega_{[l]} \oplus \omega^*_r,$$

где $\omega^*_r \in H^\perp$. Тогда

$$u^*_{r+1} \oplus h^*_{r+1} = B^{-r-1}(\omega \oplus h^*) = B^{-1}(u^*_r \oplus h^*_r) = (B^{-1}u^*_r \oplus B^{-1}\omega_{[l]}) \oplus \omega^*_r$$

и, следовательно,

$$u^*_{r+1} = \omega B^{-1}u^*_r \oplus B^{-1}\omega_{[l]}, \quad l = l(r) \in \{0,1,\dots,p-1\}.$$

Отсюда видно, что если $u^*_r \in M$, то $u^*_{r+1} \in T_pM$. Кроме того, из равенств

$$\widehat{\varphi}(\omega \oplus h^*) = \widehat{\varphi}(B^{-j}(\omega \oplus h^*))\prod_{r=1}^{j} m(B^{-r}(\omega \oplus h^*)) = \widehat{\varphi}(u^*_j)\prod_{r=1}^{j} m(u^*_r)$$

сдедует, что все $u^*_r \notin \mathrm{Null}\, m$. Таким образом, если $u^*_r \in M$, то $u^*_{r+1} \in M$. Поскольку $u^*_0 = \omega \in M$, отсюда следует, что все $u^*_r \in M$. Это противоречит тому, что $u^*_j = B^{-j}(\omega \oplus h^*) \in U^*_{n-1}$ и множество $M$ не содержит $U^*_{n-1} = U^*_{n-1,0}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть маска $m$ масштабирующего уравнения* (2) *удовлетворяет условиям*

$$m(\theta) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |\, m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in G^*. \tag{23}$$

*Тогда функция $\varphi$, заданная равенством*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \tag{24}$$

*является $L^2$-решением уравнения* (2), *причем* $\|\varphi\| \le 1$.

Доказательство. Поточечная сходимость произведения в (24) следует из того, что маска $m$ равна 1 на множестве $U^*_{n,0}$ (так что для любого $\omega \in G^*$ только конечное число множителей в (24) может быть отлично от 1). Обозначим через $g(\omega)$ правую часть равенства (24). Из (23) следует, что $|\,m(\omega)| \le 1$ для всех $\omega \in G^*$. Поэтому для любого $s \in \mathbf{N}$ имеем

$$|\,g(\omega)|^2 \le \prod_{j=1}^{s} |\,m(B^{-j}\omega)|^2$$

и, следовательно,

$$\int_{U^*_{-l}} |\,g(\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) \le \int_{U^*_{-l}} \prod_{j=1}^{s} |\,m(B^{-j}\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) = 2^s \int_{U^*} \prod_{j=0}^{s-1} |\,m(B^{j}\omega)|^2\, d\mu^*(\omega). \tag{25}$$

Из равенств

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)}, \quad W^*_\alpha(\omega)\overline{W^*_\beta(\omega)} = W^*_{\alpha\ominus\beta}(\omega),$$

видно, что

$$|\,m(\omega)|^2 = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} c_\alpha W^*_\alpha(\omega), \tag{26}$$

где коэффициенты $c_\alpha$ вычисляются по $a_\alpha$. Подставим (26) во второе из равенств (23) и воспользуемся тем, что если $\alpha$ кратно $p$, то

$$\sum_{l=0}^{p-1} W^*_\alpha(\delta_l) = p,$$

а для остальных $\alpha$ эта сумма равна 0. В результате получим $c_0 = 1/p$ и $c_\alpha = 0$ для ненулевых $\alpha$, кратных $p$. Значит, верно равенство

$$|\,m(\omega)|^2 = \frac{1}{p} + \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} \sum_{l=1}^{p-1} c_{p\alpha+l} W^*_{p\alpha+l}(\omega).$$

Отсюда получаем, что

$$\prod_{j=0}^{s-1} |\,m(B^j\omega)|^2 = p^{-s} + \sum_{\gamma=1}^{\sigma(s)} b_\gamma W^*_\gamma(\omega), \qquad \sigma(s) \le sp^{n-1}(p-1),$$

где каждый из коэффициентов $b_\gamma$ равен произведению некоторых коэффициентов $c_{p\alpha+l}$, $l = 1, \dots, p-1$. Учитывая, что

$$\int_{U^*} W^*_\gamma(\omega)\, d\mu^*(\omega) = 0, \qquad \gamma \in \mathbf{N},$$

имеем

$$\int_{U^*} \prod_{j=0}^{s-1} |\,m(B^j\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) = p^{-s}.$$

Подставляя в (25), для произвольного $l \in \mathbf{N}$ выводим неравенство

$$\int_{U_{-l}^*} |\, g(\omega)|^2 \, d\mu^*(\omega) \leq 1$$

и, следовательно,

$$\int_{G^*} |\, g(\omega)|^2 \, d\mu^*(\omega) \leq 1. \tag{27}$$

Пусть теперь $\varphi \in L^2(G)$ и $\widehat{\varphi} = g$. Тогда из (24) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega)$$

и, значит, $\varphi$ удовлетворяет уравнению (2). Кроме того, по предложению 1 из (27) получаем, что $\|\, \varphi \,\| \leq 1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\varphi$ – финитное $L^2$-решение уравнения (2) такое, что $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Система $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда маска $m$ уравнения (2) не имеет блокированных множеств и удовлетворяет условию*

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \textit{для всех} \quad \omega \in G^*. \tag{28}$$

Доказательство. Если система $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то условие (28) выполнено (см. [6, § 3]), а отсутствие блокированных множеств следует из леммы 1 и предложения 3.

Обратно, пусть маска $m$ не имеет блокированных множеств и условие (28) выполнено. Положим

$$\Phi(\omega) := \sum_{h^* \in H^\perp} |\, \widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2. \tag{29}$$

Очевидно, функция $\Phi$ неотрицательна и обладает свойством $H^\perp$-периодичности. В силу предложения 4 достаточно проверить, что $\Phi(\omega) \equiv 1$. Пусть

$$a = \inf \{\Phi(\omega) \mid \omega \in U^*\}.$$

Из теоремы 1 и предложения 2 следует, что функция $\Phi$ (как и $\widehat{\varphi}$) постоянна на множествах $U_{n-1,s}^*$, $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$. Если $\Phi$ обращается в нуль на одном из множеств $U_{n-1,s}^*$, то функция $\widehat{\varphi}$ имеет периодический нуль и, значит, $\varphi$ нестабильна. Согласно предложению 3 и лемме 1 это противоречит отсутствию блокированных множеств у маски $m$. Значит, число $a$ положительно. Кроме того, учитывая модифицированное условие Стрэнга – Фикса (см. теорему 1), имеем $\Phi(\theta) = 1$. Таким образом, $0 < a \leq 1$.

Заметим, что из (16) и (29) следует равенство

$$\Phi(\omega) = \sum_{l=0}^{p-1} |\, m(B^{-1}\omega \ominus \delta_l)|^2 \Phi(B^{-1}\omega \ominus \delta_l). \tag{30}$$

Пусть теперь $M_a = \{\Phi(\omega) = a \mid \omega \in U^*\}$. Если $0 < a < 1$, то из (28) и (30) следует, что для любого $\omega \in M_a$ элементы $B^{-1}\omega \ominus \delta_l$, $l = 0, 1, \dots, p-1$, принадлежат либо $M_a$, либо $\mathrm{Null}\, m$. Следовательно, $M_a$ – блокированное множество, что противоречит условию. Таким образом, $\Phi(\omega) \geq 1$ для всех $\omega \in U^*$. Отсюда и из равенств

$$\int_{U^*} \Phi(\omega)\, d\mu^*(\omega) = \sum_{h^* \in H^\perp} \int_{U^* \oplus h^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\, d\mu^*(\omega) = \|\varphi\|^2$$

по лемме 2 получаем, что

$$\int_{U^*} \Phi(\omega)\, d\mu^*(\omega) = 1.$$

Повторно применяя неравенство $\Phi(\omega) \geq 1$ и пользуясь тем, что функция $\Phi$ постоянна на множествах $U^*_{n-1,\,s}$, $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$, заключаем, что $\Phi(\omega) \equiv 1$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть для маски $m$ выполнено любое из условий (b) или (c). Тогда из предложения 6 и леммы 3 следует, что система $\{\varphi(\,\cdot\, \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$. Подпространства $V_j$, $j \in \mathbf{Z}_+$, определим по формуле (1). По предложению 5 имеем $\bigcap V_j = \{0\}$. Вложения $V_j \subset V_{j+1}$ следуют из того, что $\varphi$ удовлетворяет уравнению (2), а равенство

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(G)$$

доказывется точно так же, как в [6, с.206]. Таким образом, верны импликации (b) $\Rightarrow$ (a) и (c) $\Rightarrow$ (a). Обратные импликации следуют из предложения 6 и леммы 3. Теорема 2 доказана.

**4. Примеры**. Приведем примеры функций $\varphi$, удовлетворяющих уравнению (2) и генерирующих КМА в $L^2(G)$. Напомним, что через $\mathbf{1}_E$ обозначается характеристическая функция множества $E \subset G$.

Пример 1. Если $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 1/p$ и все $a_\alpha = 0$ для $\alpha \geq p$, то решением уравнения (2) является функция $\varphi = \mathbf{1}_{U_{n-1}}$; в частности, при $n = 1$ уравнению (2) удовлетворяет функция Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_U$ (сравните с [2, § 5.1], [6, замечание 1.3]).

Пример 2. Пусть $p = n = 2$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = 0,\ b_3 = b,$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Положим

$$a_0 = (1 + a + b)/4, \quad a_1 = (1 + a - b)/4, \quad a_2 = (1 - a - b)/4, \quad a_3 = (1 - a + b)/4.$$

При $a \neq 0$ модифицированное условие Коэна выполнено на множестве $E = U^*$ и соответствующее решение $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$. В частности, при $a = 1$ и $a = -1$ получаются соответственно функция Хаара: $\varphi(x) = \mathbf{1}_U(x)$ и смещенная функция Хаара: $\varphi(x) = \mathbf{1}_U(x \ominus h_{[1]})$. Если $0 < |a| < 1$, то решение $\varphi$ определяется (см. [3]) разложением

$$\varphi(x) = (1/2)\mathbf{1}_U(A^{-1}x)(1 + a \sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x)), \quad x \in G.$$

В случае $a=0$ множество $U^*_{1,1}$ является блокированным для маски уравнения (2), функция $\varphi$ определяется по формуле $\varphi(x) = (1/2)\mathbf{1}_U(A^{-1}x)$ и система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно зависима (так как $\varphi(x) = \varphi(x \ominus h_{[1]})$).

В следующем примере указана масштабирующая функция в $L^2(G)$, представимая в виде линейной комбинации конечного числа обобщенных функций Уолша. При этом соответствующая маска удовлетворяет неравенству (8) при некотором $E$, отличном от $U^*$.

Пример 3. Пусть $p=2$, $n=3$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ b_3 = c,\ b_4 = 0,\ b_5 = \alpha,\ b_6 = \beta,\ b_7 = \gamma,$$

где

$$|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

Значениями $b_0, b_1, \dots, b_7$ коэффиценты $a_0, a_1, \dots, a_7$ уравнения (2) определяются однозначно, а выражения этих коэффицентов через параметры $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ получаются по формуле (5):

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{8}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),\\
a_1 &= \frac{1}{8}(1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma),\\
a_2 &= \frac{1}{8}(1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma),\\
a_3 &= \frac{1}{8}(1 + a - b - c - \alpha + \beta + \gamma),\\
a_4 &= \frac{1}{8}(1 - a + b - c - \alpha + \beta - \gamma),\\
a_5 &= \frac{1}{8}(1 - a + b - c + \alpha - \beta + \gamma),\\
a_6 &= \frac{1}{8}(1 - a - b + c - \alpha - \beta + \gamma),\\
a_7 &= \frac{1}{8}(1 - a - b + c + \alpha + \beta - \gamma).
\end{aligned}$$

В примере 1.5 из [6] найдено разложение соответствующего решения $\varphi$ в ряд Уолша:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_U(y)(1 &+ a\,W_1(y) + ab\,W_2(y) + ac\,W_3(y) + ab\alpha\,W_5(y)\\
&+ ac\beta\,W_6(y) + ac\gamma\,W_7(y) + ab^2\alpha\,W_{10}(y) + abc\alpha\,W_{11}(y) + ac\alpha\beta\,W_{13}(y)\\
&+ ac\beta\gamma\,W_{14}(y) + ac\gamma^2\,W_{15}(y) + ab^2\alpha^2\,W_{21}(y) + abc\alpha\beta\,W_{22}(y) + ab\alpha\beta\gamma\,W_{23}(y)\\
&+ abc\alpha\beta\,W_{26}(y) + ac^2\alpha\beta\,W_{27}(y) + ac\alpha\beta\gamma\,W_{29}(y) + ac\beta\gamma^2\,W_{30}(y) + \dots),
\end{aligned} \tag{31}$$

где $y = A^{-2}x$. Блокированными множествами для маски

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{7} a_\alpha W^*_\alpha(\omega)$$

являются: 1) $U^*_{1,1} \cup U^*_{2,1}$ при $a = 0$, 2) $U^*_{2,1} \cup U^*_{2,2}$ при $a = \beta = 0$, 3) $U^*_{2,3}$ при $c = 0$, 4) $U^*_{1,1}$ при $b = c = 0$. Если $a = 0$ или $c = 0$, то система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно зависима. Если же $a$ и $c$ ненулевые, то функция $\varphi$ генерирует КМА в $L^2(G)$. Неравенство (8) в случае $abc \neq 0$ выполнено для $E = U^*$, а в случае $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ оно имеет место для $E = B(U^*_{3,0} \cup U^*_{3,1} \cup U^*_{3,3} \cup U^*_{3,6})$. В частности, при $a = c = 1$, $0 \leq |b| < 1$, из (31) получаем

$$\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_U(y)(1 + W_1(y) + bW_2(y) + W_3(y) + \beta W_6(y)), \quad y = A^{-2}x,$$

(сравните с примером 3 в [11] и примерами 2 и 4 в [14]).

Пример 4. Пусть $p = 3$, $n = 2$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = \alpha,\ b_3 = 0,\ b_4 = b,\ b_5 = \beta,\ b_6 = 0,\ b_7 = c,\ b_8 = \gamma,$$

где

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

Согласно (5) коэффициенты уравнения (2) в рассматриваемом случае вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{9}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$a_1 = \frac{1}{9}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$a_2 = \frac{1}{9}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$a_3 = \frac{1}{9}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$a_4 = \frac{1}{9}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$a_5 = \frac{1}{9}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$a_6 = \frac{1}{9}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$a_7 = \frac{1}{9}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

$$a_8 = \frac{1}{9}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$. Блокированными множествами для соответствующей маски $m$ являются: 1) $U^*_{1,1}$ при $a = c = 0$, 2) $U^*_{1,2}$ при $\alpha = \beta = 0$, 3) $U^*_{1,1} \cup U^*_{1,2}$ при $a = \alpha = 0$.

Пусть

$$\Lambda = \{1, 2\} \cup \left\{\sum\nolimits_{j=0}^{k} l_j 3^j \mid l_j \in \{1, 2\}, k \in \mathbf{Z}_+\right\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, \dots\}.$$

Для $s \in \{1,2,4,5,7,8\}$ положим $\gamma(i_1,i_2) = b_s$, если $s = i_1 + 3i_2$, $i_1, i_2 \in \{0,1,2\}$, т.е.

$$\gamma(1,0) = a,\ \gamma(2,0) = \alpha,\ \gamma(1,1) = b,\ \gamma(2,1) = \beta,\ \gamma(1,2) = c,\ \gamma(2,2) = \gamma.$$

Далее, произвольное $l \in \Lambda$ запишем в виде

$$l = \sum_{j=0}^{k} l_j 3^j, \quad l_j \in \{0,1,2\}, \quad k = k(l) \in \mathbf{Z}_+,$$

и положим

$$c_l[m] = \gamma(l_0, 0), \quad \text{если} \quad k = k(l) = 0;$$

$$c_l[m] = \gamma(l_1, 0)\gamma(l_0, l_1), \quad \text{если} \quad k = k(l) = 1;$$

$$\dots$$

$$c_l[m] = \gamma(l_k, 0)\gamma(l_{k-1}, l_k)\dots\gamma(l_0, l_1), \quad \text{если} \quad k = k(l) \geq 1.$$

Решение уравнения (2) представимо (см. [6]) в виде ряда:

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_U(A^{-1}x)(1 + \sum_{l \in \Lambda} c_l[m] W_l(A^{-1}x)), \quad x \in G. \tag{32}$$

Учитывая приведенные выше выражения для блокированных множеств, по теореме 2 получаем, что функция (32) генерирует КМА в $L^2(G)$ в следующих трех случаях: 1) $a \neq 0, \alpha \neq 0$, 2) $a = 0, \alpha \neq 0, c \neq 0$, 3) $\alpha = 0, a \neq 0, \beta \neq 0$.

Пример 5. Предположим, что для некоторых чисел $b_s$, $0 \leq s \leq p^n - 1$, равенства (7) выполнены. Применив формулы (5), найдем коэффициенты маски

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)},$$

принимающей на смежных классах $U_{n,s}^*$, $0 \leq s \leq p^n - 1$, значения $b_s$. Если дополнительно известно, что $b_j \neq 0$ для $j \in \{1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\}$, то уравнение (2) с найденными коэффициентами $a_\alpha$ имеет решение, генерирующее КМА в $L^2(G)$ (модифицированное условие Коэна выполнено для $E = U^*$). Разложение этого решения в лакунарный ряд по обобщенным функциям Уолша находится методом, указанным в [6].

При $p = 2$ из примера 5 получаются масштабирующие функции в $L^2(G)$, аналогичные масштабирующим функциям Добеши (см. [10, § 6.4]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Holshneider, *Wavelets: an analysis tool*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[2] J.J. Benedetto, R.L. Benedetto, "A wavelet theory for local fields and related groups", *J. Geometric Analysis*, **14** (2004), 423-456.

[3] W.C. Lang, "Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group", *SIAM J. Math. Anal.*, **27** (1996), 305-312.

[4] W.C. Lang, "Wavelet analysis on the Cantor dyadic group", *Houston J. Math.*, **24** (1998), 533-544.

[5] W.C. Lang, "Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group", *Int. J. Math. and Math. Sci.*, **21** (1998), 307-317.

[6] Ю.А. Фарков, "Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193-220.

[7] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, 2., Наука (Т.1), Мир (Т.2), М., 1975.

[8] Б.И.Голубов, А.В.Ефимов, В.А.Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*, Наука, М., 1987.

[9] Ю.А. Фарков, "Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах", *Функц. анализ и его прилож.*, **31**:4 (1997), 86-88.

[10] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2001.

[11] В.Ю. Протасов, Ю.А. Фарков, "Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой", *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129-160.

[12] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, N.Y., 1990.

[13] В.Н. Малоземов, С.М. Машарский, "Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона", *Алгебра и анализ*, **13** (2001), 111–157.

[14] Yu.A.Farkov, "Orthogonal $p$-wavelets on $\mathbf{R}_+$", *Proc. Intern. Conf. "Wavelets and splines"*, (July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia), St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2005, 4-26.

[15] И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина, *Теория всплесков*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2006.

[16] С.А. Бычков, Ю.А. Фарков, "О теореме Коэна для вейвлет-разложений на группах", *VI Международная конференция "Новые идеи в науках о Земле"* (Москва, апрель 2003 г.). Избранные доклады. Москва: МГГРУ, 2003. С. 226 - 238.