Математические заметки

Том 89 выпуск 6 июнь 2011

УДК 517.518.34

Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона

Ю. А. Фарков

В пространствах комплексных периодических последовательностей с помощью преобразования Виленкина–Крестенсона построены новые ортогональные вейвлетные базисы, определяемые по конечным наборам параметров. Ранее подобные базисы были определены для групп Кантора и Виленкина на основе обобщенных функций Уолша. Отмечается, что аналогичные конструкции могут быть реализованы для биортогональных вейвлетов, а также для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Библиография: 11 названий.

1. Формулировки теорем и примеры. Преобразование Виленкина–Крестенсона является дискретным мультипликативным преобразованием и имеет ряд преимуществ по сравнению с дискретным преобразованием Фурье в задачах кодирования информации и некоторых других областях; последние результаты в этом направлении и подробные библиографические сведения приведены в книге [1]. В статье [2] на основе преобразования Виленкина–Крестенсона построены вейвлетные базисы типа Хаара и соответствующие им вейвлет-пакеты, связанные с прореживанием по времени и прореживанием по частоте дискретных периодических сигналов.

В настоящей работе для пространств комплексных периодических последовательностей с помощью преобразования Виленкина–Крестенсона вводятся аналоги ортогональных вейвлетов, изучавшихся для групп Кантора и Виленкина в [3]–[5], и указываются алгоритмы для их построения. Аналогичные конструкции могут быть реализованы для биортогональных вейвлетов, а также для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел (см. замечания 1 и 2).

Пусть $N = p^n$ и $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, где n и p – натуральные числа, причем $p \geqslant 2$. Пространство $\mathbb{C}_N$ состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

таких, что $x(j+N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Произвольная последовательность x из $\mathbb{C}_N$ задана, если указаны значения $x(j)$ для $j \in \mathbb{Z}_N$, поэтому иногда элемент x отождествляют с вектором $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$. Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}_N$ вводятся по формулам $\langle x, y\rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$, $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Обозначим через $\langle k\rangle_p$ остаток от деления целого числа k на число p и через $[a]$ – целую часть числа a. Для любого $a \in \mathbb{R}_+$ цифры p-ичного разложения

$$a = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} p^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu p^{-\nu} \tag{1}$$

находятся по формулам $a_{-\nu} = \langle [p^{1-\nu} a] \rangle_p$, $a_\nu = \langle [p^\nu a] \rangle_p$ (для p-ично рационального a получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Легко видеть, что для каждого $a \in \mathbb{R}_+$ существует натуральное число μ такое, что $a_{-\nu} = 0$ для всех $\nu > \mu$, а также что первая сумма в (1) равна $[a]$. Операция поразрядного сложения по модулю p на множестве $\mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$a \oplus_p b := \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle a_{-\nu} + b_{-\nu} \rangle_p p^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle a_\nu + b_\nu \rangle_p p^{-\nu}, \qquad a, b \in \mathbb{R}_+,$$

где a_ν, b_ν берутся из разложений вида (1). Как обычно, равенство $c = a \ominus_p b$ означает, что $c \oplus_p b = a$.

Для произвольного $j \in \mathbb{Z}_N$ обозначим через j^* неотрицательное целое число, определяемое условием $j \oplus_p j^* = 0$. При $p = 2$ имеем $j^* = j$, а при $p > 2$ число j^* является p-ично противоположным к j. Для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ обозначим через $\widetilde{x}$ вектор из $\mathbb{C}_N$ такой, что $\widetilde{x}(j) = \overline{x(j^*)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}_N$. Далее, для $k, j \in \mathbb{Z}_N$ положим $\{k, j\}_p := \sum_{\nu=1}^{n} k_{n-\nu-1} j_{-\nu}$, где

$$k = \sum_{\nu=1}^{n} k_{-\nu} p^{\nu-1}, \quad j = \sum_{\nu=1}^{n} j_{-\nu} p^{\nu-1}, \quad k_{-\nu}, j_{-\nu} \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. *Функции Виленкина–Крестенсона* $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\mathbb{C}_N$ определяются равенствами $w_k^{(N)}(j) = \varepsilon_p^{\{k,j\}_p}$ и $w_k^{(N)}(l) = w_k^{(N)}(l+N)$, где $k, j \in \mathbb{Z}_N$, $l \in \mathbb{Z}$. При $n \geqslant 2$ и $p = 2$ функции Виленкина–Крестенсона совпадают с функциями Уолша, а в случае $n = 1$ и $p \geqslant 2$ они являются экспоненциальными функциями:

$$w_k^{(p)}(j) = \varepsilon_p^{kj}, \qquad k, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Функции $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, причем

$$\|w_k^{(N)}\|^2 = N \qquad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Преобразование Виленкина–Крестенсона сопоставляет произвольному вектору x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $w_0^{(N)}$, $w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$:

$$\widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{w_k^{(N)}(j)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$ определим p-свертку $x * y$ по формуле

$$(x * y)(k) := \sum_{j=0}^{N-1} x(k \ominus_p j) y(j), \qquad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Единичным N-периодическим импульсом называется вектор δ_N из $\mathbb{C}_N$, определяемый равенством

$$\delta_N(j) := \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases}$$

Система сдвигов $\{\delta_N(\,\cdot \ominus_p k) \mid k \in \mathbb{Z}_N\}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$ и

$$x(j) = (x * \delta_N)(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j \ominus_p k), \qquad j \in \mathbb{Z}_N,$$

для всех $x \in \mathbb{C}_N$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p-ичного сдвига $T_k\colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus_p k), \qquad x \in \mathbb{C}_N, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Из определений следует, что для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$ имеют место равенства

$$\langle x, y\rangle = N\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle, \quad \widehat{x * y} = N\widehat{x}\widehat{y}, \qquad (\widehat{T_k x})(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)}\,\widehat{x}(l), \quad (\widehat{\widehat{x}})(k) = \overline{\widehat{x}(k)}, \tag{2}$$

$$\langle y, T_k x\rangle = y * \widetilde{x}(k), \quad \langle T_k x, T_l y\rangle = \langle x, T_{l \ominus_p k} y\rangle, \quad k, l \in \mathbb{Z}_N. \tag{3}$$

Для $\nu = 0, 1, \dots, n$ положим $N_\nu = N/p^\nu$, $\Delta_\nu = p^{\nu-1}$. Операторы $D\colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_{N_1}$ и $U\colon \mathbb{C}_{N_1} \to \mathbb{C}_N$, определенные по формулам

$$(Dx)(j) := x(pj), \qquad j = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

и

$$(Uy)(j) := \begin{cases} y\left(\dfrac{j}{p}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_1}$, называются *оператором сгущающей выборки* и *оператором разрежающей выборки* соответственно. Отметим, что $D(Uy) = y$ для всех $y \in \mathbb{C}_{N_1}$. Далее, пусть $D^1 = D$, $U^1 = U$ и для $\nu = 2, \dots, n$ определим операторы $D^\nu\colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_{N_\nu}$, $U^\nu\colon \mathbb{C}_{N_\nu} \to \mathbb{C}_N$ по формулам

$$(D^\nu x)(j) := x(p^\nu j), \qquad (U^\nu y)(j) := \begin{cases} y\left(\dfrac{j}{p^\nu}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p^\nu, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p^\nu, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$. Для любого $y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$ имеет место равенство $\widehat{U^\nu y}(l) = p^{-\nu}\widehat{y}(l)$, $l \in \mathbb{Z}_N$, где в левой части преобразование Виленкина–Крестенсона берется в $\mathbb{C}_N$, а в правой части – в $\mathbb{C}_{N_\nu}$. Кроме того,

$$U^\nu(x * y) = U^\nu(x) * U^\nu(y) \qquad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{C}_{N_\nu}. \tag{4}$$

Следуя подходу, изложенному в [6; глава 3], дадим следующее определение.

Определение 1. Пусть $u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_N$. Если система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) = \{T_{p\,k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{p\,k} u_{p-1}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$, то $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ называется *вейвлет-базисом первого этапа в $\mathbb{C}_N$, порожденным набором векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$*.

Следующая теорема характеризует все наборы векторов, порождающие вейвлет-базисы первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Теорема 1. *Набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда матрица*

$$\frac{N}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \dots & \widehat{u}_{p-1}(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \widehat{u}_1(l+N_1) & \dots & \widehat{u}_{p-1}(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) & \widehat{u}_1(l+2N_1) & \dots & \widehat{u}_{p-1}(l+2N_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) & \widehat{u}_1(l+(p-1)N_1) & \dots & \widehat{u}_{p-1}(l+(p-1)N_1) \end{pmatrix} \tag{5}$$

унитарна для $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

Для каждого $1 \leqslant m \leqslant n$ определим следующую *процедуру построения вейвлет-базиса первого этапа в $\mathbb{C}_N$*.

Шаг 1. Выбрать комплексные числа b_l, $0 \leqslant l \leqslant p^m - 1$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{p-1} |b_{l+kp^{m-1}}|^2 = 1, \qquad l = 0, 1, \dots, p^{m-1} - 1. \tag{6}$$

Шаг 2. Вычислить $a_0, \dots, a_{p^m-1}$ по формулам

$$a_j = p^{-m+1/2} \sum_{l=0}^{p^m-1} b_l \overline{w_l^{(p^m)}(j)}, \qquad j = 0, 1, \dots, p^m - 1.$$

Шаг 3. Определить вектор $u_0 \in \mathbb{C}_N$, для которого

$$u_0(j) = \begin{cases} a_j & \text{для } 0 \leqslant j \leqslant p^m - 1, \\ 0 & \text{для } p^m \leqslant j \leqslant p^n - 1. \end{cases} \tag{7}$$

Шаг 4. Найти векторы $u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_N$ такие, что для всех $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ матрица (5) унитарна.

С помощью теоремы 1 проверяется, что полученный набор векторов $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Шаг 4 этой процедуры в случае $p = 2$ осуществляется по формуле

$$u_1(j) = (-1)^j \overline{u_0(1 \oplus_2 j)}, \qquad j \in \mathbb{Z}_N, \tag{8}$$

а алгоритмы реализации этого шага при $p > 2$ приведены в [7; § 2.6]. Один из этих алгоритмов основан на *преобразовании Хаусхольдера* и может быть задан формулами

$$\widehat{u}_k(l) = \overline{\widehat{u}_0(l+kN_1)}\, \frac{1 - \widehat{u}_0(l)}{1 - \overline{\widehat{u}_0(l)}}, \qquad \widehat{u}_k(l+jN_1) = \delta_{kj} - \frac{\widehat{u}_0(l+jN_1)\overline{\widehat{u}_0(l+kN_1)}}{1 - \overline{\widehat{u}_0(l)}}, \tag{9}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, $k, j = 1, 2, \dots, p-1$ и $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

Пример 1. Пусть $N > p$. Возьмем $m = 1$ и $b_0 = 1$, $b_1 = \dots = b_{p-1} = 0$. Тогда система $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ порождается векторами

$$u_\mu = p^{-1/2}(1, \varepsilon_p^\mu, \varepsilon_p^{2\mu}, \dots, \varepsilon_p^{(p-1)\mu}, 0, 0, \dots, 0), \qquad \mu = 0, 1, \dots, p-1.$$

В частности, при $p = 2$ имеем *базис Хаара первого этапа в* $\mathbb{C}_N$:

$$u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0\right), \qquad u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0\right).$$

Следующий пример получен модификацией ортогональных вейвлетов, построенных для группы Кантора в [3], и соответствует случаю $m = p = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = a$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$ в приведенной выше процедуре.

Пример 2. Пусть a и b – комплексные числа такие, что $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Предположим, что $p = 2$, $N \geqslant 4$, и векторы $u_0, u_1 \in \mathbb{C}_N$ заданы равенствами

$$u_0(0) = \frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, \quad u_0(1) = \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, \qquad u_0(2) = \frac{1-a-b}{2\sqrt{2}}, \quad u_0(3) = \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}},$$
$$u_1(0) = \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, \quad u_1(1) = -\frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, \quad u_1(2) = \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}}, \quad u_1(3) = -\frac{1-a-b}{2\sqrt{2}}$$

при условии, что $u_0(j) = u_1(j) = 0$ для $4 \leqslant j \leqslant N-1$. Тогда векторы u_0, u_1 порождают вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Отметим, что при $a = 1$, $b = 0$ полученный вейвлет-базис $B(u_0, u_1)$ совпадает с вейвлет-базисом Хаара первого этапа из примера 1.

Следующие два примера аналогичны соответственно примерам 3 и 4 в [4].

Пример 3. Пусть $p = 2$, $n > 3$, $m = 3$. Положим

$$(b_0, b_1, \dots, b_7) = \frac{1}{2}(1, a, b, c, 0, \alpha, \beta, \gamma),$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда в соответствии с (7) имеем

$$u_0(0) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma), \qquad u_0(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma),$$
$$u_0(2) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma), \qquad u_0(3) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + a - b - c - \alpha + \beta + \gamma),$$
$$u_0(4) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - a + b - c - \alpha + \beta - \gamma), \qquad u_0(5) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - a + b - c + \alpha - \beta + \gamma),$$
$$u_0(6) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - a - b + c - \alpha - \beta + \gamma), \qquad u_0(7) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - a - b + c + \alpha + \beta - \gamma).$$

Далее, положим $u_1(j) = u_0(j) = 0$ для $8 \leqslant j \leqslant 2^n - 1$, а остальные компоненты вектора u_1 выберем так, чтобы выполнялись равенства (8), т.е.

$$u_1(0) = \overline{u_0(1)}, \qquad u_1(1) = -\overline{u_0(0)}, \qquad u_1(2) = \overline{u_0(3)}, \qquad u_1(3) = -\overline{u_0(2)},$$
$$u_1(4) = \overline{u_0(5)}, \qquad u_1(5) = -\overline{u_0(4)}, \qquad u_1(6) = \overline{u_0(7)}, \qquad u_1(7) = -\overline{u_0(6)}.$$

Полученная пара u_0, u_1 порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Пример 4. Пусть $p = 3$, $n > 2$, $m = 2$ и

$$(b_0, b_1, \dots, b_8) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, a, \alpha, 0, b, \beta, 0, c, \gamma),$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда, применяя (6) и (7), получим

$$\begin{aligned}
u_0(0) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),\\
u_0(1) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + \alpha(b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3),\\
u_0(2) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2),\\
u_0(3) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3),\\
u_0(4) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3),\\
u_0(5) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3),\\
u_0(6) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2),\\
u_0(7) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2),\\
u_0(8) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\,(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$. Положим $u_0(j) = u_1(j) = u_2(j) = 0$ для $9 \leqslant j \leqslant 3^n - 1$ и определим с помощью формул (9) остальные компоненты векторов $u_1, u_2 \in \mathbb{C}_N$ так, чтобы матрица

$$\frac{9}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l)\\ \widehat{u}_0(l+3) & \widehat{u}_1(l+3) & \widehat{u}_2(l+3)\\ \widehat{u}_0(l+6) & \widehat{u}_1(l+6) & \widehat{u}_2(l+6)\end{pmatrix}$$

была унитарной для $l = 0, 1, 2$. Полученный набор из трех векторов u_0, u_1, u_2 порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Значения параметров b_l в примерах 2–4 универсальны в том смысле, что они возникают не только при построении вейвлет-базисов в $\mathbb{C}_N$, но также и в соответствующих примерах для пространств $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$. Вместе с тем, при построении ортогональных вейвлетов на группах Кантора и Виленкина (а также на полупрямой $\mathbb{R}_+$; см. [8], [9]) требуется еще некоторое дополнительное ограничение, связанное с условием отсутствия у масок блокирующих множеств (так, в примере 2 пара $a = 0$, $b = 1$ приводит к вейвлет-базису пространства $\mathbb{C}_N$, а в оригинальном примере Лэнга этой паре соответствует линейно зависимая система; см. пример 2 в [4]). Бо́льшая свобода в выборе значений параметров при построении ортогональных вейвлетов в пространстве $\mathbb{C}_N$ излагаемым методом проявляется в том, что в соответствии с шагом 1 приведенной выше процедуры *в качестве* $(b_0, b_1, \dots, b_{p^m-1})$ *можно выбрать любой комплексный вектор размерности* p^m, *удовлетворяющий* *условию* (6) (сравните с построением дискретных вейвлетов Добеши в [6] и [10]). Это свойство существенно для приложений, так как расширяет возможности применения известных адаптивных методов аппроксимации сигналов (см., например, главы 8–10 в книге Малла [11]).

Определение 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. *Последовательностью ортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа* называется последовательность векторов

$$u_0^{(1)},\ u_1^{(1)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(1)},\qquad \ldots,\qquad u_0^{(m)},\ u_1^{(m)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(m)}$$

таких, что $u_\mu^{(\nu)} \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$ для $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$ и матрицы

$$A^{(\nu)}(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0^{(\nu)}(l) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l) & \ldots & \widehat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l) \\ \widehat{u}_0^{(\nu)}(l+N_\nu) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l+N_\nu) & \ldots & \widehat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l+N_\nu) \\ \widehat{u}_0^{(\nu)}(l+2N_\nu) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l+2N_\nu) & \ldots & \widehat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l+2N_\nu) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{u}_0^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu) & \widehat{u}_1^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu) & \ldots & \widehat{u}_{p-1}^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu) \end{pmatrix}$$

унитарны для $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $l = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$.

Теорема 2. *Пусть набор векторов $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ порождает вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. Для данного $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, положим*

$$u_\mu^{(1)}(j) = u_\mu(j), \quad u_\mu^{(\nu)}(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} u_\mu^{(1)}(j + kN_{\nu-1}), \qquad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}, \tag{10}$$

где $\nu = 2, \ldots, m$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$. Тогда векторы

$$u_0^{(1)},\ u_1^{(1)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(1)},\qquad \ldots,\qquad u_0^{(m)},\ u_1^{(m)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(m)},$$

образуют последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа.

Таким образом, по данному вектору $u_0 \in \mathbb{C}_N$, определенному согласно (6) и (7), можно сначала с помощью формул (8) или (9) найти вейвлет-базис первого этапа $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$, а затем, пользуясь формулами (10), получить последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа. Обозначим через $\oplus$ прямую сумму подпространств пространства $\mathbb{C}_N$. Согласно следующей теореме по любой последовательности ортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа можно построить ортонормированный вейвлет-базис в $\mathbb{C}_N$.

Теорема 3. *Пусть в пространстве $\mathbb{C}_N$ задана последовательность ортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа*:

$$u_0^{(1)},\ u_1^{(1)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(1)},\qquad \ldots,\qquad u_0^{(m)},\ u_1^{(m)},\ \ldots,\ u_{p-1}^{(m)}.$$

Положим $\varphi^{(1)} = u_0^{(1)}$, $\psi_\mu^{(1)} = u_\mu^{(1)}$, $\mu = 1, \ldots, p-1$, и определим $\varphi^{(\nu)}$, $\psi_\mu^{(\nu)}$ для $\nu = 2, \ldots, m$, $\mu = 1, \ldots, p-1$ по формулам

$$\varphi^{(\nu)} = \varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1} u_0^{(\nu)}, \qquad \psi_\mu^{(\nu)} = \varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1} u_\mu^{(\nu)}.$$

Далее, для $\nu = 1, \ldots, m$, $\mu = 1, \ldots, p-1$ *положим*

$$\varphi_{-\nu,k} = T_{p^\nu k}\varphi^{(\nu)}, \quad \psi_{-\nu,k}^{(\mu)} = T_{p^\nu k}\psi_\mu^{(\nu)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,$$

и определим подпространства

$$V_{-\nu} = \operatorname{span}\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1}, \qquad W_{-\nu}^{(\mu)} = \operatorname{span}\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1},$$
$$W_{-\nu} = W_{-\nu}^{(1)} \oplus \cdots \oplus W_{-\nu}^{(p-1)}.$$

Тогда имеет место разложение

$$\mathbb{C}_N = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \cdots \oplus W_{-m} \oplus V_{-m} \tag{11}$$

и для каждого $\nu = 1, 2, \ldots, m$ *выполнены следующие свойства*:

(a) $V_{-\nu} = V_{-\nu-1} \oplus W_{-\nu-1}$;

(b) $\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – *ортонормированный базис в* $V_{-\nu}$;

(c) $\{\psi_{-\nu,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \cdots \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – *ортонормированный базис в* $W_{-\nu}$.

Эта теорема обосновывает метод построения подпространств $V_{-1}, \ldots, V_{-n}$ в $\mathbb{C}_N$ со следующими свойствами:

(i) $V_{-\nu-1} \subset V_{-\nu}$ для всех $\nu \in \{1, 2, \ldots n\}$;

(ii) для каждого $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует вектор $\varphi^{(\nu)} \in V_{-\nu}$ такой, что система $\{T_{p^\nu k}\varphi^{(\nu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ является ортонормированным базисом в $V_{-\nu}$;

(iii) для каждого $1 \leqslant m \leqslant n$ верно равенство (11);

(iv) для каждого $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют векторы $\psi_1^{(\nu)}, \ldots, \psi_{p-1}^{(\nu)} \in W_{-\nu}$ такие, что система $\bigcup_{\mu=1}^{p-1}\{T_{p^\nu k}\psi_\mu^{(\nu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ – ортонормированный базис в $W_{-\nu}$.

Подобная конструкция в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ хорошо известна и связана с понятием *кратномасштабного анализа*. В соответствии с принятой в теории кратномасштабного анализа терминологией, указанную в свойстве (ii) последовательность $\{\varphi^{(\nu)}\}_{\nu=1}^n$ естественно называть *масштабирующей последовательностью* в $\mathbb{C}_N$.

В частности, при $p = 2$, $n = 3$ по теореме 3 получаются три ортонормированных вейвлет-базиса в $\mathbb{C}_8$:

$$\begin{aligned} &\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\varphi_{-1,k}\}_{k=0}^3, && m = 1,\\ &\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^1 \cup \{\varphi_{-2,k}\}_{k=0}^1, && m = 2,\\ &\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^3 \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^1 \cup \{\psi_{-3,0}\} \cup \{\varphi_{-3,0}\}, && m = 3. \end{aligned}$$

В случае Хаара (см. пример 1) эти базисы состоят из векторов

$$\begin{aligned} \varphi_{-1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0,0,0,0,0), & \psi_{-1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0,0,0,0,0),\\ \varphi_{-1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1,0,0,0,0), & \psi_{-1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1,0,0,0,0),\\ \varphi_{-1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,0,1,1,0,0), & \psi_{-1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,0,1,-1,0,0),\\ \varphi_{-1,3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,0,0,0,1,1), & \psi_{-1,3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,0,0,0,1,-1), \end{aligned}$$

$$\varphi_{-2,0} = \frac{1}{2}(1,1,1,1,0,0,0,0), \qquad \psi_{-2,0} = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1,0,0,0,0),$$
$$\varphi_{-2,1} = \frac{1}{2}(0,0,0,0,1,1,1,1), \qquad \psi_{-2,1} = \frac{1}{2}(0,0,0,0,1,1,-1,-1),$$
$$\varphi_{-3,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1), \qquad \psi_{-3,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).$$

В общем случае ортогональные проекторы $P_{-\nu}\colon \mathbb{C}_N \to V_{-\nu}$ и $Q_{-\nu}\colon \mathbb{C}_N \to W_{-\nu}$ действуют по формулам

$$P_{-\nu}x = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \langle x, \varphi_{-\nu,k}\rangle \varphi_{-\nu,k}, \quad Q_{-\nu}x = \sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1} \langle x, \psi^{(\mu)}_{-\nu,k}\rangle \psi^{(\mu)}_{-\nu,k}, \qquad x \in \mathbb{C}_N. \tag{12}$$

Пусть I – тождественный оператор на $\mathbb{C}_N$. Полагая $P_0 = I$, $V_0 = \mathbb{C}_N$, по теореме 3 для любого $x \in \mathbb{C}_N$ получаем равенства

$$x = P_{-\nu}x + \sum_{k=1}^{\nu} Q_{-k}x, \quad P_{-\nu+1}x = P_{-\nu}x + Q_{-\nu}x, \qquad \nu = 1,2,\dots,n.$$

Произвольный вектор x из $\mathbb{C}_N$ можно рассматривать как входной сигнал $a_0 = x$ и для $\nu = 1,2,\dots,m$ положить

$$a_\nu = D(a_{\nu-1} * \widetilde{u}^{(\nu)}_0), \quad d^{(\mu)}_\nu = D(a_{\nu-1} * \widetilde{u}^{(\nu)}_\mu), \qquad \mu = 1,\dots,p-1. \tag{13}$$

Легко видеть, что компонентами векторов a_ν и $d^{(\mu)}_\nu$ являются коэффициенты разложений (12) для выбранного x. Применение формул (13) составляет *фазу анализа* сигнала x и приводит к набору векторов

$$d^{(1)}_1,\ \dots,\ d^{(1)}_{p-1}, \qquad d^{(2)}_1,\ \dots,\ d^{(2)}_{p-1}, \qquad \dots, \qquad d^{(m)}_1,\ \dots,\ d^{(m)}_{p-1}, a_m. \tag{14}$$

Обратный переход от набора (14) к исходному вектору x составляет *фазу восстановления* и определяется формулами

$$a_{\nu-1} = u^{(\nu)}_0 * Ua_\nu + \sum_{\mu=1}^{p-1} u^{(\nu)}_\mu * Ud^{(\nu)}_\mu, \qquad \nu = m, m-1, \dots, 1. \tag{15}$$

Формулы (13) и (15) задают *прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования*, ассоциированные с последовательностью вейвлет-фильтров

$$u^{(1)}_0,\ u^{(1)}_1,\ \dots,\ u^{(1)}_{p-1}, \qquad u^{(2)}_0,\ u^{(2)}_1,\ \dots,\ u^{(2)}_{p-1}, \qquad \dots, \qquad u^{(m)}_0,\ u^{(m)}_1,\ \dots,\ u^{(m)}_{p-1},$$

и реализуются с помощью быстрых алгоритмов (сравните с [6; § 3.2], [8; § 4]).

2. Доказательства. Имеет место следующий критерий ортонормированности системы сдвигов элемента из $\mathbb{C}_N$.

Предложение 1. *Пусть $u \in \mathbb{C}_N$, $\nu \in \{0,1,\dots,n\}$. Система $\{T_{p^\nu k}u\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда*

$$|\widehat{u}(l)|^2 + |\widehat{u}(l+N_\nu)|^2 + \dots + |\widehat{u}(l+(p^\nu-1)N_\nu)|^2 = \frac{p^\nu}{N^2} \tag{16}$$

для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$.

Доказательство. Согласно (2) имеем

$$(\widehat{T_{p^\nu k}u})(l) = \overline{w_{p^\nu k}^{(N)}(l)}\widehat{u}(l).$$

Пользуясь равенством Парсеваля, отсюда получаем

$$\langle u, T_{p^\nu k}u\rangle = N\sum_{l=0}^{N-1}|\widehat{u}(l)|^2 w_{p^\nu k}^{(N)}(l) = N\sum_{\mu=0}^{p^\nu-1}\sum_{l=0}^{N_\nu-1}|\widehat{u}(l+\mu N_\nu)|^2 w_k^{(N)}(p^\nu(l+\mu N_\nu))$$

$$= \frac{1}{N_\nu}\sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_{p^\nu k}^{(N)}(l)\frac{N^2}{p^\nu}\sum_{\mu=0}^{p^\nu-1}|\widehat{u}(l+\mu N_\nu)|^2. \tag{17}$$

Таким образом, произведение $N_\nu\langle u, T_{p^\nu k}u\rangle$ совпадает с обратным преобразованием Виленкина–Крестенсона в $\mathbb{C}_{N_\nu}$ последовательности

$$\Phi_\nu(l) := \frac{N^2}{p^\nu}\sum_{\mu=0}^{p^\nu-1}|\widehat{u}(l+\mu N_\nu)|^2, \qquad l\in\mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_{p^\nu k}^{(N)}(l) = \sum_{l=0}^{N_\nu-1} w_l^{(N_\nu)}(k) = N_\nu\delta_{N_\nu}(k), \qquad k\in\mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Следовательно, равенство

$$\langle u, T_{p^\nu k}u\rangle = \begin{cases}1 & \text{для } k=0,\\ 0 & \text{для } k=1,\dots,N_\nu-1,\end{cases}$$

выполнено в том и только том случае, когда

$$\sum_{\mu=0}^{p^\nu-1}|\widehat{u}(l+\mu N_\nu)|^2 = \frac{p^\nu}{N^2}, \qquad l\in\mathbb{Z}_{N_\nu}.$$

Кроме того, применяя (3), для любых $k,l\in\mathbb{Z}_{N_\nu}$ имеем

$$\langle T_{p^\nu k}u, T_{p^\nu l}u\rangle = \langle u, T_{p^\nu(l\ominus_p k)}u\rangle;$$

значит, ортонормированность системы $\{T_{p^\nu k}u\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ равносильна условию (16). Предложение 1 доказано.

При $\nu=0$ из предложения 1 следует, что *система сдвигов* $\{T_k u\}_{k=0}^{N-1}$ *ортонормирована в* $\mathbb{C}_N$ *тогда и только тогда, когда* $|\widehat{u}(l)| = N^{-1}$ *для всех* $l\in\mathbb{Z}_N$ (согласно (2) при этом равенство $|(\widehat{T_k u})(l)| = N^{-1}$ выполнено для всех $k,l\in\mathbb{Z}_N$).

Предложение 2. *Пусть* $u,v\in\mathbb{C}_N$. *Условие ортогональности*

$$\langle T_{p\ k}u, T_{p\ l}v\rangle = 0, \qquad k,l\in\mathbb{Z}_{N_1}, \tag{18}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=0}^{p-1}\widehat{u}(l+jN_1)\overline{\widehat{v}(l+jN_1)} = 0, \qquad l\in\mathbb{Z}_{N_1}. \tag{19}$$

Доказательство. В силу (3) условие (18) эквивалентно равенствам

$$\langle u, T_{p\,k} v\rangle = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}_{N_1}.$$

Отсюда, поскольку

$$\langle u, T_{p\,k} v\rangle = N \sum_{l=0}^{N_1-1} \overline{w_{p\,k}^{(N)}(l)} \sum_{\mu=0}^{p-1} \widehat{u}(l+\mu N_1))\widehat{v}(l+\mu N_1)), \qquad k \in \mathbb{Z}_{N_1},$$

(эта формула устанавливается аналогично (17)) следует, что (18) эквивалентно (19). Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. По предложению 1 системы

$$\{T_{p\,k}u_0\}_{k=0}^{N_1-1}, \qquad \dots, \qquad \{T_{p\,k}u_{p-1}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

ортонормированы в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда векторы-столбцы

$$\frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_{p-1}(l) \\ \widehat{u}_{p-1}(l+N_1) \\ \widehat{u}_{p-1}(l+2N_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \widehat{u}_{p-1}(l+(p-1)N_1) \end{pmatrix} \tag{20}$$

имеют длины, равные 1. Кроме того, по предложению 2 условие

$$\langle T_{p\,k}u_\mu, T_{p\,j}u_\nu\rangle = 0, \qquad \mu \ne \nu, \quad k, j \in \mathbb{Z}_{N_1},$$

равносильно попарной ортогональности векторов (20). Остается заметить, что число элементов системы $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ для данного набора векторов совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для $\mu = 0, 1, \dots, p-1$, $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\mu^{(2)}(l) &= \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} u_\mu^{(2)}(j)\overline{w_l^{(N_1)}(j)} = \frac{1}{pN_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{p-1} u_\mu^{(1)}(j+kN_1)\overline{w_{p\,l}^{(pN_1)}(j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{p-1} u_\mu^{(1)}(j+kN_1)\overline{w_{p\,l}^{(N)}(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_\mu^{(1)}(j)\overline{w_{p\,l}^{(N)}(j)} = \widehat{u}_\mu^{(1)}(p\,l). \end{aligned}$$

Применяя индукцию, для любого $\nu \in \{2, \dots, m\}$ получаем

$$\widehat{u}_\mu^{(\nu)}(l) = \widehat{u}_\mu^{(1)}(p^{\nu-1}l), \qquad \mu = 0, 1, \dots, p-1, \quad l \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}.$$

Поэтому для любого $\nu \in \{1, 2, \dots, m\}$ справедливо равенство $A^{(\nu)}(l) = A^{(1)}(p^{\nu-1}l)$, где в силу теоремы 1 матрица $A^{(1)}(p^{\nu-1}l)$ унитарна для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}$. Теорема 2 доказана.

Предложение 3. *Пусть* $f \in \mathbb{C}_N$ *и* $u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, *где* $1 \leqslant \nu \leqslant n$. *Предположим, что система* $\{T_{p^{\nu-1}k}f\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1}$ *ортонормирована в* $\mathbb{C}_N$, *а система*

$$\{T_{pk}u_0\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \dots \cup \{T_{pk}u_{p-1}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$$

является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$. *Положим*

$$g = f * U^{\nu-1}u_0, \qquad h_1 = f * U^{\nu-1}u_1, \quad \ldots, \quad h_{p-1} = f * U^{\nu-1}u_{p-1}. \tag{21}$$

Тогда система

$$\{T_{p^\nu k} g\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \{T_{p^\nu k} h_1\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \cdots \cup \{T_{p^\nu k} h_{p-1}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \tag{22}$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$.

Доказательство. Для произвольного $k \in \{0, 1, \ldots, N_{\nu-1} - 1\}$ в силу (3), (4) и (21) имеем

$$\langle g, T_{p^\nu k} g\rangle = g * \widetilde{g}(p^\nu k) = (f * U^{\nu-1}u_0 * \widetilde{f} * U^{\nu-1}\widetilde{u}_0)(p^\nu k) = (f * \widetilde{f}\,) * (U^{\nu-1}(u_0 * \widetilde{u}_0))(p^\nu k)$$

или по определению свертки

$$\langle g, T_{p^\nu k} g\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} (f * \widetilde{f}\,)(p^\nu k \ominus_p j)(U^{\nu-1}(u_0 * \widetilde{u}_0))(j).$$

Поскольку

$$U^{\nu-1}(u_0 * \widetilde{u}_0)(j) = \begin{cases} (u_0 * \widetilde{u}_0)\left(\dfrac{j}{p^{\nu-1}}\right), & \text{если } j \text{ делится на } p^{\nu-1}, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } p^{\nu-1}, \end{cases}$$

то

$$\langle g, T_{p^\nu k} g\rangle = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} (f * \widetilde{f}\,)(p^\nu k \ominus_p p^{\nu-1}m)(u_0 * \widetilde{u}_0)(m).$$

Учитывая ортонормированность системы $\{T_{p^{\nu-1}k} f\}_{k=0}^{N_{\nu-1}-1}$, для произвольного $m \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}$ получаем

$$f * \widetilde{f}(p^{\nu-1}(pk \ominus_p m)) = \langle f, T_{p^{\nu-1}(pk \ominus_p m)} f\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } m = pk, \\ 0, & \text{если } m \neq pk. \end{cases}$$

Поэтому

$$\langle g, T_{p^\nu k} g\rangle = (u_0 * \widetilde{u}_0)(pk) = \langle u_0, T_{pk} u_0\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k = 1, 2, \ldots, N_\nu - 1. \end{cases}$$

Для каждого $\mu \in \{1, \ldots, p-1\}$ аналогично имеем

$$\langle h_\mu, T_{p^\nu k} h_\mu\rangle = \langle g, T_{p^\nu k} h_\mu\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k = 1, 2, \ldots, N_\nu - 1. \end{cases}$$

Следовательно, система (22) ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Предложение 3 доказано.

Доказательство теоремы 3. Равенство $\mathbb{C}_N = W_{-1} \oplus V_{-1}$ и свойства (b), (c) для $\nu = 1$ следуют из того, что по теореме 1 система

$$\{\varphi_{-1,k}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{\psi_{-1,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-1,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$. По условию,

$$\varphi_{-2,k} = T_{p^2k}\varphi^{(2)}, \quad \psi_{-2,k}^{(\mu)} = T_{p^2k}\psi_\mu^{(2)}, \qquad k = 0, 1, \dots, N_2 - 1,$$

где

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} * U(u_0^{(2)}), \quad \psi_\mu^{(2)} = \varphi^{(1)} * U(u_\mu^{(2)}), \qquad \mu = 1, \dots, p-1.$$

Пользуясь предложением 3, замечаем, что система

$$\{\varphi_{-2,k}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \{\psi_{-2,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-2,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_2-1}$$

является ортонормированным базисом пространства V_1. Отсюда следует свойство (a) для $\nu = 1$.

Пусть теперь $\nu \in \{2, 3, \dots, m\}$. Применяя предложение 3 для $f = \varphi^{(\nu-1)}$, $u_0 = u_0^{(\nu)}$, …, $u_{p-1} = u_{p-1}^{(\nu)}$, получаем, что система

$$\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-\nu,k}^{(p-1)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \tag{23}$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Поэтому

$$\langle \varphi_{-\nu,k}, \psi_{-\nu,l}^{(\mu)} \rangle = \langle \psi_{-\nu,k}^{(\mu')}, \psi_{-\nu,l}^{(\mu)} \rangle = 0 \quad \text{для} \quad k, l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}, \quad \mu, \mu' \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \mu \neq \mu'. \tag{24}$$

Далее, для произвольных $k \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$, $j \in \mathbb{Z}_N$ имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_{-\nu,k}(j) &= \varphi^{(\nu)}(j \ominus_p p^\nu k) = (\varphi^{(\nu-1)} * U^{\nu-1}u_0^{(\nu)})(j \ominus_p p^\nu k) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \varphi^{(\nu-1)}(j \ominus_p p^\nu k \ominus_p m) U^{\nu-1}u_0^{(\nu)}(m) \\
&= \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} \varphi^{(\nu-1)}(j \ominus_p p^\nu k \ominus_p p^{\nu-1}m)\, u_0^{(\nu)}(m) \\
&= \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_0^{(\nu)}(m) T_{p^{\nu-1}(pk \oplus_p m)} \varphi^{(\nu-1)}(j).
\end{aligned}$$

Значит, для любого $k \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$

$$\varphi_{-\nu,k} = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_0^{(\nu)}(m) \varphi_{-\nu+1, pk \oplus_p m}. \tag{25}$$

Аналогично, для всех $k \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$, $\mu \in \{1, \dots, p-1\}$

$$\psi_{-\nu,k}^{(\mu)} = \sum_{m=0}^{N_{\nu-1}-1} u_\mu^{(\nu)}(m) \varphi_{-\nu+1, pk \oplus_p m}. \tag{26}$$

Из формул (24)–(26) следуют соотношения

$$V_{-\nu}\perp W_{-\nu}, \quad V_{-\nu}\subset V_{-\nu+1}, \quad W_{-\nu}\subset V_{-\nu+1}$$

и, так как $\dim V_{-\nu}+\dim W_{-\nu}=\dim V_{-\nu+1}$, то $V_{-\nu+1}$ является прямой суммой подпространств $V_{-\nu}$ и $W_{-\nu}$:

$$V_{-\nu+1}=V_{-\nu}\oplus W_{-\nu}. \tag{27}$$

Отсюда и из ортонормированности системы (23) следуют свойства (a)–(c) для каждого ν. Для доказательства разложения (11) покажем, что система

$$\bigcup_{\mu=1}^{p-1}\{\psi_{-1,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_1-1}\cup\bigcup_{\mu=1}^{p-1}\{\psi_{-2,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_2-1}\cup\dots\cup\bigcup_{\mu=1}^{p-1}\{\psi_{-m,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_m-1}\cup\{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1} \tag{28}$$

ортонормирована в $\mathbb{C}_N$. Из ортонормированности системы (23) следуют равенства (24) и ортонормированность каждой из систем $\{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ и $\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$. Предположим, что $\nu'<\nu$ и рассмотрим элементы $\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}$ и $\psi_{-\nu',l}^{(\mu)}$. Тогда $\psi_{-\nu',k}^{(\mu)}\in W_{-\nu'}$ и по доказанному

$$\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\in W_{-\nu}\subset V_{-\nu+1}\subset\dots\subset V_{-\nu'}.$$

Учитывая (27), отсюда получаем, что множества

$$\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1} \qquad \text{и} \qquad \{\psi_{-\nu',l}^{(\mu)}\}_{l=0}^{N_{\nu'}-1}$$

ортогональны. Аналогично, множество $\{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1}$ ортогонально любому из множеств $\{\psi_{-\nu,k}^{(\mu)}\}_{k=0}^{N_\nu-1}$, $1\leqslant\nu\leqslant m$. Остается заметить, что число элементов множества (28) совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Пусть $m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$. Для данной последовательности векторов

$$u_0^{(1)},\ \dots,\ u_{p-1}^{(1)},\qquad v_0^{(1)},\ \dots,\ v_{p-1}^{(1)},\qquad \dots,\qquad u_0^{(m)},\ \dots,\ u_{p-1}^{(m)},\qquad v_0^{(m)},\ \dots,\ v_{p-1}^{(m)}, \tag{29}$$

таких, что $u_\mu^{(\nu)},v_\mu^{(\nu)}\in\mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$ для $\nu=1,2,\dots,m$, $\mu=0,1,\dots,p-1$, матрицы $A^{(\nu)}(l)$ введем как в определении 2 и положим

$$\overline{B}^{(\nu)}(l):=\frac{N}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}\overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l)}\\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l+N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l+N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l+N_\nu)}\\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l+2N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l+2N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l+2N_\nu)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{\widehat{v}_0^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu)} & \overline{\widehat{v}_1^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu)} & \dots & \overline{\widehat{v}_{p-1}^{(\nu)}(l+(p-1)N_\nu)}\end{pmatrix}^T,$$

где T обозначает транспонирование. Будем говорить, что векторы (29) образуют *последовательность биортогональных вейвлет-фильтров m-го этапа*, если

$$\overline{B}^{(\nu)}(l)A^{(\nu)}(l)=E_p, \qquad \nu=1,2,\dots,m, \quad l=0,1,\dots,N_\nu-1,$$

где E_p – единичная матрица порядка p. Пользуясь этим определением, можно обобщить приведенную выше конструкцию на биортогональный случай и вместо примеров 2–4 получить дискретные аналоги соответствующих примеров из [5]. Ограничимся здесь формулировкой следующего аналога предложения 1.

Предложение 4. *Пусть* $u, v \in \mathbb{C}_N$, $\nu \in \{0, 1, \dots, n\}$. *Системы*

$$\{T_{p^\nu k}u\}_{k=0}^{N_\nu-1} \qquad u \qquad \{T_{p^\nu k}u\}_{k=0}^{N_\nu-1}$$

биортонормированы в $\mathbb{C}_N$ *тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{u}(l)\overline{\widehat{v}(l)} + \widehat{u}(l+N_\nu)\overline{\widehat{v}(l+N_\nu)} + \dots + \widehat{u}(l+(p^\nu-1)N_\nu)\overline{\widehat{v}(l+(p^\nu-1)N_\nu)} = \frac{p^\nu}{N^2}$$

для всех $l \in \mathbb{Z}_{N_\nu}$.

Замечание 2. Пусть $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ – обобщенная система Уолша, определяемая по данному $p \geqslant 2$ и образующая ортонормированный базис в L^2-пространстве на интервале $\Delta = [0, 1)$ (случай $p = 2$ соответствует классической системе Уолша; см., например, [1]). Каждой последовательности $x = (x_0, x_1, \dots)$ из $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ сопоставим функцию $\widehat{x} := \sum_{k=0}^{\infty} x_k w_k$ в $L^2(\Delta)$. Пользуясь этим отображением вместо преобразования Виленкина–Крестенсона, можно доказать аналоги теорем 1–3 для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (сравните с [6; глава 4]) и получить дискретные непериодические аналоги вейвлет-базисов из [4] и [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: теория и применения*, Изд-во ЛКИ, М., 2008.

[2] В. Н. Малоземов, С. М. Машарский, “Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 111–157.

[3] W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.

[4] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952.

[5] Ю. А. Фарков, “Биортогональные всплески на группах Виленкина”, *Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 110–124.

[6] М. Фрейзер, *Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры*, БИНОМ. Лаб. знаний, М., 2008.

[7] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[8] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.

[9] Yu. A. Farkov, “On wavelets related to the Walsh series”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 259–279.

[10] S. A. Broughton, K. Bryan, *Discrete Fourier Analysis and Wavelets. Applications to Signal and Image Processing*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2009.

[11] С. Малла, *Вейвлеты в обработке сигналов*, Мир, М., 2005.

Ю. А. Фарков
Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru

Поступило
20.01.2010