Российский государственный геологоразведочный университет

Кафедра высшей математики и математического моделирования

Ю.А.Фарков

Ряды Фурье в пространствах со скалярным произведением

Лекции для студентов, обучающихся по специальности
"Прикладная математика"

Москва 2006

Скалярное произведение в линейных пространствах

Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) с нулевым элементом θ. *Скалярным произведением* в X называется функция, отображающая $X \times X$ в $\mathbf{R}$ (или в $\mathbf{C}$), обозначаемая $(\cdot\,,\cdot)$ и обладающая следующими свойствами:

1) для всех $x_1, x_2, y \in X$ и всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$)

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = (\alpha_1 x_1, y) + (\alpha_2 x_2, y)$$

(*линейность по первому аргументу*);

2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ для всех $x, y \in X$ (*эрмитовская симметричность*, в вещественном случае – обычная *симметричность*: $(y, x) = (x, y)$);

3) $(x, x) \geq 0$ для любого $x \in X$, причем $(x, x) \geq 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (*положительная определенность*).

Из свойств 1) и 2) следуют равенства

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, \alpha_1 y_1) + (x, \alpha_2 y_2) \quad \text{и} \quad (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y).$$

В произвольном пространстве со скалярным произведением имеет место *неравенство Коши – Буняковского*:

$$|\,(x, y)\,|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Для доказательства этого неравенства (при $y \neq \theta$) достаточно положить

$$\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

и, выполнив преобразования

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2 (y, y) =$$

$$= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)},$$

заметить, что

$$(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 = (y, y)(x + \alpha y, x + \alpha y) \geq 0.$$

Отсюда видно, что неравенство Коши – Буняковского обращается в равенство только в том случае, когда x и y пропорциональны.

Приведем примеры скалярных произведений в некоторых линейных пространствах.

1. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

2. Пространство l^2 последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} |\, x|^2 < +\infty$:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

3. Пространство $l^2(\mathbf{Z})$ бесконечных в обе стороны последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$, для которых $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\, x|^2 < +\infty$:

$$(x, y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k \bar{y}_k.$$

4. Пространство $L^2[a, b]$ измеримых функций $f:\ [a, b] \to \mathbf{C}$, для которых $\int_a^b |\, f(t)|^2\, dt < +\infty$:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

5. Пространство $L^2(\mathbf{R})$ измеримых функций $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, для которых $\int_{\mathbf{R}} |\, f(t)|^2\, dt < +\infty$:

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Обозначения l^2, $l^2(\mathbf{Z})$, $L^2[a, b]$, $L^2(\mathbf{R})$ применяются и для соответствующих пространств вещественных последовательностей или функций (тогда в скалярных произведениях черта не ставится). Напомним, что в пространствах $L^2[a, b]$ и $L^2(\mathbf{R})$ функции, совпадающие почти всюду, отождествляются.

Ортогональные системы и минимальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть X – линейное пространство (вещественное или комплексное) со скалярным произведением $(\cdot\, , \cdot)$ и нулевым элементом θ. Норма в X определяется равенством

$$||\, x|| = \sqrt{(x, x)},$$

а расстояние между $x, y \in X$ определяется по формуле

$$d(x, y) = ||\, x - y||.$$

Сходимость в X определяется как сходимость по норме:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{n \to \infty} ||\, x_n - x_0|| = 0.$$

Относительно этой сходимости *скалярное произведение непрерывно*: если $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$, то $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Это свойство следует из неравенств

$$|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| \le |(x_n, y_n - y_0)| + |(x_n - x_0, y_0)| \le ||\, x_n||\, ||\, y_n - y_0\, || + ||\, x_n - x_0\, ||\, ||\, y_n\, ||$$

и ограниченности сходящейся последовательности $\{x_n\}$.

Элементы $x, y \in X$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ – конечная или счетная система элементов в X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *ортогональной* в X, если ее элементы попарно ортогональны, т.е.

$$(\varphi_k, \varphi_l) = 0 \quad \text{для} \quad k \neq l.$$

Система $\{\varphi_k\}$ называется *ортонормированной* в X, если она ортогональна и нормы всех элементов этой системы равны 1. Иначе говоря,

$$(\{\varphi_k\} - \text{ ортонормирована в } X) \Leftrightarrow (\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{k,l},$$

где $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Напомним, что система из n элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, линейного пространства X называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих элементов

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n$$

равна нулевому элементу θ только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации нули. Иначе говоря, система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независима, если верна импликация:

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = \theta) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0).$$

В бесконечномерном пространстве X счетная система $\{\varphi_k\}$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Предложение 1. *Если система $\{\varphi_k\}$ ортогональна в X и не содержит нулевого элемента, то система $\{\varphi_k\}$ линейно независима. В частности, любая ортонормированная система линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что некоторая линейная комбинация n первых элементов данной системы $\{\varphi_k\}$ равна нулевому элементу пространства X:

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = \theta. \tag{1}$$

Умножая обе части равенства (1) последовательно на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, получим

$$\alpha_j(\varphi_j, \varphi_j) = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Так как $(\varphi_j, \varphi_j) > 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Таким образом, система $\{\varphi_k\}$ линейно независима.

□

Предложение 2. *Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система в X, не содержащая нулевого элемента. Если некоторый элемент $x \in X$ представим в виде ряда*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

то коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле

$$c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $n, k \in \mathbf{N}$. Из формулы

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j$$

при $n > k$ имеем

$$(s_n, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j (\varphi_j, \varphi_k) = c_k (\varphi_k, \varphi_k).$$

Полагая $n \to \infty$ и пользуясь непрерывностью скалярного произведения, получаем $(x, \varphi_k) = c_k (\varphi_k, \varphi_k)$.

□

Для произвольного элемента $x \in X$ коэффициенты c_k, определенные по формуле (2), называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$. Отметим, что

$$(\varphi_k, \varphi_k) = ||\varphi_k||^2 > 0 \quad \text{и} \quad (x, \varphi_k) = c_k ||\varphi_k||^2. \tag{3}$$

Предложение 3. *Пусть $x \in X$. Для любых n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо тождество*

$$||\, x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k ||^2 = ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, a_k - c_k|^2 ||\varphi_k||^2, \tag{4}$$

где c_k – коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{\varphi_k\}$.

Доказательство. В случае вещественного пространства X для произвольных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, пользуясь (3), имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right) = ||\, x||^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (x, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ||\varphi_k||^2 =$$

$$= ||\, x||^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 - 2 a_k c_k) ||\varphi_k||^2 = ||\, x||^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2 ||\varphi_k||^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 ||\varphi_k||^2.$$

Пусть теперь пространство X комплексное. Тогда для любых комплексных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = (x,x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(x,\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, x) + \sum_{k=1}^{n} |\,a_k|^2(\varphi_k,\varphi_k).$$

Преобразуем полученное выражение с помощью равенств (3) и формул

$$(\varphi_k, x) = \overline{(x,\varphi_k)} = \bar{c}_k||\varphi_k||^2,$$

$$|\,a_k - c_k|^2 = (a_k - c_k, \bar{a}_k - \bar{c}_k) = |\,a_k|^2 - a_k\bar{c}_k - \bar{a}_k c_k + |\,c_k|^2.$$

В результате получим

$$||\,x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k||^2 = (x,x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k c_k||\varphi_k||^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k\bar{c}_k||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\,a_k|^2||\varphi_k||^2 =$$

$$= ||\,x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\,c_k|^2||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\,a_k - c_k|^2||\varphi_k||^2.$$

□

Непосредственно из тождества (4) выводится следующее предложение.

Предложение 4. *Для любого $x \in X$ справедливы равенства*

$$\min_{a_1,\dots,a_n} ||\,x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k||^2 = ||\,x - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k||^2 = ||\,x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\,c_k|^2||\varphi_k||^2, \tag{5}$$

где минимум достигается только тогда, когда $a_k = c_k$ для $1 \le k \le n$.

Формула (5) выражает *минимальное свойство коэффициентов Фурье.*

Расстояние от элемента x до произвольного подпространства $\mathcal{L}$ пространства X определяется по формуле

$$\operatorname{dist}(x,\ \mathcal{L}) = \inf_{y\in\mathcal{L}} ||\,x - y||.$$

Линейная оболочка, натянутая на векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, состоит из всевозможных линейных комбинаций этих векторов и обозначается символом $\operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Согласно (5) для любого $x \in X$ имеем

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}_n) = ||x - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k||, \tag{6}$$

где $\mathcal{L}_n = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Отметим, что векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ образуют ортогональный базис пространства $\mathcal{L}_n$.

Замечание 1. В произвольном линейном пространстве X со скалярным произведением от любой линейно независимой системы $\{g_k\}$ можно перейти к ортонормированной системе $\{e_k\}$ с помощью *процесса ортогонализации Шмидта*, состоящему в следующем. Положим

$$\varphi_1 = g_1, \quad e_1 = \varphi_1/||\,\varphi_1\,||.$$

Далее полагаем

$$\varphi_2 = g_2 - (g_2, e_1)e_1, \quad e_2 = \varphi_2 / ||\, \varphi_2\, ||.$$

Вообще, если элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ уже найдены, то следующий элемент e_{k+1} определяется с помощью формул

$$\varphi_{k+1} = g_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (g_{k+1}, e_j)e_j, \quad e_{k+1} = \varphi_{k+1} / ||\, \varphi_{k+1}\, ||.$$

Полученная в результате система $\{e_k\}$ удовлетворяет условиям:

1) система $\{e_k\}$ ортонормирована в X;

2) каждый элемент e_k является линейной комбинацией первых k элементов данной системы:

$$e_k = \alpha_{k1} g_1 + \cdots + \alpha_{kk} g_k, \quad \alpha_{kk} \neq 0;$$

3) каждый элемент g_k представим в виде линейной комбинации элементов $e_1, \ldots, e_k$:

$$g_k = \beta_{k1} e_1 + \cdots + \beta_{kk} e_k, \quad \beta_{kk} \neq 0.$$

Отметим, что при этом линейные оболочки систем $\{e_1, \ldots, e_k\}$ и $\{g_1, \ldots, g_k\}$ совпадают:

$$\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_k\}, \quad k \in \mathbf{N},$$

и условиями 1) – 3) каждый элемент системы $\{e_k\}$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице.

Критерии полноты ортогональных систем

Пусть $\{\varphi_k\}$ – система элементов в нормированном пространстве X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *полной* в X, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $y \in X$ такой, что:

1) элемент y является линейной комбинацией конечного множества элементов системы $\{\varphi_k\}$,

2) элемент y удален от x на расстояние, меньшее ε: $\|x - y\| < \varepsilon$.

Условия 1) и 2) означают, что замыкание линейной оболочки системы $\{\varphi_k\}$ совпадает с пространством X. Например, система степеней $1, t, t^2, \ldots$ является полной в пространстве $C[a, b]$ (это следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимациях непрерывных функций многочленами).

Предположим теперь, что X – пространство со скалярным произведением, а система $\{\varphi_k\}$ ортогональна в X и не содержит нулевого элемента. Из минимального свойства коэффициентов Фурье следует, что система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда любой элемент $x \in X$ разлагается в *ряд Фурье* по этой системе:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где коэффициенты c_k определяются по формуле (2).

Пусть $x \in X$. Из предложения 4 для произвольного натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 \le ||\, x||^2.$$

Полагая $n \to \infty$, получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 \le ||\, x||^2. \tag{7}$$

Таким образом, для любого элемента $x \in X$ ряд в левой части неравенства (7) сходится и сумма этого ряда не превосходит $||\, x||$. Отсюда видно, что $|\, c_k|\, ||\varphi_k|| \to 0$ при $k \to \infty$ для любого $x \in X$.

Предложение 5. *Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in X$ имеет место равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k|^2 ||\, \varphi_k||^2 = ||\, x||^2. \tag{8}$$

Для доказательства предложения 5 досточно воспользоваться тождеством

$$||\, x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k||^2 = ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\, \varphi_k||^2$$

и неравенством Бесселя (7).

Предложение 6. *Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда любые элементы $x, y \in X$ удовлетворяют обобщенному уравнению замкнутости*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}||\, \varphi_k||^2, \tag{9}$$

где

$$c_k(x) = \frac{(x, \varphi_k)}{||\, \varphi_k||^2}, \quad c_k(y) = \frac{(y, \varphi_k)}{||\, \varphi_k||^2}.$$

Доказательство. Действительно, при $y = x$ из уравнения (9) получается равенство Парсеваля (8), а значит (по предложению 5) и полнота системы $\{\varphi_k\}$. Обратно, предположим, что ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X. Для любого $n \in \mathbf{N}$ из формулы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k$$

имеем

$$(s_n, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)(\varphi_k, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\overline{(y, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\overline{c_k(y)}||\, \varphi_k||^2$$

и остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

$\square$

Приведем критерий полноты ортонормированной системы в произвольном гильбертовом пространстве. Напомним, что пространства l^2 и $L^2[a,b]$ гильбертовы.

Пусть H – гильбертово пространство, т.е. полное бесконечномерное сепарабельное пространство со скалярным произведением. Возьмем в H ортонормированную счетную систему $\{e_k\}$. Коэффициенты Фурье произвольного элемента $x \in H$ по системе $\{e_k\}$ совпадают со скалярными произведениями (x, e_k). Соответственно, n-я частичная сумма ряда Фурье записывается в виде

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

По предложению 5,

$$\lim_{n\to\infty} ||\, x - s_n|| = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = ||\, x||^2.$$

Предложение 7. *Ортонормированная система $\{e_k\}$ полна в H тогда и только тогда, когда в H не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{e_k\}$.*

Доказательство. 1. Предположим, что существует элемент $x \neq \theta$, такой, что

$$(x, e_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Тогда элемент x не разложим в ряд Фурье, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = \theta \neq x.$$

2. Пусть теперь система $\{e_k\}$ такова, что верна импликация:

$$(y \in H) \wedge ((y, e_k) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbf{N}) \Rightarrow (y = \theta). \tag{10}$$

Возьмем произвольно $x \in H$ и обозначим

$$a_k = (x, e_k), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Для любых $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, имеем

$$||\, s_m - s_n||^2 = (s_m - s_n, s_m - s_n) = \left(\sum_{j=n+1}^{m} a_j e_j, \sum_{k=n+1}^{m} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{m} |\, a_k|^2. \tag{11}$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 \leq ||\, x||^2. \tag{12}$$

Из (11) и (12) по критерию Коши сходимости ряда получаем

$$||\, s_m - s_n||^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

т.е. последовательность $\{s_n\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства H существует элемент $x' \in H$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} ||\, x' - s_n|| = 0,$$

т.е.

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k.$$

Докажем, что $x = x'$. В силу (10) для этого достаточно проверить, что

$$(x' - x, e_k) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbf{N}. \tag{13}$$

Для любых $n, k \in \mathbf{N}$, $n > k$, имеем

$$(s_n, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k \right) = a_k(e_k, e_k) = a_k = (x, e_k)$$

и, значит,

$$(x' - x, e_k) = (x', e_k) - (x, e_k) = (x', e_k) - (s_n, e_k) = (x' - s_n, e_k).$$

Отсюда, полагая $n \to \infty$ и пользуясь свойством непрерывности скалярного произведения, получаем (13).

□

Из предложения 7 следует, что ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в H тогда и только тогда, когда в H не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_k\}$ (действительно, полнота системы $\{\varphi_k\}$ равносильна полноте ортонормированной системы $\{e_k\}$, где $e_k = \varphi_k/||\varphi_k||$).

Предложения 5 и 7 существенно дополняет следующая теорема.

Теорема Рисса – Фишера. *Пусть $\{e_k\}$ – произвольная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H и пусть числа $a_1, a_2, \ldots$ таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2$ сходится. Тогда существует элемент $x \in H$ такой, что последовательность $\{a_k\}$ является последовательностью коэффициентов Фурье этого элемента, т.е. $a_k = (x, e_k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$, и при этом выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 = ||\, x||^2.$$

Доказательство этой теоремы приводится в учебниках по функциональному анализу.

Существование и единственность элемента наилучшего приближения в произвольном подпространстве гильбертова пространства

Подпространством гильбертова пространства H называется множество $\mathcal{L} \subset H$ такое, что выполнены два свойства:

1) для любых элементов x, y из $\mathcal{L}$ и любых чисел α, β линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит $\mathcal{L}$ (*свойство линейности*) ;

2) если $x_n \in \mathcal{L}$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $x_0 \in \mathcal{L}$ (*свойство замкнутости*).

Пусть $\mathcal{L}$ – произвольное подпространство гильбертова пространства H и пусть $x \in H \setminus \mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ конечномерно и известен какой-нибудь базис $g_1, g_2, \dots, g_n$ этого подпространства , то методом ортогонализации Шмидта (см. замечание 1) можно построить в $\mathcal{L}$ ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и для вычисления расстояния от x до $\mathcal{L}$ применить формулу

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}) = || \, x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \, e_k ||, \tag{14}$$

которая следует из минимального свойства коэффициентов Фурье. В общем случае (пространство $\mathcal{L}$ может быть бесконечномерным) элемент $\hat{y} \in \mathcal{L}$, для которого выполнено равенство

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}) = || \, x - \hat{y}||, \tag{15}$$

называется *элементом наилучшего приближения* элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Пользуясь тождеством параллелограмма

$$|| \, x + y||^2 + || \, x - y||^2 = 2(|| \, x||^2 + || \, y||^2), \tag{16}$$

докажем следующее предложение.

Предложение 8. *Для любого $x \in H \setminus \mathcal{L}$ элемент наилучшего приближения подпространством $\mathcal{L}$ существует и единствен.*

Доказательство. Обозначим $d = \operatorname{dist}(x, \mathcal{L})$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $y_n \in \mathcal{L}$ такой, что

$$d^2 \le || \, x - y_n||^2 \le d^2 + \frac{1}{n}. \tag{17}$$

Согласно (16) имеем

$$|| \, (x - y_m) + (x - y_n)||^2 + || \, (x - y_m) - (x - y_n)||^2 = 2(|| \, x - y_m||^2 + || \, x - y_n||^2)$$

или

$$|| \, y_m - y_n||^2 = 2(|| \, x - y_m||^2 + || \, x - y_n||^2) - 4|| \, x - (y_m + y_n)/2||^2. \tag{18}$$

Поскольку $(1/2)(y_m + y_n) \in \mathcal{L}$, то

$$|| \, x - (y_m + y_n)/2||^2 \ge d^2.$$

Учитывая (17) и (18), имеем

$$||\, y_m - y_n||^2 \le 2\left(\left(d^2 + \frac{1}{n}\right) + \left(d^2 + \frac{1}{m}\right)\right) - 4\, d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Отсюда видно, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу полноты H и замкнутости подпространства $\mathcal{L}$ существует элемент $\hat{y}$ такой, что

$$\hat{y} \in \mathcal{L} \quad \text{и} \quad \hat{y} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Переходя к пределу в (17), получим

$$||\, x - \hat{y}|| = \lim_{n\to\infty} ||\, x - y_n|| = d.$$

Предположим, что существует еще один элемент $y_0 \in \mathcal{L}$ такой, что $||\, x - y_0|| = d$. Тогда по тождеству параллелограмма аналогично (18) имеем

$$4\, d^2 = 2(||\, x - \hat{y}||^2 + ||\, x - y_0||^2) = ||\hat{y} - y_0||^2 + 4||\, x - (\hat{y} + y_0)/2||^2 \ge ||\hat{y} - y_0||^2 + 4\, d^2$$

и, следовательно, $||\hat{y} - y_0|| = 0$, $\hat{y} = y_0$.

□

Наилучшее приближение как проекция

Пусть $\mathcal{L}$ – подпространство гильбертова пространства H и пусть $x \in H$. *Ортогональной проекцией* элемента x на подпространство $\mathcal{L}$ называется элемент $y^* \in \mathcal{L}$ такой, что

$$(x - y^*, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L} \tag{19}$$

(обозначение: $\mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x = y^*$). Легко видеть, что если $x \in \mathcal{L}$, то проекция y^* совпадает с элементом x. Для остальных элементов из H ортогональные проекции характеризуются следующим предложением.

Предложение 9. *Ортогональная проекция любого элемента $x \in H \setminus \mathcal{L}$ на подпространство $\mathcal{L}$ существует, единственна и совпадает с элементом наилучшего приближения $\hat{y}$ элемента x подпространством $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что условием (19) элемент y^* определяется однозначно. Предположим, что имеются два элемента $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ таких, что

$$(x - y_1, y) = (x - y_2, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}.$$

Тогда

$$(y_2 - y_1, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}.$$

Полагая $y = y_2 - y_1$, получим $y_1 = y_2$.

Пусть теперь d – расстояниие от x до подпространства $\mathcal{L}$ и пусть $\hat{y}$ – элемент наилучшего приближения элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Тогда

$$d = ||\, x - \hat{y}|| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{L}) = \inf_{y \in \mathcal{L}} ||\, x - y||. \tag{20}$$

Предположим, что существует элемент $z \in \mathcal{L}$ такой, что

$$(x - \hat{y}, z) = b \neq 0.$$

Положим

$$w = \hat{y} + \frac{bz}{(z,z)}.$$

Поскольку $w \in \mathcal{L}$, в силу (20) имеем

$$d^2 \leq ||\, x - w||^2 = (x - w, x - w) = \left(x - \hat{y} - \frac{bz}{(z,z)}, x - \hat{y} - \frac{bz}{(z,z)} \right) =$$

$$= ||\, x - \hat{y}||^2 - \frac{b}{(z,z)}(z, x - \hat{y}) - \frac{\bar{b}}{(z,z)}(x - \hat{y}, z) + \frac{|b|^2}{(z,z)} = d^2 - \frac{|b|^2}{(z,z)} < d^2.$$

Получено противоречие, поэтому

$$(x - \hat{y}, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L},$$

т.е. элемент $\hat{y}$ совпадает с ортогональной проекцией $\mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$.

□

Оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in H$ его ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$, называется *оператором ортогонального проектирования* пространства H на подпространство $\mathcal{L}$. Элемент $\mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x = x - \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$ называется *перпендикуляром*, опущенным из x на $\mathcal{L}$. Справедливы равенства:

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{L}}(x + y) = \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x + \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} y, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{L}}(\alpha x) = \alpha\, \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x,$$

$$\mathrm{ort}_{\mathcal{L}}(x + y) = \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x + \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} y, \quad \mathrm{ort}_{\mathcal{L}}(\alpha x) = \alpha\, \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x,$$

где α – любое число, x и y – произвольные элементы из H.

Выражение величины наилучшего приближения через определитель Грама

Пусть $\mathcal{L}$ – конечномерное подпространство гильбертова пространства H, x – элемент из $H \setminus \mathcal{L}$ и пусть $\hat{y}$ – элемент наилучшего приближения элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Выберем в $\mathcal{L}$ какой-нибудь базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Согласно предложению 9,

$$(x - \hat{y}, g_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{21}$$

Разложим вектор $\hat{y}$ по выбранному базису:

$$\hat{y} = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \dots + \gamma_n g_n \tag{22}$$

и запишем условия (21) в виде системы уравнений относительно коэффициентов этого разложения:

$$\begin{cases} \gamma_1(g_1, g_1) + \gamma_2(g_2, g_1) + \dots + \gamma_n(g_n, g_1) = (x, g_1), \\ \gamma_1(g_1, g_2) + \gamma_2(g_2, g_2) + \dots + \gamma_n(g_n, g_2) = (x, g_2), \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \gamma_1(g_1, g_n) + \gamma_2(g_2, g_n) + \dots + \gamma_n(g_n, g_n) = (x, g_n). \end{cases} \tag{23}$$

Согласно предложению 8 для данного x элемент $\hat{y}$ существует и единствен. Значит, система (23) имеет единственное решение, а определитель этой системы

$$G(g_1, g_2, \dots, g_n) = \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \dots & (g_n, g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель называется *определителем Грама* системы векторов $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Таким образом, чтобы найти вектор $\hat{y}$ достаточно решить систему уравнений (23) и найденные значения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ подставить в формулу (22). Считая эти значения известными, вычислим величину наилучшего приближения $d = ||\, x - \hat{y}||$ (см. (20)).

Из предложения 9 следует, что $(x - \hat{y}, \hat{y}) = 0$. Поэтому

$$d^2 = (x - \hat{y}, x - \hat{y}) = (x - \hat{y}, x) = (x, x) - ((\hat{y}, x),$$

$$(\hat{y}, x) = (x, x) - d^2.$$

Учитывая (22), имеем

$$\gamma_1(g_1, x) + \dots + \gamma_n(g_n, x) = (x, x) - d^2. \tag{24}$$

Из (23) и (24) видно, что

$$\begin{vmatrix} (x, x) - d^2 & (g_1, x) & \dots & (g_n, x) \\ (x, g_1) & (g_1, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x, g_n) & (g_1, g_n) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Действительно, согласно (23) и (24) первый столбец этого определителя является линейной комбинацией его остальных столбцов. Пользуясь свойствами определителей, из (25) получаем формулу

$$d^2 = \frac{G(x, g_1, \dots, g_n)}{G(g_1, \dots, g_n)}. \tag{26}$$

В частности, если базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ортонормированный, то $G(g_1, \ldots, g_n) = 1$, $\gamma_k = (x, g_k)$ для $1 \le k \le n$ и формула (26) приводится к равенству

$$d^2 = (x,x) - \sum_{k=1}^{n} |(x, g_k)|^2$$

(сравните с формулами (5) и (6)).

Замечание 2. Определитель Грама произвольной линейно независимой системы векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ положителен:

$$G(g_1, g_2, \ldots, g_n) > 0. \tag{27}$$

Действительно, неравенство (27) для $n = 2$ следует из неравенства Коши – Буняковского:

$$G(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) \end{vmatrix} = (g_1, g_1)(g_2, g_2) - |(g_1, g_2)|^2 > 0$$

(последнее неравенство строгое, так как векторы g_1 и g_2 непропорциональны). Далее, при $n = 3$ согласно предложению 9 и равенству (26) имеем

$$\frac{G(g_1, g_2, g_3)}{G(g_1, g_2)} = ||\, g_3 - \mathrm{pr}_{\mathcal{L}_2} g_3 \,||^2 > 0,$$

где $\mathcal{L}_2 = \mathrm{span}\,\{g_1, g_2\}$. Поэтому $G(g_1, g_2, g_3) > 0$. Аналогично,

$$\frac{G(g_1, g_2, g_3, g_4)}{G(g_1, g_2, g_3)} = ||\, g_4 - \mathrm{pr}_{\mathcal{L}_3} g_4 \,||^2 > 0,$$

где $\mathcal{L}_3 = \mathrm{span}\,\{g_1, g_2, g_3\}$. Значит, неравенство (27) верно для $n = 4$ и т.д.

Прямые суммы и ортогональные дополнения

Пусть V и W – ненулевые подпространства линейного пространства X. Если каждый элемент $x \in X$ однозначно представим в виде

$$x = y + z, \;\; y \in V, \;\; z \in W, \tag{28}$$

то говорят, что X является *прямой суммой* подпространств V, W и пишут $X = V \dotplus W$.

Например, разложение в прямую сумму пространства $X = C[-1,1]$ получится, если в качестве V (соотв. W) выбрать множество всех четных (соотв. нечетных) функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$.

Предложение 10. *Если $V \cap W = \{\theta\}$, то для любого элемента $x \in X$ элементы y и z в разложении* (28) *определяются однозначно.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента $x \in X$ кроме (28) имеется еще одно разложение

$$x = y_1 + z_1, \; y_1 \in V, \; z_1 \in W.$$

Тогда

$$(y - y_1) + (z - z_1) = \theta \quad \text{или} \quad y - y_1 = z_1 - z.$$

Отсюда, замечая, что $y - y_1 \in V$, $z_1 - z \in W$ и пользуясь условием $V \cap W = \{\theta\}$, получаем $y = y_1$ и $z = z_1$.

□

Замечание 3. В курсе линейной алгебры для случая, когда пространство X конечномерно, доказывается, что разложение $X = V \dotplus W$ имеет место, если кроме условия $V \cap W = \{\theta\}$ выполнено равенство

$$\dim X = \dim V + \dim W.$$

Пусть V, $V_1, \ldots, V_n$ – ненулевые подпространства линейного пространства X. Если каждый элемент $x \in V$ однозначно представим в виде

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \quad x_1 \in V_1, \ldots, x_n \in V_n,$$

то говорят, что V является *прямой суммой* подпространств $V_1, \ldots, V_n$ и пишут

$$V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n. \tag{30}$$

В частности, здесь может быть $V = X$. Например, пространство $\mathbf{R}^n$ есть прямая сумма n одномерных подпространств, определенных любыми n линейно независимыми векторами. Кроме того, пространство $\mathbf{R}^n$ можно представить разными способами в форме прямой суммы и неодномерных подпространств.

Отметим, что в разложении (30) всякие два из подпространств $V_1, \ldots, V_n$ имеют общим один лишь элемент θ. Действительно, если $z \in V_k \cap V_j$, то из разложений

$$z = z + \theta, \quad z \in V_k, \quad \theta \in V_j,$$

$$z = \theta + z, \quad \theta \in V_k, \quad z \in V_j,$$

в силу единственности представления z в виде суммы

$$z = z_1 + \cdots + z_n, \quad z_1 \in V_1, \ldots, z_n \in V_n,$$

получаем $z = \theta$.

Пусть V_0 и V_1 – два различных подпространства гильбертова пространства H, причем $V_0 \subset V_1$. Тогда множество

$$W_0 = \{z \in V_1 | \, (y, z) = 0 \text{ для всех } y \in V_0\}$$

называется *ортогональным дополнением* подпространства V_0 в V_1.

Предложение 11. *Ортогональное дополнение* W_0 *подпространства* V_0 *в* V_1 *является подпространством гильбертова пространства* H *и имеет место равенство* $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$.

Доказательство. Если $z_1, z_2 \in W_0$, то

$$(y, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \bar{\alpha}_1 (y, z_1) + \bar{\alpha}_2 (y, z_2) = 0$$

для всех $y \in V_0$ и любых чисел α_1, α_2. Отсюда следует, что $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in W_0$. Кроме того, если $z_n \in W_0$ и $z_n \to z_0$, то для любого $y \in V_0$ по свойству непрерывности скалярного произведения

$$(y, z_n) \to (y, z_0),$$

где все $(y, z_n) = 0$. Значит, $z_0 \in W_0$. Таким образом, множество W_0 является подпространством в H.

Возьмем произвольно $x \in V_1$ и обозначим через y^* ортогональную проекцию элемента x на V_0. После этого положим $z^* = x - y^*$. Тогда, во-первых, $z^* \in V_1$ (так как x и y^* лежат в V_1) и, во-вторых, по предложению 9

$$(z^*, y) = (x - y^*, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in V_0,$$

т.е. $z^* \in W_0$. Таким образом, для произвольного $x \in V_1$ существует разложение

$$x = y + z, \ y \in V_0, \ z \in W_0. \tag{29}$$

Заметим теперь, что если $x \in V_0 \cap W_0$, то $(x, x) = 0, x = \theta$ и, значит, $V_0 \cap W_0 = \{\theta\}$. Отсюда по предложению 10 следует единственность разложения (29).

□

Отметим, что если $P_0 : V_1 \to V_0$ и $Q_0 : V_1 \to W_0$ – ортогональные проекторы, то в разложении (29) для любого $x \in V_1$ имеем $y = P_0 x$ и $z = Q_0 x$.

Два подпространства V и W гильбертова пространства H называются *ортогональными* (обозначение: $V \perp W$), если любой вектор из V ортогонален каждому вектору подпространства W.

Пусть

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_n,$$

где $V_1, \ldots, V_n$ – ненулевые попарно ортогональные (т.е. $V_i \perp V_j$ при $i \neq j$) подпространства гильбертова пространства H. Тогда V называют *ортогональной суммой* подпространств $V_1, \ldots, V_n$ и пишут

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Например, само пространство H является ортогональной суммой любого своего подпространства $\mathcal{L}$ и его ортогонального дополнения (в H).

В гильбертовом пространстве H определены также ортогональные суммы счетных наборов подпространств. Пусть, например, в H заданы ненулевые попарно ортогональные подпространства V_k, $k \in \mathbf{Z}$. Говорят, что V является *ортогональной суммой* подпространств V_k и пишут

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} V_k,$$

если каждый элемент $x \in V$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k, \quad x_k \in V_k,$$

где сходимость ряда понимается по норме пространства H. Из однозначности этого представления следует, что при каждом $k \in \mathbf{Z}$ элемент x_k совпадает с ортогональной проекцией элемента x на V_k.

Тригонометрические ряды Фурье в $L^2[-\pi, \pi]$

Напомним, что скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad ||f|| = \sqrt{(f, f)}.$$

Хорошо известно, что тригонометрическая система

$$\{1, \sin kt, \cos kt \mid k \in \mathbf{N}\} \tag{31}$$

ортогональна и полна в $L^2[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$ по этой системе определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt, \ k \in \mathbf{N}. \tag{32}$$

По свойству полноты системы (31) для каждой функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \tag{33}$$

сходится к f в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, для любой $f \in L^2[-\pi, \pi]$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} ||\, f - S_n\, || = 0,$$

где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда (33), т.е.

$$S_0(t) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \; n \in \mathbf{N}. \tag{34}$$

Согласно предложению 5, учитывая, что

$$||\sin kt|| = ||\cos kt|| = \sqrt{\pi}, \quad k \in \mathbf{N},$$

имеем равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{|\,a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k|^2 + |\,b_k|^2. \tag{35}$$

Кроме того, в силу (5),

$$||\,f - S_n\,||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt - \pi \left(\frac{|\,a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\,a_k|^2 + |\,b_k|^2 \right). \tag{36}$$

Из равенства (35) по необходимому условию сходимости числового ряда получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

т.е. *коэффициенты Фурье произвольной функции пространства* $L^2[-\pi, \pi]$ *стремятся к нулю.* Известно, что этим же свойством обладают коэффициенты Фурье любой функции f из класса $L^1[-\pi, \pi]$.

Сформулируем несколько важных результатов о поточечной сходимости (и расходимости) тригонометрических рядов Фурье.

(i) *Дю Буа-Реймонд* (1876): Существует непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f, для которой ряд Фурье расходится в точке $t = 0$.

(ii) *Колмогоров* (1923): Существует функция f, интегрируемая по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$, для которой ряд Фурье не сходится ни в одной точке.

(iii) *Кахане и Катцнельсон* (1965): Для любого множества $A \subset [-\pi, \pi]$, мера Лебега которого равна нулю, существует непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f, ряд Фурье которой расходится в каждой точке множества A.

(iv) *Карлесон* (1966): Если $f \in L^2[-\pi, \pi]$, то для почти всех $t \in [-\pi, \pi]$ ряд Фурье функции f сходится к $f(t)$.

Последовательность средних арифметических частичных сумм (34) определяется равенством

$$\sigma_n(t) = \frac{S_0(t) + \cdots + S_{n-1}(t)}{n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Фейером (1904) доказано, что для любой непрерывной 2π-периодической функции f эта последовательность сходится к f равномерно:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t) - \sigma_n(t)| = 0.$$

Функция f называется *кусочно непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если существует такой набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{j-1}, x_j), $1 \le j \le n$, и имеет конечные односторонние пределы на концах этих интервалов. Функцию f, имеющую на отрезке $[a, b]$ кусочно непрерывную производную, называют *кусочно непрерывно дифференцируемой на этом отрезке.* В учебниках по математическому анализу доказывается следующий признак сходимости ряда Фурье в точке.

Предложение 12. *Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и пусть $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье* (33) *сходится в точке t к значению*

$$S(t) = \begin{cases} (f(t-0) + f(t+0))/2, & \textit{если } t \in (-\pi, \pi), \\ (f(-\pi) + f(\pi))/2, & \textit{если } t = -\pi \textit{ или } t = \pi. \end{cases}$$

В частности, $S(t) = f(t)$, если f непрерывна в точке $t \in (-\pi, \pi)$.

В точках разрыва проявляется *явление Гиббса*: при достаточно большом n частичные суммы ряда Фурье (33) в некоторых точках, зависящих от n и расположенных вблизи выбранной точки разрава, отличаются от соответствующего одностороннего предела функции f приблизительно на 18 %.

Пример 1. Для функции

$$f(t) = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } t \in (0, \pi), \\ 0, & \text{если } t \in \{0, -\pi, \pi\}, \\ -\pi/2, & \text{если } t \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

коэффициенты Фурье (32) имеют следующие значения

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k}(1 - (-1)^k), \ k \in \mathbf{N}.$$

По предложению 12 для всех $t \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \tag{37}$$

В частности, при $t = \pi/4$ отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Частичные суммы $S_{2n}(t)$ и $S_{2n-1}(t)$ ряда (37) совпадают с нечетной функцией

$$g_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \tag{38}$$

Производная этой функции вычисляется по формуле

$$g_n'(t) = \frac{\sin 2nt}{\sin t},$$

и, следовательно, в точке $\pi/2n$ функция $g_n(t)$ имеет локальный максимум. Из формулы (38) получим

$$g_n(\pi/2n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)(\pi/2n)}{(2k-1)(\pi/2n)} \cdot \frac{\pi}{n} \to \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1,8519,$$

в то время как $f(0+0) = \pi/2 \approx 1,5707$. Таким образом, при больших n значения $g_n(\pi/2n)$ отличаются от $f(\pi/2n)$ приблизительно на 18 %.

$\square$

Отметим, что из равенства Парсеваля (35) и разложения (37) следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}. \tag{37}$$

получается из (32) и (33) с помощью формул Эйлера

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt, \quad \cos kt = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2, \quad \sin kt = i(e^{-ikt} + e^{ikt})/2.$$

Коэффициенты ряда (37) вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{38}$$

и связаны с коэффициентами (32) равенствами

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{39}$$

Соответственно, частичные суммы (34) примут вид

$$S_0(t) = c_0, \quad S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{40}$$

Система экспонент

$$\{\, e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z} \,\} \tag{41}$$

ортогональна и полна в $L^2[-\pi,\pi]$. При этом

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-ilt}\, dt = 2\pi \delta_{k,l}.$$

Отсюда видно, что коэффициенты (38) являются коэффициентами Фурье функции $f \in L^2[-\pi,\pi]$ по системе (41). Равенство Парсеваля для системы (41) записывается так:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\,c_k|^2$$

и имеет место для любой функции $f \in L^2[-\pi,\pi]$.

Пример 2. Для функции $f(t) = e^{-it/2}$ коэффициенты Фурье (38) вычисляются так:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(k+1/2)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos{(k+1/2)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \cos{(k+1/2)t}\,dt = \frac{\sin{(k\pi+\pi/2)}}{k\pi+\pi/2} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}.$$

Покажем, что для всех $t \in (-\pi,\pi)$ справедливо равенство

$$e^{-it/2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,e^{ikt}. \tag{42}$$

Пользуясь формулой Эйлера, запишем его в виде

$$\cos\,\frac{t}{2} - i\sin\,\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,(\cos\,kt + i\sin\,kt).$$

Отделяя действительные и мнимые части, видим, что равенство (42) верно тогда и только тогда, когда

$$\cos\,\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,\cos\,kt = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\,\cos\,kt \tag{43}$$

и

$$\sin\,\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\,\sin\,kt = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}\,\sin\,kt. \tag{44}$$

По предложению 12 разложение (43) имеет место для $t \in [-\pi,\pi]$, а разложение (44) справедливо для $t \in (-\pi,\pi)$. Значит, равенство (42) верно для всех $t \in (-\pi,\pi)$.

□

Отметим, что при любом $a > 0$ от систем (31) и (41) заменой переменной $t = \pi x/a$ можно перейти к системам

$$\{\,1,\ \sin{(\pi k/a)x},\ \cos{(\pi k/a)x} \mid\ k \in \mathbf{N}\} \quad \text{и} \quad \{\,e^{i\frac{\pi k}{a}x} \mid k \in \mathbf{Z}\,\},$$

ортогональным и полным в пространстве $L^2[-a,a]$.

Многочлены Лежандра

Система *многочленов Лежандра* $\{P_k(x)\}$ определяется формулами

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_k(x) = \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad k \geq 2. \tag{45}$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$(x^2-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k!}{j!(k-j)!} x^{2k-2j}.$$

Дифференцируя это тождество k раз, получаем следующее разложение многочлена $P_k(x)$ по степеням x:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (2k-2j)!}{j!(k-j)!(k-2j)!} x^{k-2j}, \tag{46}$$

где $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$. Отсюда видно, что старший коэффициент многочлена $P_k(x)$ есть

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} = \frac{2k(2k-1)\dots(k+1)}{k!\,2^k}.$$

Далее, с помощью (46) легко устанавливаются рекуррентные соотношения

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \geq 1,$$

из которых следует, например, что

$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k, \quad P_{2k+1}(0) = 0, \quad P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{(k!)2^k}.$$

Дифференцированием тождества

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^k = 2kx(x^2-1)^k$$

проверяется, что многочлен $P_k(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)\cdot P_k''(x) + 2x\cdot P_k'(x) - k(k-1)P_k(x) = 0.$$

Докажем, что многочлены Лежандра обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)\,dx = \frac{2}{2k+1}\,\delta_{k,l}, \quad k,l \in \mathbf{Z}_+. \tag{47}$$

Воспользуемся тем, что для вспомогательной функции $\varphi_k(x) = (x^2-1)^k$ выполнены равенства:

$$\varphi_k^{(l)}(-1) = \varphi_k^{(l)}(1) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{48}$$

и

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi_k(x)\,dx = (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{2^{2k+1}}{2k+1}. \tag{49}$$

Равенства (48) следуют из того, что точки $x = \pm 1$ являются нулями кратности k функции $\varphi_k(x)$, а формула (49) доказывается методом интегрирования по частям (вначале следует записать подинтегральную функцию в виде $(x+1)^k(x-1)^k$).

Для $l < k$, применяя (45), (48) и интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} x^l P_k(x)\,dx = -\frac{l}{k!\,2^k} \int\limits_{-1}^{1} x^{l-1} \varphi_k^{(k-1)}(x)\,dx = \cdots = \frac{(-1)^l l!}{k!\,2^k} \left(\varphi_k^{(k-l-1)}(1) - \varphi_k^{(k-l-1)}(-1) \right) = 0.$$

Отсюда следуют соотношения (47) для $k \neq l$, т.е. доказана ортогональность системы многочленов Лежандра $\{P_k(x)\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$. Для $k = l$ соотношения (47) следуют из (49) и того, что

$$\int\limits_{-1}^{1} [P_k(x)]^2\,dx = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} \int\limits_{-1}^{1} x^k P_k(x)\,dx = \frac{(2k)!}{(k!)^3\, 2^{2k}} \int\limits_{-1}^{1} x^k \varphi_k^{(k)}(x)\,dx = \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2\, 2^{2k}} \int\limits_{-1}^{1} \varphi_k(x)\,dx.$$

Здесь последовательно применялись: ортогональность многочлена $P_k(x)$ одночленам меньшей степени $1, x, \ldots, x^{k-1}$, выражение для старшего коэффициента многочлена $P_k(x)$, формулы (45), метод интегрирования по частям и равенства (48).

Из соотношений (47) получаем следующее выражение для квадрата нормы многочлена $P_k(x)$ в пространстве $L^2[-1,1]$:

$$\|P_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} [P_k(x)]^2\,dx = \frac{2}{2k+1}. \tag{50}$$

Соответственно, *ортонормированная система многочленов Лежандра* определяется по формуле

$$\tilde{P}_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\, P_k(x), \quad k \in \mathbf{Z}_+. \tag{51}$$

Система $\{\tilde{P}_k(x)\}$ получается из системы

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots \tag{52}$$

процессом ортогонализации Шмидта (см. замечание 1). Линейная оболочка системы (52) есть множество всех алгебраических многочленов. По теореме Вейерштрасса, для любой функции f, непрерывной на отрезке $[-1,1]$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен p, что

$$\max_{x\in[-1,1]} |\, f(x) - p\,(x)\,| < \varepsilon.$$

Тогда, очевидно,

$$\|\, f - p\,\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - p\,(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \sqrt{2}\,\varepsilon.$$

Известно также, что множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L^2[-1,1]$. Отсюда следует, что система многочленов Лежандра $\{P_k(x)\}$ полна в пространстве $L^2[-1,1]$.

Разложение произвольной функции $f \in L^2[-1,1]$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x), \tag{53}$$

где

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx. \tag{54}$$

Соответствующее равенство Парсеваля записывается так:

$$\int\limits_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} |\, c_k|^2\, \|P_k\|^2, \tag{55}$$

где нормы многочленов Лежандра вычисляются по формуле (50).

Система Хаара в $L^2(\mathbf{R})$

Напомним, что скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$ определяются по формулам

$$(f,g) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad ||f|| = \sqrt{(f,f)}.$$

Для $n \in \mathbf{Z}$ промежутки

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называют *двоичными интервалами ранга* n. Отметим, что двоичные интервалы одного ранга либо не пересекаются, либо совпадают. Кроме того, двоичные интервалы ранга $n+1$ получаются делением пополам двоичных интервалов ранга n (так что $I_k^{(n)} =$

$I_{2k}^{(n+1)} \cup I_{2k+1}^{(n+1)}$ для всех $k \in \mathbf{Z}$). Отсюда видно, что если два двоичных интервала разных рангов пересекаются, то один из них содержится в другом.

Для $j, k \in \mathbf{Z}$ положим

$$\psi_{jk}(t) = \begin{cases} \ \ 2^{j/2}, & \text{если } t \in I_{2k}^{(j+1)}, \\ -2^{j/2}, & \text{если } t \in I_{2k+1}^{(j+1)}, \\ \ \ 0, & \text{если } t \in \mathbf{R} \setminus I_k^{(j)}. \end{cases} \tag{56}$$

Эти функции образуют *систему Хаара* в $L^2(\mathbf{R})$. Для всех $j, k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_{jk}(t)\, dt = 0.$$

Докажем свойство ортогональности системы Хаара:

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = 0, \quad \text{если} \quad j \neq s \quad \text{или} \quad k \neq l. \tag{57}$$

Если $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} = \emptyset$, то из (56) следует, что $\psi_{jk}(t) = 0$ для $t \in I_l^{(s)}$ и $\psi_{sl}(t) = 0$ для $t \in I_k^{(j)}$. Поэтому

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = \int_{I_k^{(j)}} \psi_{jk}(t)\psi_{sl}(t)\, dt + \int_{I_l^{(s)}} \psi_{jk}(t)\psi_{jk}(t)\psi_{sl}(t)\, dt = 0$$

(в частности, это будет при $j = s$, $k \neq l$).

Пусть $j < s$ и $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} \neq \emptyset$. Тогда $I_l^{(s)} \subset I_k^{(j)}$ и, следовательно, на интервале $I_l^{(s)}$ функция ψ_{jk} постоянна (равна $2^{j/2}$ или $-2^{j/2}$). Значит, в этом случае

$$(\psi_{jk}, \psi_{sk}) = \pm\, 2^{j/2} \int_{I_l^{(s)}} \psi_{sl}(t)\, dt = 0.$$

Таким образом, соотношения (57) доказаны. Поскольку

$$\|\psi_{jk}\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |\, \psi_{jk}(t)|^2\, dt = 2^j \int_{I_k^{(j)}} dt = 1,$$

то *система Хаара* $\{\psi_{jk}\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbf{R})$.

Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по системе $\{\psi_{jk}\}$ имеют вид

$$d_{jk} = (f, \psi_{jk}) = 2^{j/2} \left(\int_{I_{2k}^{(j+1)}} f(t)\, dt - \int_{I_{2k+1}^{(j+1)}} f(t)\, dt \right). \tag{58}$$

Известно, что система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ полна в $L^2(\mathbf{R})$. Поэтому для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет место разложение в ряд Фурье – Хаара:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{jk},$$

где коэффициенты вычисляются по формуле (58). Соответствующее равенство Парсеваля имеет вид

$$\int_{\mathbf{R}} |\, f(t)|^2 \, dt = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\, d_{j,k}|^2$$

и справедливо для каждой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$.

О базисах в банаховых и гильбертовых пространствах

Пусть X – банахово пространство и пусть $\varphi_k \in X$ для $k \in \mathbf{N}$. Система $\{\varphi_k\}$ называется *базисом* пространства X, если каждый элемент $x \in X$ представим единственным образом в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

сходящимся к x по норме пространства X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *безусловным базисом* пространства X, если она остается базисом при любой перестановке ее элементов. Например, тригонометрическая система (31) является базисом (но не безусловным при $p \neq 2$) в пространствах $L^p[-\pi, \pi\,]$, $1 < p < \infty$. Система функций Хаара (56) является безусловным базисом во всех пространствах $L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$. Система степеней $1, t, t^2, \ldots$ не является базисом в пространстве $C[-1, 1\,]$ (функцию $|\,t|$ нельзя разложить в степенной ряд, равномерно сходящийся на отрезке $[-1, 1\,]$). В пространствах $C[a, b\,]$ и $L_1[a, b\,]$ не существует безусловных базисов.

Пусть $U : X \to X$ – линейный ограниченный обратимый оператор. Если система $\{\varphi_k\}$ – базис, то и система $\{U\varphi_k\}$ – базис. Если система $\{\varphi_k\}$ – безусловный базис, то и система $\{U\varphi_k\}$ – безусловный базис.

Обозначим через X^* пространство, сопряженное к X. Если система $\{\varphi_k\}$ является базисом пространства X, то существуют линейные ограниченные функционалы $f_j \in X^*$, $j \in \mathbf{N}$, такие, что выполнено *условие биортогональности*: $f_j(\varphi_k) = \delta_{j,k}$. Для данного базиса $\{\varphi_k\}$ биортогональная система $\{f_j\}$ определяется единственным образом. При этом существует константа $M > 0$ такая, что

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \varphi_k \right\| \leq M \|\, x\, \|$$

для всех $x \in X$. Базис $\{\varphi_k\}$ является безусловным тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) f(\varphi_k)$$

абсолютно сходится для любых $x \in X$ и $f \in X^*$. Если система $\{\varphi_k\}$ – безусловный базис в X, то биортогональная система $\{f_j\}$ при условии сепарабельности пространства X^* будет безусловным базисом в X^*.

Рассмотрим теперь случай, когда $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Из предложений 2, 5 и 6 следует эквивалентность следующих утверждений:

1) $\{\varphi_k\}$ – базис пространства H;

2) система $\{\varphi_k\}$ полна в H;

3) для любого элемента $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k(x)|^2 ||\, \varphi_k||^2 = ||\, x||^2;$$

4) любые элементы $x, y \in H$ удовлетворяют обобщенному уравнению замкнутости

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)} ||\, \varphi_k||^2.$$

Полная ортогональная (соотв. ортонормированная) система $\{\varphi_k\}$ гильбертова пространства H называется *ортогональным* (соотв. *ортонормированным*) *базисом* этого пространства. Например, системы $\{1, \sin kt, \cos kt \mid k \in \mathbf{N}\}$ и $\{\, e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ являются ортогональными базисами в $L^2[-\pi, \pi]$. Многочлены Лежандра (45) образуют ортогональный базис пространства $L^2[-1, 1]$.

Неортогональный базис $\{g_k\}$ гильбертова пространства H может быть получен из ортогонального базиса $\{\varphi_k\}$ с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Выбрать числовую последовательность $\{\alpha_j\}$ такую, что $|\, \alpha_1\,| > 0$ и для всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |\, \alpha_j\,|^2 \le M \cdot \alpha_{n+1}^2,$$

где константа M не зависит от n.

Шаг 2. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ положить

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_j.$$

Система $\{g_k\}$ элементов гильбертова пространства H называется *системой Рисса*, если существуют положительные числа m и M такие, что

$$m \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 \right)^{1/2} \le \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k \right\| \le M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 \right)^{1/2}$$

для произвольной последовательности $\{a_k\}$ из l^2. Если система Рисса $\{g_k\}$ является базисом в H, то она называется *базисом Рисса*.

В гильбертовом пространстве H любой ортогональный базис является безусловным. Кроме того, всякая система Рисса, полная в H, является безусловным базисом. Известно также, что любой безусловный базис пространства H может быть представлен в виде $\{Ue_k\}$, где U – линейный ограниченный обратимый оператор, а $\{e_k\}$ – ортонормированный базис.

Литература

1. Виноградов О.Л. Ряды Фурье и приближение функций в курсе математического анализа. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.

2. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954.

3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. М.: Изд-во МЦНМО, 1998.

4. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

7. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.

8. Федоров В.М. Курс функционального анализа. Спб.: Изд-во "Лань", 2005.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Наука, 1970.

10. Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека". Ред. С.Г. Крейн. М.: Наука, 1972.