

Российский государственный геологоразведочный университет
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Ю.А.Фарков

Введение в вейвлет-анализ

Лекции для студентов, обучающихся по специальности
"Прикладная математика"

Москва 2006

§1. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье произвольной функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-it\xi} dt. \quad (1)$$

Согласно теореме Римана – Лебега, для любой функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ является ограниченной и непрерывной на \mathbf{R} функцией, которая стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow +\infty$.

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)e^{it\xi} d\xi. \quad (2)$$

Для справедливости формулы (2) при $t = t_0$ достаточно предполагать, что функция f в точке t_0 удовлетворяет условию Дини:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t} \right| dt < +\infty \quad \text{для некоторого } \delta > 0.$$

При этом интеграл в формуле (2) понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)e^{it\xi} d\xi := \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi)e^{it\xi} d\xi.$$

Если обе функции f и \widehat{f} принадлежат $L^1(\mathbf{R})$, то формула (2) верна во всех точках непрерывности функции f .

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ – оператор Фурье,

$e_{\omega} : t \mapsto e^{i\omega t}$ – гармоники (ω – вещественный параметр, t – вещественная переменная),

$T_h f(t) := f(t - h)$ – оператор сдвига,

$D_a f(t) := f(t/a)$ – оператор растяжения ($a \neq 0$),

$(f * g)(t) := \int_{\mathbf{R}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$ – свертка функций f и g .

Оператор Фурье линеен:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g \quad \text{для } \alpha, \beta \in \mathbf{C}, f, g \in L^1(\mathbf{R}).$$

При вычислении преобразования Фурье часто применяют следующие правила:

$$(П1) \quad [\mathcal{F}(T_h f)](\xi) = e^{-i\xi h} \widehat{f}(\xi),$$

$$(П2) \quad [\mathcal{F}(e_{\omega} f)](\xi) = \widehat{f}(\xi - \omega),$$

$$(П3) \quad [\mathcal{F}(D_a f)](\xi) = |a| D_{1/a} \widehat{f}(\xi),$$

$$(П4) \quad [\mathcal{F}(f * g)](\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi),$$

$$(П5) \quad (\mathcal{F} f^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n (\mathcal{F} f)(\xi),$$

$$(П6) \quad (\mathcal{F} f)^{(n)}(\xi) = \mathcal{F}[(-it)^n f(t)].$$

Из правила (П3) (его называют *правилом изменения масштаба*) видно, что график функции $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ растягивается в горизонтальном направлении и становится более плоским, когда график функции f сжимается горизонтально.

Правило (П5) применимо, если функция f имеет на \mathbf{R} непрерывную производную n -го порядка, принадлежащую классу $L^1(\mathbf{R})$. В этом случае по теореме Римана – Лебега $(\mathcal{F} f^{(n)})(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$ и из (П5) получаем

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\xi|^n \widehat{f}(\xi) = 0,$$

т.е. при указанных условиях преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $1/|\xi|^n$. Для существования производной $(\mathcal{F} f)^{(n)}$ и справедливости правила (П6) достаточно предполагать, что функции $f(t), tf(t), \dots, t^n f(t)$ принадлежат классу $L^1(\mathbf{R})$. Таким образом, чем больше производных в $L^1(\mathbf{R})$ имеет функция f , тем быстрее убывает на бесконечности преобразование Фурье \widehat{f} и, наоборот, чем быстрее убывает функция f , тем более гладкой является ее преобразование Фурье. Известно также, что если при некотором $a > 0$ функция $e^{a|t|} f(t)$ принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, то преобразование Фурье \widehat{f} аналитически продолжается в полосу $\{\zeta \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < a\}$.

Если функция f из $L^1(\mathbf{R})$ имеет компактный носитель, т.е. существует число $b > 0$ такое, что $f(t) = 0$ для $|t| > b$, то преобразование Фурье \widehat{f} аналитически продолжается на всю комплексную плоскость по формуле

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{-b}^b f(t) e^{-it\zeta} dt, \quad (3)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ – комплексная переменная. Из формулы (3) выводится, что функция $\widehat{f}(\zeta)$ является целой функцией. Сходимость интеграла в (3) для любого $\zeta \in \mathbf{C}$ следует из оценки

$$|e^{-it\zeta}| = |e^{-it(\xi+i\eta)}| \leq e^{b|\eta|}, \quad -b \leq t \leq b.$$

Отсюда и из (3) получаем неравенство

$$|\widehat{f}(\zeta)| \leq e^{b|\eta|} \int_{-b}^b |f(t)| dt = e^{b|\eta|} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})},$$

т.е. длина носителя функции f ограничивает скорость роста целой функции \widehat{f} в вертикальном направлении.

Рассмотрим теперь случай, когда компактный носитель имеет не сама функция f , а ее преобразование Фурье. Итак, пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$ и $\widehat{f}(\xi) = 0$ для всех $|\xi| > a$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \widehat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что функция f продолжается на всю комплексную плоскость \mathbf{C} как целая функция. По теореме Римана – Лебега функция \widehat{f} непрерывна на $[-a, a]$ и тем более принадлежит классу $L^2[-a, a]$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(\widehat{f}) e^{i\pi\xi k/a}, \quad (5)$$

где

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \widehat{f}(\xi) e^{-i\pi\xi k/a} d\xi. \quad (6)$$

По теореме Карлесона равенство (5) имеет место для почти всех $\xi \in [-a, a]$. Сравнивая (4) и (6), замечаем, что

$$c_k(\widehat{f}) = (\pi/a) f(-\pi k/a). \quad (7)$$

Из равенств (4), (5) и (7) при условии

$$f(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon}) \quad (|t| \rightarrow +\infty) \quad (8)$$

следует формула Котельникова – Шеннона:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kT) \frac{\sin(a(t - kT))}{a(t - kT)}, \quad (9)$$

где $T = \pi/a$. Действительно, имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(\sum_k c_k(\widehat{f}) e^{i\xi(t+kT)} \right) d\xi = \frac{1}{2a} \sum_k f(-kT) \int_{-a}^a e^{i\xi(t+kT)} d\xi$$

или, меняя k на $-k$,

$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_k f(kT) \int_{-a}^a e^{i\xi(t-kT)} d\xi.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{-a}^a e^{i\xi\varphi} d\varphi = \frac{1}{i\varphi} (e^{ia\varphi} - e^{-ia\varphi}) = \frac{2 \sin(a\varphi)}{\varphi},$$

получаем (9). Отметим, что условие (8) нам потребовалось для того, чтобы обосновать перестановку знаков суммирования и интегрирования в проведенных преобразованиях.

Функция $\text{sinc } x$ для $x \in \mathbf{R}$ определяется формулой

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Разложение этой функции в ряд Маклорена имеет вид

$$\text{sinc } x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Функция $\text{sinc } x$ является четной, ограниченной на \mathbf{R} бесконечно дифференцируемой функцией и продолжается с вещественной прямой на всю комплексную плоскость как целая функция. С помощью этой функции формула Котельникова – Шеннона (9) записывается в виде

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(kT) \text{sinc}(a(t - kT)). \quad (10)$$

Поскольку $\text{sinc}(k\pi) = \delta_{0,k}$ и $T = \pi/a$, формула (10) показывает, что значение функции f в произвольной точке $t \in \mathbf{R}$ полностью восстанавливается по ”отчетным значениям” $\widehat{f}(kT)$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти ”отчетные значения” функции f вычисляются в точках арифметической прогрессии с шагом T . Если число a велико, то шаг T близок к нулю, и наоборот, если a близко к нулю, то шаг T велик. При этом параметр a задает отрезок, содержащий носитель преобразования Фурье функции f : $\text{supp } \widehat{f} \subset [-a, a]$. В частности, при $a = \pi$ формула Котельникова – Шеннона принимает вид

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) \text{sinc}(\pi(t - k)),$$

т.е. функция f полностью восстанавливается по своим значениям в целых точках.

Ряд в правой части формулы (10) называется *кардинальным рядом* функции f . Он сходится для любой функции f , непрерывной на \mathbf{R} и удовлетворяющей условию (8). Однако, если носитель преобразования Фурье \widehat{f} выходит за пределы отрезка $[-a, a]$, то имеет место так называемый *эффект наложения* (см. упражнение 1.6).

Оператор Фурье \mathcal{F} можно рассматривать на пространстве Шварца $S(\mathbf{R})$. Напомним, что пространство $S(\mathbf{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на \mathbf{R} функций $f(t)$, убывающих на бесконечности (т.е. при $|t| \rightarrow +\infty$) вместе со всеми своими производными быстрее любой отрицательной степени $|t|$. Иными словами, $f \in S(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \sup_{t \in \mathbf{R}} |t^\beta f^{(\alpha)}(t)| < +\infty \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+.$$

Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $S(\mathbf{R})$ считается сходящейся к нулю, если для любых неотрицательных целых чисел α, β последовательность $\{t^\beta \varphi_k^{(\alpha)}(t)\}$ сходится к

нулю равномерно на \mathbf{R} . Соотношение $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $S(\mathbf{R})$ означает, что последовательность $\{\varphi_k - \varphi\}$ сходится к нулю. Преобразование Фурье произвольной функции f из $S(\mathbf{R})$ определяется по формуле (1). Оператор Фурье \mathcal{F} отображает пространство Шварца $S(\mathbf{R})$ на себя гомеоморфно (т.е. отображение $\mathcal{F} : S(\mathbf{R}) \rightarrow S(\mathbf{R})$ биективно и предельные соотношения $\varphi_k \rightarrow \varphi$ и $\widehat{\varphi}_k \rightarrow \widehat{\varphi}$ в $S(\mathbf{R})$ равносильны).

Напомним, что скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)} dt, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Не всякая функция из $L^2(\mathbf{R})$ содержится в $L^1(\mathbf{R})$ (пример: $1/\sqrt{1+t^2}$).

Для любой функции $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ преобразование Фурье \widehat{f} , определенное по формуле (1), принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R})$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$$

является линейным ограниченным оператором, причем $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. Поскольку множество $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$, оператор \mathcal{F} может быть единственным образом продолжен на все $L^2(\mathbf{R})$ с сохранением нормы. Так определенный оператор \mathcal{F} отображает пространство $L^2(\mathbf{R})$ на себя линейно, непрерывно и взаимно однозначно. При этом для любых $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ справедливо равенство Парсеваля – Планшереля:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}, \widehat{g}). \quad (11)$$

В частности, при $f = g$ имеем

$$\|\widehat{f}\| = \sqrt{2\pi}\|f\| \quad \text{для всех } f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (12)$$

В квантовой механике движение одномерной частицы описывается волновой функцией $f \in L^2(\mathbf{R})$. Неотрицательные функции

$$p(t) = |f(t)|^2/\|f\|^2, \quad q(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2/\|\widehat{f}\|^2 \quad (13)$$

являются плотностями распределения вероятностей случайных величин, описывающих положение и импульс частицы. Математические ожидания и дисперсии этих случайных величин определяются равенствами

$$m(f) = \int_{\mathbf{R}} tp(t) dt, \quad m(\widehat{f}) = \int_{\mathbf{R}} \xi q(\xi) d\xi,$$

$$D(f) = \int_{\mathbf{R}} (t - m(f))^2 p(t) dt, \quad D(\widehat{f}) = \int_{\mathbf{R}} (\xi - m(\widehat{f}))^2 q(\xi) d\xi.$$

Принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что нельзя одновременно измерить точно и координату квантовой частицы, и ее импульс. В математической форме этот принцип выражается неравенством

$$D(f)D(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}. \quad (14)$$

Неравенство (14) верно для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$. Равенство достигается только для функций вида

$$f(t) = c e^{iat} e^{-(t-b)^2/4\alpha}, \quad a, b \in \mathbf{R}, c \neq 0, \alpha > 0.$$

ЛЕММА. Для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \|f\| \|\widehat{f}\|. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из плотности множества $S(\mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{R})$ следует, что достаточно рассмотреть случай $f \in S(\mathbf{R})$. Тогда, применяя равенство Парсеваля и правило (П5), запишем (15) в виде

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \|f\|^2. \quad (16)$$

Положим

$$I := \int_{\mathbf{R}} (tf(t)) \overline{(f'(t))} dt.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского, левая часть в (16) не меньше, чем $|I|$. Далее применим неравенство $|I| \geq |\operatorname{Re} I|$ и выразим $\operatorname{Re} I$ через $\|f\|^2$:

$$2 \operatorname{Re} I = I + \bar{I} = \int_{\mathbf{R}} t(f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)}) dt = - \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = -\|f\|^2.$$

Таким образом, лемма доказана.

Из формул (13) видно, что неравенство (14) при условиях

$$f \in L^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad m(f) = m(\widehat{f}) = 0$$

равносильно (15). Предположим теперь, что для данной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ величины $m(f)$ и $m(\widehat{f})$ конечны и отличны от нуля. Введем вспомогательную функцию

$$h(t) = e^{-i\xi_0 t} f(t + t_0), \quad t_0 = m(f), \quad \xi_0 = m(\widehat{f}).$$

Для этой функции по лемме имеем

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2 |h(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \|h\| \|\widehat{h}\|. \quad (17)$$

Применяя (П1) и (П2), получаем

$$\widehat{h}(\xi) = e^{ix_0(\xi + \xi_0)} \widehat{f}(\xi + \xi_0).$$

Легко видеть, что $\|h\| = \|f\|$, $\|\widehat{h}\| = \|\widehat{f}\|$ и

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 |h(t)|^2 dt = \int_{\mathbf{R}} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbf{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Отсюда и из (17) следует неравенство (14) для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$.

Отметим, что левые части неравенств (14) и (15) могут быть равными $+\infty$.

Упражнения

1.1. Докажите, что если $f = \chi_{[-a, a]}$ (т.е. f – характеристическая функция отрезка $[-a, a]$), то $\widehat{f}(\xi) = 2 \sin(a\xi)/\xi$.

1.2. Найдите преобразования Фурье функций $\varphi = \chi_{[0,1]}$ и $\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$. Убедитесь, что для данной функции φ условие

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \equiv 1$$

следует из разложения

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\xi + 2\pi k}.$$

1.3. Пусть $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Докажите, что $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi/a} e^{-\xi^2/4a}$ и найдите преобразования Фурье гауссовых функций

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (18)$$

1.4. Докажите следующие свойства:

- 1) если $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, то $f * g \in L^1(\mathbf{R})$ и $f * g = g * f$;
- 2) если $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ и g непрерывна на \mathbf{R} , то $f * g$ непрерывна на \mathbf{R} ;
- 3) если $f, g, h \in L^1(\mathbf{R})$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- 4) если функция $f \in L^1(\mathbf{R})$ непрерывна в точке $t_0 \in \mathbf{R}$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f * g_\alpha)(t_0) = f(t_0),$$

где g_α – гауссовы функции, определенные по формуле (18).

1.5. Докажите правила (П1) – (П4) для функций $f, g \in S(\mathbf{R})$.

1.6. Предположим, что функция f непрерывна на \mathbf{R} , удовлетворяет условию (8) и $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-b, b]$, где $a < b < 3a$. Проверьте, что тогда кардинальный ряд

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kT) \operatorname{sinc}(a(t - kT)),$$

где $T = \pi/a$, сходится к значениям функции g , такой, что

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(\xi - 2a) + \widehat{f}(\xi + 2a) \quad \text{для } \xi \in [-a, a]$$

и $\widehat{g}(\xi) = 0$ для $\xi \notin [-3a, 3a]$.

1.7. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$. Докажите, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_m\| = 0,$$

где \widehat{f}_m – преобразования Фурье срез-функций

$$f_m(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq m, \\ 0, & |t| > m. \end{cases}$$

1.8. Система нормализованных B -сплайнов $\{N_m\}$ определяется формулами

$$N_1 = \chi_{[0,1)}, \quad N_m = N_{m-1} * N_1 \quad \text{для } m \geq 2.$$

Постройте графики B -сплайнов N_1, N_2, N_3 и докажите равенство

$$\widehat{N}_m(\xi) = e^{-im\xi/2} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^m.$$

1.9. Покажите, что для преобразования Фурье функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2) \end{cases}$$

выполнено равенство

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right).$$

§2. Преобразование Габора и непрерывное вейвлет-преобразование

Для произвольной функции $g \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющей условиям

$$\|g\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |g(t)|^2 dt > 0, \quad \int_{\mathbf{R}} |tg(t)|^2 dt < +\infty,$$

центр $m(g)$ и радиус $\Delta(g)$ определяются соответственно равенствами

$$m(g) = \|g\|^{-2} \int_{\mathbf{R}} t |g(t)|^2 dt \quad \text{и} \quad \Delta(g) = \sqrt{D(g)} = \|g\|^{-1} \left(\int_{\mathbf{R}} (t - m(g))^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Частотно-временным прямоугольником функции g называют множество

$$R[g] = [m(g) - \Delta(g), m(g) + \Delta(g)] \times [m(\hat{g}) - \Delta(\hat{g}), m(\hat{g}) + \Delta(\hat{g})].$$

Площадь этого прямоугольника равна произведению $4\Delta(g)\Delta(\hat{g})$. По принципу неопределенности Гейзенберга справедливо неравенство

$$4\Delta(g)\Delta(\hat{g}) \geq 2. \quad (1)$$

В случае, когда g совпадает с функцией Гаусса

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

получается прямоугольник

$$R[g_\alpha] = [-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}] \times [-(2\sqrt{\alpha})^{-1}, (2\sqrt{\alpha})^{-1}].$$

Неравенство (1) является точным, так как площадь прямоугольника $R[g_\alpha]$ равна 2.

Для фиксированных $\alpha > 0$, $b, \xi \in \mathbf{R}$, положим

$$G_{b,\xi}^\alpha(t) = e^{i\xi t} g_\alpha(t - b), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что график функции

$$g_\alpha(t - b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-(t-b)^2/4\alpha}$$

симметричен относительно прямой $t = b$, эта функция бесконечно дифференцируема и быстро убывает к нулю при $|t| \rightarrow \infty$; кроме того,

$$\int_{\mathbf{R}} g_\alpha(t - b) db = \int_{\mathbf{R}} g_\alpha(x) dx = 1.$$

Преобразование Габора произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{G_{b,\xi}^\alpha(t)} dt \quad (2)$$

или

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} (f(t)g_\alpha(t-b))e^{-i\xi t} dt. \quad (3)$$

Под знаком интеграла в формуле (3) функция $f(t)$ сначала умножается на сглаживающую и локализационную функцию $g_\alpha(t-b)$, а затем к полученному произведению применяется обычное преобразование Фурье. Полученную в результате функцию $(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi)$ можно рассматривать как некоторую локализацию преобразования Фурье $\widehat{f}(\xi)$ в окрестности точки b .

При любом $\alpha > 0$ частотно-временной прямоугольник

$$R[G_{b,\xi}^\alpha] = [b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}] \times [\xi - (2\sqrt{\alpha})^{-1}, \xi + (2\sqrt{\alpha})^{-1}]$$

имеет площадь, равную 2 (его центр расположен в точке (b, ξ) , ширина равна $2\sqrt{\alpha}$, а высота равна $1/\sqrt{\alpha}$). При $\alpha = 1/2$ этот прямоугольник является квадратом.

Пользуясь равенством Парсеваля – Планшереля (1.11), из формулы (2) получаем

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = (f, G_{b,\xi}^\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}, \widehat{G}_{b,\xi}^\alpha), \quad (4)$$

где

$$\widehat{G}_{b,\xi}^\alpha(\eta) = e^{-ib(\eta-\xi)} e^{-\alpha(\eta-\xi)}.$$

Отсюда выводится формула, выражающая преобразования Габора через преобразование Фурье функции f :

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \frac{e^{-ib\xi}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbf{R}} (e^{ib\eta} \widehat{f}(\eta)) g_{1/4\alpha}(\eta - \xi) d\eta. \quad (5)$$

Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию допустимости

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty, \quad (D1)$$

называется *вейвлетом* в $L^2(\mathbf{R})$. Если $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, то преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ непрерывно на \mathbf{R} и из (D1) следует, что

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0. \quad (6)$$

Известно, что если к множеству всех функций $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющих условию (D1), добавить нулевой элемент пространства $L^2(\mathbf{R})$, то получится плотное в $L^2(\mathbf{R})$ линейное подпространство.

ПРИМЕРЫ.

1) Вейвлет Хаара:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 1). \end{cases}$$

2) Вейвлет Марра или "мексиканская шляпа":

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}.$$

3) Вейвлет "французская шляпа":

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

3) DOG-вейвлет:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}e^{-t^2/8}.$$

4) Вейвлеты Паула:

$$\psi_m(t) = \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}} (1 - it)^{-(m+1)}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

5) Вейвлеты Коши:

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - it)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

6) Вейвлеты Морле:

$$\psi_\gamma(t) = \pi^{-1/4} (e^{-i\gamma t} - e^{-\gamma^2/2}) e^{-t^2/2}, \quad \gamma \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что вейвлеты Коши при целых значениях параметра α только постоянным множителем отличаются от соответствующих вейвлетов Паула.

Пусть \mathbf{R}^* – множество ненулевых действительных чисел, т.е. $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Для каждой пары $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ и произвольного вейвлета ψ положим

$$\psi_{a,b}(t) := |a|^{-1/2} \psi((t - b)/a).$$

Легко видеть, что $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\|$.

Непрерывное (или интегральное) вейвлет-преобразование произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt. \quad (7)$$

Таким образом, вейвлет-преобразование W_ψ переводит произвольную функцию f пространства $L^2(\mathbf{R})$ в функцию $W_\psi f$ двух переменных, заданную на множестве $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. По неравенству Коши – Буняковского функция $W_\psi f$ ограничена:

$$|(W_\psi f)(a, b)| \leq \|f\| \|\psi\| \quad \text{для всех } (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}.$$

Согласно следующей теореме по вейвлет-преобразованию $W_\psi f$ можно восстановить не только норму, но и значения исходной функции f .

ТЕОРЕМА 1 (Grossman – Morlet, 1984) . Пусть функция $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию (D1). Тогда для произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ справедливы равенства

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - f_\varepsilon\| = 0,$$

где

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{|a| > \varepsilon} \left(\int_{\mathbf{R}} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right) \frac{da}{a^2}.$$

Более того, если функция ψ непрерывна на \mathbf{R} , то

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$$

в каждой точке t , где f непрерывна.

Иногда вместо условия (D1) принимают условие

$$0 < c_\psi^{st} := \int_0^\infty \xi^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty \xi^{-1} |\widehat{\psi}(-\xi)|^2 d\xi < +\infty. \quad (D2)$$

Легко видеть, что из (D2) следует (D1) с константой $c_\psi = 2c_\psi^{st}$. Если вейвлет ψ вещественный, то $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}(-\xi)$ и из (D1) следует (D2) с константой $c_\psi^{st} = c_\psi/2$. Имеет место следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию (D2). Тогда для произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ справедливы равенства

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_\psi^{st}} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty |W_\psi f(a, b)|^2 db \right) \frac{da}{a^2}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - f_\varepsilon^+\| = 0,$$

где

$$f_\varepsilon^+(t) = \frac{1}{c_\psi^{st}} \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right) \frac{da}{a^2}.$$

Более того, если функция ψ непрерывна на \mathbf{R} , то

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^+(t)$$

в каждой точке t , где f непрерывна.

Замечание 1. При условиях теоремы 2 функция f восстанавливается по множеству значений $\{W_\psi f(a, b) \mid a > 0, b \in \mathbf{R}\}$. Часто эта информация для восстановления функции f оказывается избыточной. Для некоторых вейвлетов ψ существуют $\alpha_0 > 1$,

$\beta_0 > 0$ такие, что для $1 < \alpha \leq \alpha_0$, $0 < \beta \leq \beta_0$, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ разлагается в ряд

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi(\alpha^j t - \beta k)$$

с коэффициентами $c_{j,k} = W_\psi(\alpha^{-j}, \beta k \alpha^{-j})$. При этом имеют место неравенства

$$m \left(\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |c_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\| \leq M \left(\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |c_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где положительные константы m и M не зависят от f (о связанном с этими неравенствами понятии *фрейма*, см., например, в [1, глава 4], [2, глава 3]). В случае, когда ψ – вейвлет Хаара, можно выбрать $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$; тогда неравенства (8) обращаются в равенства, причем обе константы m и M равны 1 (см. §3).

Из формулы (7) аналогично (4) имеем

$$(W_\psi f)(a, b) = (f, \psi_{a,b}) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f}, \hat{\psi}_{a,b}),$$

где

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = |a|^{1/2} \hat{\psi}(a\xi) e^{-ib\xi}.$$

Отсюда следует формула, выражающая непрерывное вейвлет-преобразование через преобразование Фурье функции f :

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{|a|^{1/2}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a\xi)} e^{ib\xi} d\xi. \quad (9)$$

Таким образом, при фиксированном $a \neq 0$ отображение

$$(W_\psi f)(a, \cdot) : b \mapsto (W_\psi f)(a, b)$$

может рассматриваться как обратное преобразование Фурье функции

$$F_a(\xi) := |a|^{1/2} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a\xi)}.$$

В теории вейвлетов ось a масштабируется вертикально, а ось b горизонтально. Частотно-временной прямоугольник функции $\psi_{a,b}$ имеет вид

$$R[\psi_{a,b}] = [b + am(\psi) - a\Delta(\psi), b + am(\psi) + a\Delta(\psi)] \times [m(\hat{\psi})/a - \Delta(\hat{\psi})/a, m(\hat{\psi})/a + \Delta(\hat{\psi})/a].$$

При $a > 0$ этот прямоугольник имеет ширину, равную $2a\Delta(\psi)$, и высоту, равную $\Delta(\hat{\psi})/a$. Отметим, что ширина прямоугольника $R[\psi_{a,b}]$ сужается для высоких частот ($a > 0$ – мало) и расширяется для низких частот ($a > 0$ – велико). Центр прямоугольника $R[\psi_{a,b}]$ расположен в точке $(b + am(\psi), m(\hat{\psi})/a)$, а его площадь равна $4\Delta(\psi)\Delta(\hat{\psi})$.

Из формулы (9) по теореме Римана – Лебега следует, что функция $W_\psi f$ непрерывна на горизонтальных прямых $a = const$ и стремится на них к нулю при $|b| \rightarrow +\infty$.

Изучение асимптотического поведения $W_\psi f(a, b)$ при $a \rightarrow 0$ в данной точке b позволяет применять вейвлет-преобразование для анализа свойств функции f в окрестности точки $t = b$, а также в самой этой точке. Известно, например, что чем более гладкой в окрестности точки b является функция f , тем быстрее $W_\psi f(a, b)$ сходится к 0 при $a \rightarrow 0$. Теоремы 3 и 4 иллюстрируют это явление (доказательства этих теорем см., например, в [2], [11]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ имеет N нулевых моментов:

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t) dt = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq l \leq N-1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \overline{\psi(t)} dt =: \mu_N \neq 0$$

и пусть

$$\int_{\mathbf{R}} |t|^N |\psi(t)| dt < +\infty,$$

а функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет производную $f^{(N)}(t_0)$, где $t_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{a \rightarrow 0} |a|^{-N-1/2} W_\psi f(a, t_0) = \mu_N \frac{f^{(N)}(t_0)}{N!}.$$

Рассмотрим случай, когда $N = 1$ и $a > 0$. Тогда из формул

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0, \quad \int_{\mathbf{R}} t \overline{\psi(t)} dt = \mu_1 \neq 0$$

и

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + r(t), \quad r(t) = o(t - t_0) \quad (t \rightarrow t_0)$$

согласно (7) имеем

$$W_\psi f(a, t_0) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} [f'(t_0)(t - t_0) + r(t)] \overline{\psi\left(\frac{t - t_0}{a}\right)} dt = a^{3/2} \left(f'(t_0) \int_{\mathbf{R}} \tau \overline{\psi(\tau)} d\tau + o(a) \right).$$

Поэтому

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-3/2} W_\psi f(a, t_0) = \mu_1 f'(t_0).$$

□

Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Говорят, что функция f удовлетворяет на прямой \mathbf{R} условию Липшица (или Гёльдера) порядка α и пишут $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$|f(t) - f(s)| \leq C |t - s|^\alpha \quad \text{для всех} \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Через $H^{(\alpha)}(t_0)$ обозначают класс функций f таких, что

$$|f(t_0 + t) - f(t_0)| \leq C |t|^\alpha \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbf{R},$$

где константа C не зависит от t .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} (1 + |t|) |\psi(t)| dt < +\infty, \quad (10)$$

а функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ ограничена на \mathbf{R} , и пусть $0 < \alpha \leq 1$. Тогда:

- (а) если $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$, то $|W_\psi f(a, b)| \leq C |a|^{\alpha+1/2}$;
- (б) если $f \in H^{(\alpha)}(t_0)$, то $|W_\psi f(a, t_0 + b)| \leq C |a|^{1/2} (|a|^\alpha + |b|^\alpha)$.

Докажем утверждение (а). Учитывая (7) и (10), для $a > 0$ имеем

$$W_\psi f(a, b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} (f(t) - f(b)) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

и, следовательно,

$$|W_\psi f(a, b)| \leq C a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} |t-b|^\alpha \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt = C a^{\alpha+1/2} \int_{\mathbf{R}} |y|^\alpha |\psi(y)| dy \leq C a^{\alpha+1/2},$$

где выполнена подстановка $t = b + ay$ и использовано неравенство $|y|^\alpha \leq 1 + |y|$. \square

Теорема 4 допускает частичное обращение:

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ имеет компактный носитель, а функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ ограничена и непрерывна на \mathbf{R} , и пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда:

- (а) если $|W_\psi f(a, b)| \leq C |a|^{\alpha+1/2}$, то $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$;
- (б) если для некоторого γ

$$|W_\psi f(a, b)| \leq C |a|^{\gamma+1/2} \quad \text{равномерно по } b$$

и

$$|W_\psi f(a, t_0 + b)| \leq C |a|^{1/2} \left(|a|^\alpha + \frac{|b|^\alpha}{|\log |b||} \right),$$

то $f \in H^{(\alpha)}(t_0)$.

Для $0 < \alpha < 1$ теоремы 4 и 5 дают вейвлет-характеризацию классов $H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$ и $H^{(\alpha)}(t_0)$ (подробности см. в [2, §2.9]).

Замечание 2. Непрерывное вейвлет-преобразование иногда называют "математическим микроскопом", так как с его помощью удается проводить детальный анализ локальных свойств функций. Ограничимся здесь одним примером. В XIX веке Риман предположил, что непрерывная 2-периодическая функция

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2}$$

нигде не дифференцируема. В 1916 г. Харди доказал, что функция $W(t)$ не дифференцируема в иррациональных и некоторых рациональных точках. В 1970 г. Гервер

доказал, что $W(t)$ дифференцируема во всех точках, кроме точек, указанных Харди. А именно, производная $W'(t)$ существует только в точках вида $t = (2p + 1)/(2q + 1)$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. В 1990 г. Хольшнейдер и Чамичан с помощью непрерывного вейвлет-преобразования получили новое доказательство результатов Харди – Гервера и полностью охарактеризовали особенности функции $W(t)$ в рациональных точках, где она не дифференцируема. Эти и другие результаты о поточечной регулярности функции Римана подробно изложены в монографиях [11] и [12].

Упражнения

2.1. Докажите, что если $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} |t| |\psi(t)| dt < +\infty,$$

то ψ является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

2.2. Постройте графики вейвлета Марра и DOG-вейвлета.

2.3. Пусть $g \in L^2(\mathbf{R})$, $g^{(k)} \in L^2(\mathbf{R})$ и $\|g^{(k)}\| > 0$ для некоторого натурального k . Докажите, что тогда $\psi = g^{(k)}$ является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

2.4. Докажите, что вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$ является любая производная функции $e^{-t^2/2}$.

2.5. Докажите, что произвольная функция $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0$$

и обладающая компактным носителем, является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

2.6. Докажите утверждение (b) теоремы 4.

§3. Кратномасштабный анализ Хаара на прямой

Вейвлетом Хаара называют функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ получается из вейвлета ψ с помощью сдвигов и растяжений по формуле

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Легко видеть, что

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_{jk}(t) dt = 0, \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

Для каждого $n \in \mathbf{Z}$ числовые промежутки

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называют двоичными интервалами ранга n . Справедливы свойства:

1. Двоичные интервалы одного ранга либо не пересекаются, либо совпадают.
2. Двоичные интервалы ранга $n+1$ получаются делением пополам двоичных интервалов ранга n (так что $I_k^{(n)} = I_{2k}^{(n+1)} \cup I_{2k+1}^{(n+1)}$ для всех $k \in \mathbf{Z}$).
3. Если два двоичных интервала разных рангов пересекаются, то один из них содержится в другом.

Для всех $j, k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\psi_{jk}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & t \in I_{2k}^{(j+1)}, \\ -2^{j/2}, & t \in I_{2k+1}^{(j+1)}, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus I_k^{(j)}. \end{cases}$$

Докажем свойство ортогональности системы Хаара в пространстве $L^2(\mathbf{R})$:

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = 0, \quad \text{если } j \neq s \text{ или } k \neq l. \quad (2)$$

Если $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} = \emptyset$, то из (1) следует, что $\psi_{jk}(t) = 0$ для $t \in I_l^{(s)}$ и $\psi_{sl}(t) = 0$ для $t \in I_k^{(j)}$. Поэтому

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = \int_{I_k^{(j)}} \psi_{jk}(t) \psi_{sl}(t) dt + \int_{I_l^{(s)}} \psi_{jk}(t) \psi_{sl}(t) dt = 0$$

(в частности, это будет при $j = s, k \neq l$).

Пусть $j < s$ и $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} \neq \emptyset$. Тогда $I_l^{(s)} \subset I_k^{(j)}$ и, следовательно, на интервале $I_l^{(s)}$ функция ψ_{jk} постоянна (равна $2^{j/2}$ или $-2^{j/2}$). Значит, в этом случае

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = \pm 2^{j/2} \int_{I_l^{(s)}} \psi_{sl}(t) dt = 0.$$

Таким образом, соотношения (2) доказаны. Поскольку

$$\|\psi_{jk}\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |\psi_{jk}(t)|^2 dt = 2^j \int_{I_k^{(j)}} dt = 1,$$

то система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$.

Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по системе $\{\psi_{jk}\}$ имеют вид

$$d_{jk} = (f, \psi_{jk}) = 2^{j/2} \left(\int_{I_{2^k}^{(j+1)}} f(t) dt - \int_{I_{2^{k+1}}^{(j+1)}} f(t) dt \right). \quad (3)$$

Известно, что система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ полна в $L^2(\mathbf{R})$. Поэтому для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет место разложение в ряд Фурье – Хаара:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{jk} \psi_{jk} \quad (4)$$

и соответствующее равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \|d_{jk}\|^2,$$

где коэффициенты вычисляются по формуле (3).

Характеристическая функция множества $E \subset \mathbf{R}$ обозначается χ_E и определяется равенством

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & t \in E, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus E. \end{cases}$$

Для любых $j, k \in \mathbf{Z}$ положим

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

где $\varphi = \chi_{[0,1]}$ (эту функцию φ называют *масштабирующей функцией Хаара*). Легко видеть, что $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}$ для $t \in I_k^{(j)}$ и $\varphi_{jk}(t) = 0$ для $t \in \mathbf{R} \setminus I_k^{(j)}$. Из определений видно, что

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \chi_{I_k^{(j)}}(t) \quad \text{и} \quad \psi_{jk}(t) = 2^{j/2} (\chi_{I_{2^k}^{(j+1)}}(t) - \chi_{I_{2^{k+1}}^{(j+1)}}(t))$$

для всех $t \in \mathbf{R}$. Кроме того,

$$2^{j/2} \int_{\mathbf{R}} \varphi_{jk}(t) dt = 1, \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

При каждом фиксированном $j \in \mathbf{Z}$ система $\{\varphi_{jk} | k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по этой системе вычисляются по формуле

$$a_{jk} = (f, \varphi_{jk}) = 2^{j/2} \int_{I_k^{(j)}} f(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (6)$$

Семейства замкнутых подпространств $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$ определим равенствами

$$V_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \text{span} \{\varphi_{jk} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \text{span} \{\psi_{jk} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Ортогональные проекторы $P_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_j$ и $Q_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow W_j$ действуют по формулам

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{jk} \varphi_{jk}, \quad Q_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{jk} \psi_{jk}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

где $\{a_{jk}\}$ и $\{d_{jk}\}$ – коэффициенты Фурье функции f по системам $\{\varphi_{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}\}$ соответственно (см. (3), (6)).

Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ из (4) и (7) имеем

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} Q_j f,$$

где слагаемые попарно ортогональны. Следовательно, имеет место разложение пространства $L^2(\mathbf{R})$ в ортогональную прямую сумму:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j. \quad (8)$$

Видно также, что

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f \text{ постоянна на интервалах } [k, k+1)\}$$

и

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} \cdot) \in V_0, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Значит, всякая функция из V_j постоянна на двоичных интервалах ранга j . Отсюда, учитывая полноту в $L^2(\mathbf{R})$ множества кусочно постоянных функций со скачками в двоично рациональных точках $k2^{-j}$, получаем соотношения

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}). \quad (9)$$

Из этих соотношений следует, что для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - P_j f\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\| = 0. \quad (10)$$

Таким образом, при увеличении j погрешность аппроксимации $f \approx P_j f$ убывает к нулю, а если $j \rightarrow -\infty$, то проекции $P_j f$ стремятся к нулевому элементу пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Для любого $j \in \mathbf{Z}$ имеем

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (11)$$

т.е. W_j является ортогональным дополнением V_j в V_{j+1} . Отсюда получаем равенства

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f, \quad \|P_{j+1} f\|^2 = \|P_j f\|^2 + \|Q_j f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (12)$$

Иногда говорят, что $Q_j f$ содержит "детали", необходимые для перехода от j -го уровня аппроксимации функции f к более точному $(j + 1)$ -му уровню. Соответственно, подпространства $\{V_j\}$ (и коэффициенты $\{a_{jk}\}$) называют *аппроксимирующими*, а подпространства $\{W_j\}$ (и коэффициенты $\{d_{jk}\}$) – *детализирующими*.

Из формул (3) и (6) следуют равенства

$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

и

$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) задают соответственно *прямое и обратное дискретные преобразования Хаара*. Они только постоянными множителями отличаются от аналогичных преобразований метода блока фильтров и позволяют быстро переходить от одного уровня аппроксимации к другому и обратно (см. приложения 1 и 2).

При фиксированном j и любом $s \in \mathbf{N}$ из (12) получаем

$$P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f = \dots = P_{j-s} f + Q_{j-s} f + \dots + Q_{j-1} f. \quad (15)$$

Схематично:

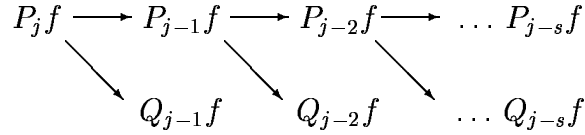


Рис. 1

ПРИМЕР 1. Функция f , заданная равенством

$$f(t) = 9\chi_{[0,1/2)}(t) + 7\chi_{[1/2,1)}(t) + 3\chi_{[1,3/2)}(t) + 5\chi_{[3/2,2)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

выражается через масштабирующую функцию Хаара по формуле

$$f(t) = 9\varphi(2t) + 7\varphi(2t - 1) + 3\varphi(2t - 2) + 5\varphi(2t - 3).$$

Поскольку $\varphi_{1k}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t - k)$, то

$$f = P_1 f = \sum_{k=0}^3 a_{1k} \varphi_{1k},$$

где

$$a_{10} = 9/\sqrt{2}, \quad a_{11} = 7/\sqrt{2}, \quad a_{12} = 3/\sqrt{2}, \quad a_{13} = 5/\sqrt{2}.$$

Пользуясь формулами (13), находим

$$a_{00} = \frac{a_{10} + a_{11}}{\sqrt{2}} = 8, \quad d_{00} = \frac{a_{10} - a_{11}}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$a_{01} = \frac{a_{12} + a_{13}}{\sqrt{2}} = 4, \quad d_{01} = \frac{a_{12} - a_{13}}{\sqrt{2}} = -1.$$

Значит,

$$f = P_0 f + Q_0 f, \quad \text{где } P_0 f = 8\varphi_{00} + 4\varphi_{01}, \quad Q_0 f = \psi_{00} - \psi_{01}.$$

Далее, повторно применяя (13), получаем

$$a_{-1,0} = \frac{a_{00} + a_{01}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}, \quad d_{-1,0} = \frac{a_{00} - a_{01}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$P_0 f = P_{-1} f + Q_{-1} f, \quad \text{где } P_{-1} f = 6\sqrt{2}\varphi_{-1,0}, \quad Q_{-1} f = 2\sqrt{2}\psi_{-1,0}.$$

Таким образом, для данной функции f разложение (15) в случае $j = 1$, $s = 2$ принимает вид

$$f(t) = 6\sqrt{2}\varphi_{-1,0}(t) + 2\sqrt{2}\psi_{-1,0}(t) + (\psi_{00}(t) - \psi_{01}(t))$$

или

$$f(t) = 6\varphi(t/2) + 2\psi(t/2) + (\psi(t) - \psi(t-1)),$$

где φ и ψ – масштабирующая функция и вейвлет Хаара.

□

Из (10) и (15) следует, что для всех $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$P_j f = \sum_{s=1}^{\infty} Q_{j-s} f, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (16)$$

Отсюда получаем равенство

$$V_0 = \bigoplus_{j=1}^{\infty} W_{-j}. \quad (17)$$

Значит, наряду с (8) имеет место разложение

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{j \geq 0} W_j \right). \quad (18)$$

ПРИМЕР 2. Для функции $\varphi = \chi_{[0,1]}$ из пространства V_0 в силу (15) и (17) имеем

$$\varphi = P_0 \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{-j} \varphi = \sum_{j=1}^n Q_{-j} \varphi + P_{-n} \varphi, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Среди аппроксимирующих коэффициентов $\{a_{0k}\}$ функции $f = \varphi$ только один отличен от нуля:

$$a_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (13) для любого целого $j \geq 0$ находим

$$a_{j-1,k} = \begin{cases} a_{j,0}/\sqrt{2}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$

$$P_{-n}\varphi = a_{-n,0}\varphi_{-n,0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \varphi_{-n,0},$$

где

$$\varphi_{-n,0}(t) = 2^{-n/2}\varphi(2^{-n}t) = \begin{cases} 2^{-n/2}, & t \in [0, 2^n), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2^n), \end{cases}$$

Таким образом, L^2 -норма погрешности аппроксимации $\varphi \approx \sum_{j=1}^n Q_{-j}\varphi$ совпадает с величиной

$$\|P_{-n}\varphi\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

и убывает к нулю со скоростью геометрической прогрессии, в то время как носитель этой погрешности имеет длину 2^n и неограниченно увеличивается при $n \rightarrow \infty$. \square

При кодировании сигналов аппроксимируют ступенчатые функции вида

$$f(t) = x_1\varphi_{n0}(t) + x_2\varphi_{n1}(t) + \dots + x_{2^n}\varphi_{n,2^n-1}(t), \quad (19)$$

где x_1, x_2, \dots, x_{2^n} – заданный набор чисел. Для каждой такой функции имеем

$$P_n f = f \quad \text{и} \quad a_{n,k-1} = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n. \quad (20)$$

Таким образом, натуральное число n выбирается в качестве начального уровня аппроксимации функции f . Переход к m -му уровню осуществляется дискретным преобразованием Хаара:

$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad j = n, n-1, \dots, m+1. \quad (21)$$

где $0 \leq m \leq n-1$ и исходные коэффициенты $a_{n,k-1}$ определяются по формуле (20).

Вычислив коэффициенты по формулам (21), получим следующее разложение

$$f = P_m f + \sum_{j=m}^{n-1} Q_j f = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{mk}\varphi_{mk} + \sum_{j=m}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}. \quad (22)$$

Обратный переход к уровню n осуществляется по формулам

$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad j = m+1, m+2, \dots, n. \quad (23)$$

Если число n невелико, то принимают $m = 0$ и кодируют функцию (19) с помощью коэффициентов $a_{0,0}$, $d_{j,k}$, где $0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq k \leq 2^j - 1$. Формулы (23) позволяют в этом случае точно восстановить все исходные коэффициенты $a_{n,k-1}$ и тем самым функцию f .

В случае большого n выбирают $m > 1$ и коэффициенты разложения

$$P_m f = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{m,k} \varphi_{m,k} \quad (24)$$

нумеруют в порядке убывания их абсолютных величин:

$$|a_{m,\pi(0)}| \geq |a_{m,\pi(1)}| \geq \dots \geq |a_{m,\pi(2^m-1)}|.$$

Здесь π – биективное отображение множества $\{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ на себя (т.е. некоторая перестановка этого множества). После этого задают малое число $\varepsilon > 0$ и заменяют нулями те коэффициенты разложения (24), модули которых меньше ε . В результате получается аппроксимация:

$$P_m f \approx \sum_{k=0}^s a_{m,\pi(k)} \varphi_{m,k}, \quad (25)$$

где число s находится из условия

$$s = \min \{ l \mid 0 \leq l \leq 2^m - 1 \text{ и } |a_{m,\pi(k)}| < \varepsilon \text{ для всех } k > l \}.$$

Таким образом, функция f , заданная формулой (19), кодируется с помощью наборов коэффициентов

$$\{ a_{m,\pi(k)} \mid 0 \leq k \leq s \} \quad \text{и} \quad \{ d_{j,k} \mid m-1 \leq j \leq n-1, 0 \leq k \leq 2^j - 1 \}.$$

Приближенное восстановление функции f вновь осуществляется с помощью формул (23), но при этом на первом шаге часть коэффициентов $a_{m,k}$ заменяется нулями по указанному ε -критерию.

Упражнения

3.1. Докажите, что если два двоичных интервала разных рангов пересекаются, то один из них содержится в другом.

3.2. Докажите полноту системы Хаара в $L^2(\mathbf{R})$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что множество непрерывных финитных на \mathbf{R} функций плотно в $L^2(\mathbf{R})$, а также тем, что характеристическая функция произвольного двоичного интервала $I_l^{(s)}$ аппроксимируется (как в примере 2) линейными комбинациями функций системы Хаара.

3.3. Докажите, что при любом $1 \leq p < \infty$ система Хаара полна в пространствах $L^p[0, 1]$ и $L^p(\mathbf{R})$.

3.4. Пусть система $\{\varphi_{jk}\}$ определена по формуле (5). Постройте графики нескольких функций этой системы. Докажите, что $(\varphi_{jk}, \varphi_{jl}) = 0$ для всех $k \neq l$.

3.5. Пусть

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid \text{для каждого } k \in \mathbf{Z} \text{ функция } f \text{ постоянна на } [k, k+1)\}$$

и

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Докажите, что

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}).$$

3.6. Приведите графические иллюстрации к примерам 1 и 2.

3.7. Для функции

$$f(t) = 5\chi_{[0,1/2)}(t) + \chi_{[1/2,1)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите проекции P_0f и Q_0f . Постройте графики этих проекций и убедитесь, что $f = P_0f + Q_0f$.

3.8. Для функции

$$f(t) = 5\chi_{[0,1/4)}(t) + 3\chi_{[1/4,3/4)}(t) + \chi_{[3/4,1)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите вейвлет-разложения

$$f = P_1f + Q_1f$$

и

$$f = P_0f + Q_0f + Q_1f.$$

Приведите графические иллюстрации этих разложений.

3.9. Для функции

$$f(t) = \varphi_{3,0}(t) - 3\varphi_{3,2}(t) + 2\varphi_{3,3}(t) + \varphi_{3,4}(t) + \varphi_{3,6}(t) + 2\varphi_{3,7}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите вейвлет-разложение

$$f = P_0f + \sum_{j=0}^2 Q_jf.$$

3.10. Напишите программу для анализа и синтеза массива данных x_1, x_2, \dots, x_{2^n} , основанную на формулах (21) и (23) при $m = 0$. Как модифицируется эта программа при переходе к случаю $m > 1$ и применении аппроксимаций вида (25)?

§4. Кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbf{R})$

Определение 1. *Кратномасштабным анализом* в $L^2(\mathbf{R})$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$, $j \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;
- (ii) $\bigcup V_j = L^2(\mathbf{R})$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
- (iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;
- (iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0$ для $k \in \mathbf{Z}$;
- (v) Существует функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом в V_0 .

Согласно (i), семейство $\{V_j\}$ представляет собой последовательность вложенных подпространств. Равенство $\bigcup V_j = L^2(\mathbf{R})$ означает, что объединение подпространств V_j , $j \in \mathbf{Z}$, плотно в $L^2(\mathbf{R})$. Пусть W_j – ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} , т.е.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Из свойств (i) и (ii) следуют равенства

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j \geq 0} W_j \right). \quad (2)$$

Свойство (iii) позволяет по одному подпространству V_0 воспроизвести все семейство $\{V_j\}$. Действительно, по этому свойству

$$f(\cdot) \in V_0 \iff f(2^j \cdot) \in V_j \quad \text{для всех } j \in \mathbf{Z}.$$

Согласно (iii) и (iv) имеем

$$f(\cdot) \in V_j \iff f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j \quad \text{для всех } k \in \mathbf{Z},$$

т.е. V_j инвариантно относительно сдвигов на $2^{-j}k$.

Из свойств (iii) и (v) следует, что система функций

$$\varphi_{1k}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t - k), \quad k \in \mathbf{Z},$$

является ортонормированным базисом подпространства V_1 . Поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, функция φ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\varphi, \varphi_{1k}) \varphi_{1k}. \quad (3)$$

Определение 2. *Масштабирующей функцией* в $L^2(\mathbf{R})$ называют функцию φ из $L^2(\mathbf{R})$ такую, что

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2t - k), \quad (4)$$

где $\{c_k\}$ – некоторая последовательность из l^2 .

Согласно (3), для функции φ из условия (v) определения 1 равенство (4) выполнено с коэффициентами $c_k = \sqrt{2}(\varphi, \varphi_{1k})$. Кроме того, из ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ выводится равенство

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \bar{c}_{k-2l} = 2 \delta_{0,l} \quad (\text{и, в частности, } \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2 = 2).$$

Функцию φ из условия (v) определения 1 называют *масштабирующей функцией кратномасштабного анализа* $\{V_j\}$.

Для произвольной последовательности $\{c_k\}$ из l^2 равенство (4) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно φ . Это уравнение называют *масштабирующим уравнением* для φ .

Определение 3. *Ортогональным вейвлетом* в $L^2(\mathbf{R})$ называется функция ψ такая, что функции

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (5)$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$.

Таким образом, если ψ – ортогональный вейвлет в $L^2(\mathbf{R})$, то система $\{\psi_{j,k}\}$ ортонормирована и всякая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}.$$

Для каждой масштабирующей функции φ полагают

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (6)$$

и

$$V_j = \overline{\text{span}} \{\varphi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7)$$

Для широкого класса масштабирующих функций соответствующие им ортогональные вейвлеты определяются по формуле, приведенной в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая уравнению (4), и пусть семейство подпространств $\{V_j\}$ определено по формуле (7). Предположим, что система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$ и объединение подпространств V_j плотно в $L^2(\mathbf{R})$, т. е.*

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}). \quad (8)$$

Тогда семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(\mathbf{R})$, а функция ψ , заданная формулой

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \bar{c}_{1-k} \varphi(2t - k), \quad (9)$$

является ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

Отметим, что ортогональный вейвлет по масштабирующей функции φ определяется неоднозначно (см. ниже замечание 2). Имеет место следующий критерий ортонормированности в $L^2(\mathbf{R})$ системы целочисленных сдвигов функции φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$. Система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \text{для п.в. } \xi \in \mathbf{R}. \quad (10)$$

Следующие два предложения содержат условия, достаточные для справедливости равенства (8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условию ортогональности (10), а преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ ограничено на \mathbf{R} и непрерывно в окрестности нуля, причем $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Тогда верно равенство (8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условию ортогональности (10) и существует константа $C > 0$ такая, что

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \quad \text{для всех } t \in \mathbf{R}$$

(в частности, φ может иметь компактный носитель на \mathbf{R}). Тогда равенство (8) эквивалентно условию $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$.

В связи с предложением 3 принимают следующее условие нормировки:

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = \widehat{\varphi}(0) = 1. \quad (11)$$

При условиях теоремы 1 для каждого фиксированного j система $\{\psi_{jk} : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства W_j . Ортогональные проекторы $P_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_j$ и $Q_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow W_j$ для каждого $j \in \mathbf{Z}$ определяются формулами

$$P_j f = \sum_k a_{jk} \varphi_{jk}, \quad a_{jk} = (f, \varphi_{jk}),$$

и

$$Q_j f = \sum_k d_{jk} \psi_{jk}, \quad d_{jk} = (f, \psi_{jk}).$$

Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ согласно (1) имеем

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f, \quad \|P_{j+1} f\|^2 = \|P_j f\|^2 + \|Q_j f\|^2, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (12)$$

Иногда говорят, что $Q_j f$ содержит "детали", необходимые для перехода от j -го уровня аппроксимации функции f к более точному $(j+1)$ -му уровню. Соответственно, подпространства $\{V_j\}$ (и коэффициенты $\{a_{jk}\}$) называют *аппроксимирующими*, а подпространства $\{W_j\}$ (и коэффициенты $\{d_{jk}\}$) – *детализирующими*.

При фиксированном j и любом $s \in \mathbf{N}$ из равенств (12) получаем

$$P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f = \cdots = P_{j-s} f + Q_{j-s} f + \cdots + Q_{j-1} f \quad (13)$$

(схематично эти преобразования можно представить как в случае Хаара; см. Рис. 1).

Из соотношений

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \bigcap V_j = \{0\}$$

следует, что для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеют место равенства

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - P_j f\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\| = 0.$$

Таким образом, при увеличении j погрешность аппроксимации $f \approx P_j f$ убывает к нулю, а если $j \rightarrow -\infty$, то проекции $P_j f$ стремятся к нулевому элементу пространства $L^2(\mathbf{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ и пусть $h_k = (\varphi, \varphi_{1k})$, $g_k = (\psi, \varphi_{1k})$, $k \in \mathbf{Z}$, где масштабирующая функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1, а вейвлет ψ задан по формуле (9). Если известны коэффициенты a_{jk} разложения

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{jk} \varphi_{jk},$$

то коэффициенты разложений

$$P_{j-1} f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}, \quad Q_{j-1} f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k},$$

вычисляются по формулам

$$a_{j-1,k} = \sum_l \bar{h}_{l-2k} a_{jl}, \quad d_{j-1,k} = \sum_l \bar{g}_{l-2k} a_{jl}. \quad (14)$$

Обратно, если известны коэффициенты $a_{j-1,k}$ и $d_{j-1,k}$, то коэффициенты a_{jl} восстанавливаются по формуле

$$a_{jl} = \sum_k (h_{l-2k} a_{j-1,k} + g_{l-2k} d_{j-1,k}). \quad (15)$$

Из разложений (4) и (9) следует, что для коэффициентов в формулах (14) и (15) имеют место равенства $h_k = c_k / \sqrt{2}$, $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$. Учитывая (3), имеем также разложения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi(2t - k), \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \varphi(2t - k).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении 3.

ПРИМЕР 1. В случае Хаара $\varphi = \chi_{(0,1)}$ и

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1), \quad \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1).$$

Отсюда видно, что $g_0 = h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$, а все остальные коэффициенты h_k и g_k равны нулю. Из формул (14) и (15) получаем

$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

и

$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

Равенства (16) и (17) задают соответственно *прямое и обратное дискретные преобразования Хаара* (см. §3).

□

ПРИМЕР 2. Одна из масштабирующих функций Добеши является решением функционального уравнения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^3 h_k \varphi(2t - k)$$

с коэффициентами

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Эта функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1, непрерывна на \mathbf{R} и имеет носитель $\text{supp } \varphi = [0, 3]$. Ненулевые коэффициенты g_k связаны с коэффициентами (18) равенствами

$$g_{-2} = h_3, \quad g_{-1} = -h_2, \quad g_0 = h_1, \quad g_1 = -h_0,$$

а формулы (14) принимают вид

$$a_{j-1,k} = h_0 a_{j,2k} + h_1 a_{j,2k+1} + h_2 a_{j,2k+2} + h_3 a_{j,2k+3},$$

$$d_{j-1,k} = -h_0 a_{j,2k} + h_1 a_{j,2k+1} - h_2 a_{j,2k+2} + h_3 a_{j,2k+3}.$$

□

Замечание 1. Если число ненулевых коэффициентов в уравнении (4) конечно, то *прямые и обратные дискретные вейвлет-преобразования* могут быть заданы в матричной форме:

$$A_j \bar{a}_j = \bar{a}_{j-1}, \quad D_j \bar{a}_j = \bar{d}_{j-1}, \quad j = n, n-1, \dots, n-s, \quad (19)$$

и

$$\bar{a}_j = A_j^* \bar{a}_{j-1} + D_j^* \bar{d}_{j-1}, \quad j = n-s, n-s+1, \dots, n, \quad (20)$$

где n – начальный уровень аппроксимации, матрицы A_j и D_j находятся из формул (15), A_j^* , D_j^* – матрицы, комплексно-сопряженные к A_j и D_j .

Применим преобразование Фурье к обеим частям масштабирующего уравнения (4). В результате получим

$$\hat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2) \hat{\varphi}(\xi/2), \quad (21)$$

где

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}, \quad h_k = \frac{c_k}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (10), разлагая полученную сумму на две суммы с четными и нечетными индексами и пользуясь 2π -периодичностью функции $H(\xi)$, получаем, что

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \text{для п.в. } \xi \in \mathbf{R}. \quad (23)$$

При условии $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ (см. предложения 2 и 3) из (21) и (23) следует, что

$$H(0) = 1 \quad \text{и} \quad H(\pi) = 0. \quad (24)$$

Для произвольного $s \in \mathbf{N}$ из равенства (21) имеем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2^s) \prod_{j=1}^s H(\xi/2^j).$$

Отсюда видно, что если бесконечное произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j) \quad (25)$$

сходится и существует предел

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \widehat{\varphi}(\xi/2^j) = c \neq 0,$$

то

$$\widehat{\varphi}(\xi) = c \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j).$$

В частности, если функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ непрерывна в окрестности нуля, то

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j). \quad (26)$$

При условии нормировки (11) равенство (26) принимает вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j). \quad (27)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы свойства:*

1. Пусть функция $H(\xi)$ задана по формуле (22). Если $H(0) = 1$ и $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |h_k| |k|^\varepsilon < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то произведение (25) сходится равномерно на компактных множествах из \mathbf{R} .

2. Если 2π -периодическая функция $H(\xi)$ обладает свойством (23), а произведение (25) сходится к функции $F(\xi)$ для почти всех $\xi \in \mathbf{R}$, то $F \in L^2(\mathbf{R})$ и $\|F\| \leq 1$.

3. Пусть 2π -периодическая функция $H(\xi)$ непрерывно дифференцируема на \mathbf{R} и обладает свойством (23). Предположим, что $H(0) = 1$ и $H(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Тогда существует функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что справедливо равенство (27) и система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$.

Применим теперь преобразование Фурье к обеим частям равенства (9). В результате получим формулу

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad (28)$$

где

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k e^{-ik\xi}, \quad g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}. \quad (29)$$

Из формул (22) и (29) видно, что

$$G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}. \quad (30)$$

Учитывая (23), замечаем, что матрица

$$\begin{pmatrix} H(\xi) & H(\xi + \pi) \\ G(\xi) & G(\xi + \pi) \end{pmatrix} \quad (31)$$

является унитарной для п.в. $\xi \in \mathbf{R}$.

Будем говорить, что ψ имеет N нулевых моментов, если

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t) dt = 0 \quad \text{для } 0 \leq l \leq N-1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \psi(t) dt \neq 0. \quad (32)$$

При условии абсолютной интегрируемости функций $t^l \psi(t)$, $0 \leq l \leq N$, формулы (32) эквивалентны следующим

$$\widehat{\psi}(0) = \widehat{\psi}'(0) = \dots = \widehat{\psi}^{(N-1)}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}^{(N)}(0) \neq 0. \quad (33)$$

Согласно (28) и (30) имеем

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2). \quad (34)$$

Поскольку $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, из (33) и (34) следует, что

$$H(\pi) = H'(\pi) = \dots = H^{(N-1)}(\pi) = 0 \quad \text{и} \quad H^{(N)}(\pi) \neq 0, \quad (35)$$

т.е. число π является нулем кратности N функции $H(\xi)$.

Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема $N-1$ раз в окрестности точки t_0 . Тогда по формуле Тейлора

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{f^{(N-1)}(t_0)}{(N-1)!} (t - t_0)^{N-1} + \beta(t)(t - t_0)^{N-1},$$

где $\beta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Если ортогональный вейвлет ψ имеет N нулевых моментов, то

$$\int_{\mathbf{R}} (t - t_0)^l \psi_{j,k}(t) dt = 0 \quad \text{для } 0 \leq l \leq N - 1$$

и, следовательно,

$$d_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbf{R}} \beta(t) (t - t_0)^{N-1} \psi_{j,k}(t) dt. \quad (36)$$

Известно, что если ортогональный вейвлет ψ принадлежит классу $C^{N-1}(\mathbf{R})$ и имеет компактный носитель, то ψ имеет N нулевых моментов. Отсюда и из формулы (36) видно, что $d_{j,k} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$, причем скорость убывания коэффициентов $d_{j,k}$ к нулю тем выше, чем больше производных в окрестности точки t_0 имеют f и ψ . Таким образом, детализирующие коэффициенты $d_{j,k}$ при больших j близки к нулю в окрестности точек, где функция f гладкая. Это свойство играет важную роль при локализации особенностей сигналов с помощью вейвлетов.

Замечание 2. Иногда вместо формулы (9) вейвлет ψ определяется по формуле

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \varphi(2t - k),$$

где $g_k = (-1)^{k+1} \bar{h}_{-k-1}$ или $g_k = (-1)^k \bar{h}_{N-k}$. Соответственно, вместо функции (30) в формуле (28) берут одну из следующих функций

$$G(\xi) = e^{i\xi} \overline{H(\xi + \pi)} \quad \text{или} \quad G(\xi) = e^{-iN\xi} \overline{H(\xi + \pi)}. \quad (37)$$

Вообще, если φ – масштабирующая функция некоторого кратномасштабного анализа в $L^2(\mathbf{R})$, то ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$ является любая функция ψ , преобразование Фурье которой представимо по формуле

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\gamma(\xi/2)} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

где функция $H(\xi)$ определена в (22), а функция $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что $\gamma(\xi + 2\pi) - \gamma(\xi) \in 2\pi\mathbf{Z}$ для всех $\xi \in \mathbf{R}$.

Вейвлет Котельникова – Шеннона

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(t) = \text{sinc } \pi t = \begin{cases} \sin \pi t / \pi t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Из формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi t} d\xi = \text{sinc } \pi t$$

видно, что преобразованием Фурье функции (38) является функция $\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$. Поэтому условие

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \text{п.в.}$$

выполнено и система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$.

Пусть V_0 состоит из тех функций пространства $L^2(\mathbf{R})$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль вне отрезка $[-\pi, \pi]$. По теореме Котельникова – Шеннона каждая функция $f \in V_0$ представима в виде

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) \operatorname{sinc} \pi(t - k). \quad (39)$$

Учитывая (38), получаем, что система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом подпространства V_0 . Для соответствующего семейства подпространств

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-2^j \pi, 2^j \pi]\}, \quad j \in \mathbf{Z},$$

свойства

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

очевидны. Как в общем случае (см. (6)), положим

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

При каждом фиксированном j система $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства V_j . Аналогично (3) и (21) имеем

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi_{1k}, \quad h_k = (\varphi, \varphi_{1k}), \quad (40)$$

и

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = H(\xi) \widehat{\varphi}(\xi), \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k e^{-k\xi}. \quad (41)$$

Для $\xi \in [-\pi, \pi]$ после подстановки $\widehat{\varphi} = \chi_{[-\pi, \pi]}$ в (41) получаем

$$H(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0, & \xi \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]. \end{cases} \quad (42)$$

Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ функция $H(\xi)$ продолжается периодически. Коэффициенты в (40) вычисляются по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\xi) e^{ik\xi} d\xi,$$

из которой с помощью (42) получаются равенства

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, \\ (-1)^{(k-1)/2} \sqrt{2}/k\pi, & k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

причем $h_k = 0$ для остальных k .

Таким образом, функция (38) является масштабирующей функцией в $L^2(\mathbf{R})$. Согласно (34), преобразование Фурье соответствующего ортогонального вейвлета ψ может быть найдено по формуле

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2) = \begin{cases} e^{-i\xi/2}, & \pi \leq |\xi| \leq 2\pi, \\ 0 & \text{для остальных } \xi. \end{cases}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, находим

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i(t-1/2)\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(t-1/2)\xi} d\xi$$

или

$$\psi(t) = 2 \operatorname{sinc} 2\pi(t - 1/2) - \operatorname{sinc} \pi(t - 1/2). \quad (43)$$

Функцию (43) называют *вейвлетом Котельникова – Шеннона*. Она связана с масштабирующей функцией (38) равенством $\psi(t) = 2\varphi(2t - 1) - \varphi(t - 1/2)$.

Замечание 3. Полезно сравнить конструкцию Котельникова – Шеннона с конструкцией Хаара. В то время как вейвлет Хаара является ступенчатой разрывной функцией, вейвлет Котельникова – Шеннона (43) имеет производные всех порядков и продолжается с вещественной прямой \mathbf{R} на комплексную плоскость как целая функция. Соответствующие масштабирующие функции определяются с помощью характеристических функций числовых промежутков: в первом случае $\varphi = \chi_{[0,1]}$ (во временной области), а во втором $\widehat{\varphi} = \chi_{[\pi, \pi]}$ (в частотной области). Поэтому конструкция Котельникова – Шеннона в некотором смысле противоположна конструкции Хаара.

Вейвлеты Мейера

Нам потребуется вспомогательная функция

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^3(10 - 15x + 6x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (44)$$

удовлетворяющая условию

$$\nu(1 - x) = 1 - \nu(x) \quad \text{для } x \in \mathbf{R}. \quad (45)$$

Отметим, что

$$\nu(x) = 30 \int_0^x t^2(1-t)^2 dt \quad \text{для } x \in [0, 1].$$

Выберем в качестве φ функцию из $L^2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq 2\pi/3, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1\right)\right), & 2\pi/3 \leq |\xi| \leq 4\pi/3, \\ 0, & |\xi| \geq 4\pi/3. \end{cases} \quad (46)$$

Функция φ бесконечно дифференцируема на \mathbf{R} , так как ее преобразование Фурье имеет компактный носитель. Для нее имеет место интегральное представление

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi/3} \widehat{\varphi}(\xi) \cos \xi t d\xi. \quad (47)$$

Из формул (44) и (46) видно, что $\widehat{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$. Кроме того, для 2π -периодической непрерывной функции

$$\Phi(\xi) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2$$

имеем

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)|^2, & -4\pi/3 \leq \xi \leq -2\pi/3, \\ |\widehat{\varphi}(\xi)|^2, & |\xi| \leq 2\pi/3, \\ |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + |\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)|^2, & 2\pi/3 \leq \xi \leq 4\pi/3. \end{cases} \quad (48)$$

Учитывая (44) и (46), замечаем, что $\Phi(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 2\pi/3$. Пусть $2\pi/3 \leq \xi \leq 4\pi/3$. Тогда

$$\frac{3}{2\pi} |\xi - 2\pi| - 1 = 1 - \left(\frac{3}{2\pi} \xi - 1 \right)$$

и, в силу (46) и (48),

$$\Phi(\xi) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \xi - 1 \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \xi - 1 \right) \right) = 1.$$

Аналогично, $\Phi(\xi) = 1$ при $-4\pi/3 \leq \xi \leq -2\pi/3$. Таким образом, для функции (46) выполнено условие ортонормированности:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1.$$

Пользуясь теоремой 1 и предложением 2, видим, что свойства

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

также выполнены.

Таким образом, функция (47) является масштабирующей функцией. Соответствующий вейвлет ψ будем искать с помощью формулы (34). Пользуясь (46), из равенства

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$$

находим

$$H(\xi) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(2\xi), & \xi \in [-2\pi/3, 2\pi/3], \\ 0, & \xi \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{cases}$$

Соответственно, коэффициенты разложений

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi_{1k}, \quad \text{и} \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}$$

вычисляются по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\xi) e^{ik\xi} d\xi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \widehat{\varphi}(2\xi) \cos k\xi d\xi.$$

За пределы отрезка $[-\pi, \pi]$ функция $H(\xi)$ продолжается периодически. Для этой функции при любом $\xi \in \mathbf{R}$ имеем

$$H(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(2\xi + 4\pi k).$$

Применяя (34), получаем

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2) = e^{-i\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2) \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi + 4\pi k).$$

Учитывая, что функция $\widehat{\varphi}(\xi/2)$ равна нулю вне промежутка $[-8\pi/3, 8\pi/3]$, находим следующее выражение для преобразования Фурье вейвлета ψ :

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2) (\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi) + \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)). \quad (49)$$

Из формул (46) и (49) выводится интегральное представление *вейвлета Мейера*:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \widehat{\varphi}(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi) \cos \xi(t - 1/2) d\xi. \quad (50)$$

Замечание 4. Преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера (46) представляет собой сглаженный вариант соответствующей функции из конструкции Котельникова – Шеннона. При этом иногда вместо функции (44) выбирают другую вспомогательную функцию ν , удовлетворяющую условию (45) и такую, что

$$\nu(x) = 0 \quad \text{для } x \leq 0 \quad \text{и} \quad \nu(x) = 1 \quad \text{для } x \geq 1.$$

Если потребовать, чтобы в точках $2\pi/3$ и $4\pi/3$ функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ имела n непрерывных производных, то можно показать, что в классе полиномиальных (на отрезке $[0, 1]$) функций вспомогательная функция единственна и имеет вид

$$\nu(x) = x^{n+1} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x).$$

Для $n = 1$ и $n = 3$ получаются функции

$$\nu(x) = x^2(3 - 2x) \quad \text{и} \quad \nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Вспомогательная функция (44) соответствует значению $n = 2$. Для каждой из этих вспомогательных функций получаются свои масштабирующие функции и вейвлеты.

Все вейвлеты Мейера принадлежат классу $C^\infty(\mathbf{R})$ и убывают на бесконечности быстрее любой отрицательной степени (но не экспоненциально быстро). При построении графиков масштабирующих функций и вейвлетов Мейера в системе MATLAB следует обращать внимание на выбор не только функции ν , но и функции G (см. замечание 2).

Масштабирующие функции и вейвлеты Добеши

В 1988 г. Ингрид Добеши для каждого натурального N доказала существование вещественных коэффициентов $h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}$ таких, что решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2t - k) \quad (51)$$

обладает следующими свойствами:

1) функция φ принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = 1 \quad (52)$$

и имеет компактный носитель: $\text{supp } \varphi = [0, 2N - 1]$;

2) система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$;

3) семейство замкнутых подпространств

$$V_j = \overline{\text{span}} \{\varphi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z},$$

является кратномасштабным анализом в $L^2(\mathbf{R})$.

При $N = 1$ конструкция Добеши приводит к функции Хаара: $\varphi = \chi_{[0,1]}$, а при $N = 2$ решение уравнения (51) непрерывно на \mathbf{R} и удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq C |t - x|^\alpha, \quad t, x \in \mathbf{R},$$

с показателем $\alpha \approx 0,550$. Известно также, что при $N \geq 3$ решения уравнения (51) непрерывно дифференцируемы на \mathbf{R} и при достаточно больших N их гладкость растет приблизительно как $0,2N$ (подробности см. в [2]).

Для $N = 1$ и $N = 2$ коэффициенты уравнения (51) приведены в примерах 1 и 2. В таблице 6.1 книги [2] даны значения коэффициентов этого уравнения для $3 \leq N \leq 10$.

Ортогональный вейвлет ψ , соответствующий решению φ уравнения (51), определяется по формуле

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \varphi(2t - k), \quad (53)$$

где $g_k = (-1)^k h_{1-k}$, если $0 \leq 1 - k \leq 2N - 1$, и $g_k = 0$ в остальных случаях. Справедливы свойства:

1) вейвлет ψ имеет N нулевых моментов:

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t) dt = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq l \leq N - 1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \psi(t) dt \neq 0; \quad (54)$$

2) $\text{supp } \psi = [-N + 1, N]$;

3) гладкость вейвлета ψ совпадает с гладкостью функции φ (например, если функция φ имеет на прямой \mathbf{R} непрерывную производную порядка l , то из формулы (53) следует, что таким же свойством обладает и вейвлет ψ).

Интегрируя обе части уравнения (51) и пользуясь условием нормировки (52), получаем

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = \sqrt{2}.$$

Применяя преобразование Фурье, из (51) имеем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\xi}, \quad (55)$$

где $H(0) = 1$. Согласно (23), (35) и (54) тригонометрический полином $H(\xi)$ должен удовлетворять условиям

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (56)$$

и

$$H(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N B(\xi), \quad (57)$$

где $B(\xi)$ – тригонометрический полином, $B(\pi) \neq 0$. Тогда

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi)H(-\xi) = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^N B(\xi)B(-\xi). \quad (58)$$

Произведение $B(\xi)B(-\xi)$ является четным тригонометрическим полиномом. Значит, существует алгебраический полином $P(y)$ такой, что

$$B(\xi)B(-\xi) = P(\sin^2(\xi/2)).$$

Полагая $y = \sin^2(\xi/2)$, из (56) и (58) получаем

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1. \quad (59)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Полином

$$P_N(y) := \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} y^j$$

удовлетворяет уравнению (59) и всякое полиномиальное решение этого уравнения имеет вид

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(1/2 - y),$$

где $R(y)$ – нечетный алгебраический полином, выбранный так, чтобы $P(y) \geq 0$ для $0 \leq y \leq 1$.

Отметим, что $P_N(y)$ является частной суммой биномиального ряда

$$(1 - y)^{-N} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{N - 1 + j}{j} y^j.$$

Масштабирующие функции Добеши получаются в случае, когда $R(y) \equiv 0$. Точнее говоря, коэффициенты $h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}$ в формуле (51) выбираются так, чтобы тригонометрический полином $H(\xi)$ удовлетворял условию

$$|H(\xi)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^N P_N(\sin^2(\xi/2)). \quad (60)$$

Алгоритм вычисления этих коэффициентов основан на хорошо известном доказательстве (см. приложение 4) следующей классической леммы.

ЛЕММА РИССА. Пусть

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k \xi, \quad a_k \in \mathbf{R}, \quad a_n \neq 0,$$

– четный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условиям

$$A(0) = 1 \quad \text{и} \quad A(\xi) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Тогда существует тригонометрический полином

$$B(\xi) = \sum_{k=0}^n b_k e^{k\xi}, \quad b_k \in \mathbf{R}, \quad b_n \neq 0,$$

такой, что

$$B(0) = 1 \quad \text{и} \quad |B(\xi)|^2 \equiv A(\xi).$$

При вычислении коэффициентов $h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}$ эту лемму следует применять к тригонометрическому полиному $A(\xi) = P_N(\sin^2(\xi/2))$. Например, в случае $N = 2$ имеем

$$P_2(\sin^2(\xi/2)) = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} \sin^2(\xi/2) = 2 - \cos \xi.$$

Найдем вещественные числа b_0 и b_1 такие, что $b_0 + b_1 = 1$ и

$$(b_0 + b_1 e^{-i\xi})(b_0 + b_1 e^{i\xi}) = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \quad (61)$$

(существование таких b_0 и b_1 следует из леммы Рисса, примененной к полиному $A(\xi) = 2 - \cos \xi$). Из равенства (61) следует, что

$$b_0^2 + b_1^2 = 2, \quad b_0 b_1 = -\frac{1}{2}.$$

Условию $b_0 + b_1 = 1$ удовлетворяют значения

$$b_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad b_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая (57), имеем

$$\sum_{k=0}^3 h_k e^{-ik\xi} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + 2e^{-i\xi} + e^{-2i\xi})(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-i\xi}.$$

Отсюда получаются значения h_0, h_1, h_2, h_3 , указанные в примере 2.

В заключение изложим два метода вычисления значений масштабирующих функций Добеши. *Итерационный метод* решения масштабирующего уравнения (51) состоит в реализации следующих двух шагов.

Шаг 1. Определить последовательность функций

$$\eta_0 = \chi_{[-1/2, 1/2]}, \quad \eta_m(\cdot) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2^m-1} h_k \eta_{m-1}(2 \cdot - k), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (62)$$

Шаг 2. Для $t \in \mathbf{R}$ принять

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m(t).$$

Сходимость этого метода обосновывается следующим образом. Из формул (62) имеем

$$\hat{\eta}_0(\xi) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}, \quad \hat{\eta}_m(\xi) = H(\xi/2) \hat{\eta}_{m-1}(\xi/2) = \left(\prod_{j=1}^m H(\xi/2^j) \right) \hat{\eta}_0(2^{-m}\xi).$$

Отсюда в силу предложения 4 следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\eta}_m(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j) = \hat{\varphi}(\xi).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем, что последовательность $\{\eta_m\}$ сходится к масштабирующей функции φ .

Каскадный метод решения масштабирующего уравнения (51) определяется следующим образом.

Шаг 1. Найти последовательность функций

$$\varphi_m(\cdot) = \sum_k a_k^m 2^{m/2} \chi_{[-1/2, 1/2]}(2^m \cdot - k), \quad m \in \mathbf{N}, \quad (63)$$

где

$$a_k^0 = \delta_{0,k}, \quad a_k^j = \sum_l h_{k-2l} a_l^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (64)$$

и коэффициенты h_k , отсутствующие в уравнении (51), принимаются равными нулю.

Шаг 2. Для $t \in \mathbf{R}$ принять

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(t).$$

Заметим, что формулы (64) представляют собой специальный случай формул (15).

Иногда в каскадном методе последовательность $\{\varphi_m\}$ определяют иначе. А именно, для каждого $m \in \mathbf{N}$ в качестве φ_m выбирают кусочно-линейную функцию, которая является линейной на отрезках $[2^{-m}k, 2^{-m}(k+1)]$, $k \in \mathbf{Z}$, и такой, что $\varphi_m(2^{-m}k) = 2^{m/2} a_k^m$. При этом

$$\varphi_m(2^{-m}2k) = \sqrt{2} \sum_l h_{2(k-l)} \varphi_{m-1}(2^{-j+1}l), \quad (65)$$

$$\varphi_m(2^{-m}(2k+1)) = \sqrt{2} \sum_l h_{2(k-l)+1} \varphi_{m-1}(2^{-j+1}l). \quad (66)$$

Напомним, что $\text{supp } \varphi = [0, 2N-1]$. Поэтому $\varphi(0) = \varphi(2N-1) = 0$. Значения $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2N-2)$ находятся из уравнения (51) при условии

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(2N-2) = 1.$$

При $m = 1$ правые части формул (65) и (66) определяются с помощью равенств

$$\varphi_0(t+k) = (1-t)\varphi(k) + t\varphi(k+1) \quad \text{для } t \in [0, 1], \quad k = 0, 1, \dots, 2N-2.$$

После этого для данного $m \geq 2$ приближенные значения φ в двоично-рациональных точках $k/2^m$, лежащих на отрезке $[0, 2N-1]$, находятся по формулам (65) и (66). Выбирая m достаточно большим, этим способом получают график функции φ на отрезке $[0, 2N-1]$. Обоснование каскадного метода имеется в § 6.5 книги Добеши [2].

Нормализованные B -сплайны и вейвлеты Батла-Лемарье

Система нормализованных B -сплайнов $\{N_m(t)\}$ определяется формулами

$$N_1(t) = \chi_{[0,1)}(t), \quad N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1), \quad m = 2, 3, \dots \quad (67)$$

Из формулы (67) при $m = 2$ получаем

$$N_2(t) = t N_1(t) + (2-t) N_1(t-1)$$

и, следовательно,

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2) \end{cases}$$

Справедливы свойства:

1⁰. N_m на каждом отрезке $[k, k+1]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, совпадает с алгебраическим полиномом степени $m-1$.

2⁰. $N_m \in C^{m-2}(\mathbf{R})$ для $m \geq 2$.

3⁰. $\text{supp } N_m = [0, m]$ и $N_m > 0$ для всех $t \in (0, m)$.

4⁰. $N_m(t)$ выражается через $N_m(2t-k)$, $k = 0, 1, \dots, m$, по формуле

$$N_m(t) = 2^{-m+1} \sum_{k=0}^m C_k^m N_m(2t-k), \quad (68)$$

где

$$C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

– биномиальные коэффициенты.

5⁰. $N_m = N_1 * N_{m-1}$, т.е.

$$N_m(t) = \int_0^1 N_{m-1}(t-\tau) d\tau$$

для $m \geq 2$.

6⁰. Преобразования Фурье нормализованных B -сплайнов находятся по формуле

$$\widehat{N}_m(\xi) = e^{-im\xi/2} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^m.$$

Отметим, что свойства 5⁰ и 6⁰ приводились в упражнении 1.8. Из формулы (68) имеем, в частности,

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_1(2t) + N_1(2t-1), \\ 2N_2(t) &= N_2(2t) + 2N_2(2t-1) + N_2(2t-2), \\ 4N_3(t) &= N_3(2t) + 3N_3(2t-1) + 3N_3(2t-2) + N_3(2t-3). \end{aligned}$$

Сплайнами степени r дефекта 1 с целочисленными узлами называется функция $f \in C^{r-1}(\mathbf{R})$, совпадающая на каждом отрезке $[k, k+1]$, $k \in \mathbf{N}$, с некоторым полиномом степени r (этот полином зависит от k). Множество таких сплайнов обозначается $S_r(\mathbf{Z})$; в частности, $S_0(\mathbf{Z})$ и $S_1(\mathbf{Z})$ состоят соответственно из кусочно-постоянных функций и ломаных с узловыми точками $k \in \mathbf{Z}$.

Нормализованный B -сплайн N_m принадлежит пространству $S_{m-1}(\mathbf{Z})$.

Пусть $m \geq 2$. Известно, что система $\{N_m(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса пространства

$$V_0 = S_{m-1} \cap L^2(\mathbf{R}).$$

Кроме того, выполнены неравенства

$$0 < A_m \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\xi + 2\pi k)|^2 \leq 1, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad (69)$$

где константа A_m зависит только от m (см., например, [10, формула (4.2.21)]).

Функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{N}_m(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\xi + 2\pi k)|^2 \right)^{-1/2}, \quad (70)$$

называется *масштабирующей функцией Батла – Лемарье*. Отметим, что согласно (69) и (70) справедливо неравенство

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq A_m^{-1/2} |\widehat{N}_m(\xi)|, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, масштабирующая функция Батла – Лемарье может быть задана равенством

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{it\xi} d\xi, \quad t \in \mathbf{R},$$

где $\widehat{\varphi}(\xi)$ имеет вид (7). Эта функция обладает свойствами:

- 1⁰. Функция φ принадлежит пространству $V_0 = S_{m-1} \cap L^2(\mathbf{R})$.
- 2⁰. Система $\{\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства V_0 .
- 3⁰. Носитель $\text{supp } \varphi$ не компактен.
- 4⁰. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) e^{\gamma|t|} = 0$ при некотором $\gamma > 0$.

Из свойства 4⁰ следует существование константы $C > 0$ такой, что

$$|\varphi(t)| \leq C e^{-\gamma|t|} \quad \text{для всех } t \in \mathbf{R},$$

т.е. φ убывает экспоненциально.

Разложим функцию φ по базису Рисса $\{N_m(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$ пространства V_0 :

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k N_m(t - k), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (71)$$

Применяя преобразование Фурье, получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi} \widehat{N}_m(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (72)$$

Из формулы (70) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{\widehat{N}_m(\xi)}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}}, \quad (73)$$

где

$$e_n(\xi) := \left(2 \sin \frac{\xi}{2} \right)^{n+2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(\xi + 2\pi k)^{n+2}}.$$

Из (72) и (73) видно, что числа α_k являются коэффициентами Фурье функции $1/\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}$, то есть

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}} d\xi, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (74)$$

Известно, что если $x = \cos(\xi/2)$, то

$$e_n(\xi) = u_n(x), \quad (75)$$

где система $\{u_n(x)\}$ определяется формулами

$$u_0(x) = 1, \quad u_n(x) = xu_{n-1}(x) + \frac{1-x^2}{n+1}u'_{n-1}(x), \quad n \in \mathbf{N}.$$

В частности,

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = \frac{1}{3}(1+2x^2), \quad u_3(x) = \frac{1}{3}(2x+x^3), \quad u_4(x) = \frac{1}{15}(2+11x^2+2x^4).$$

С помощью формул (71), (74) и (75) можно вычислять значения функции φ .

По масштабирующей функции φ стандартным образом определяется ортогональный вейвлет ψ . А именно, пусть

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad (76)$$

где

$$G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}, \quad H(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)/\widehat{\varphi}(\xi). \quad (77)$$

Замечая, что

$$\widehat{N}_m(2\xi) = e^{-i\xi m/2} \cos^m(\xi/2) \widehat{N}_m(\xi),$$

из (73), (76) и (77) выводим формулу

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2) \frac{\widehat{N}_m(\xi/2)}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi/2)}}. \quad (78)$$

Отсюда аналогично (71) и (74) имеем

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_k N_m(t-k), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (79)$$

где

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(\xi) e^{ik\xi}}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}} d\xi, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (80)$$

Вейвлет Батла – Лемерье ψ , определенный формулами (79) и (80), обладает следующими свойствами:

1⁰. Вейвлет ψ является сплайном степени $m-1$ дефекта 1 с узловыми точками $k/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

2⁰. Система $\{2^{j/2}\psi(\cdot - k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства $L^2(\mathbf{R})$.

3⁰. Для $k = 0, 1, \dots, m - 1$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt = 0.$$

4⁰. Носитель $\text{supp } \psi$ не компактен.

5⁰. Существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) e^{\gamma|t|} = 0.$$

График вейвлета ψ может быть построен с помощью формул (79) и (80).

Упражнения

4.1. Докажите, что из свойств (i) и (ii) определения 1 следуют равенства (2).

4.2. Докажите, что если функция φ в свойстве (v) определения 1 имеет компактный носитель, то в разложении (3) только конечное число коэффициентов h_k отлично от нуля.

4.3. Для функции φ из примера 2 вычислите значения $\varphi(1)$ и $\varphi(2)$.

4.4. Докажите, что условие (23) необходимо для ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ в $L^2(\mathbf{R})$.

4.5. Покажите, что для функции $\varphi = (1/3)\chi_{[0,3)}$ условие (23) выполнено, произведение (25) сходится к $\widehat{\varphi}(\xi)$, но система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ не является ортонормированной в $L^2(\mathbf{R})$.

4.6. Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1, а функции $H(\xi)$ и $G(\xi)$ определены формулами (22) и (29). Докажите, что матрица (31) унитарна для п.в. $\xi \in \mathbf{R}$. Убедитесь в унитарности матрицы (31) при условиях примеров 1 и 2.

4.7. Пусть функция $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ и масштабирующему уравнению

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2t - k),$$

а система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$. Докажите, что тогда выполнены равенства

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k = 2, \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k c_k = 0, \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \bar{c}_{k-2l} = 2 \delta_{0,l}.$$

4.8. Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R})$, имеющая компактный носитель, удовлетворяющая масштабирующему уравнению (4) и такая, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Предположим, что система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$, а функция ψ получена из φ по формуле (9). Докажите, что если ψ имеет N нулевых моментов, то

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k k^l c_k = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq l \leq N - 1.$$

4.9. Докажите теорему 2.

4.10. Укажите явный вид матриц A_3, D_3 и A_3^*, D_3^* в формулах (19) и (20) при условиях примеров 1 и 2.

4.11. Найдите вейвлет Котельникова – Шеннона ψ , если его преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

где $\widehat{\varphi} = \chi_{[-\pi, \pi]}$, а функция H задана по формуле (42). Постройте графики масштабирующей функции φ и вейвлета Котельникова – Шеннона ψ .

4.12. Постройте график функции (44) и нарисуйте эскиз графика функции (46).

4.13. Каким будет носитель функции ψ , определенной по формуле (53), если в этой формуле положить: а) $g_k = (-1)^{k+1} h_{-k-1}$, б) $g_k = (-1)^k h_{N-k}$? Предполагается, что ненулевые коэффициенты h_k берутся из формулы (51).

4.14. Проверьте, что при $N = 1$ конструкция Добеши приводит к вейвлету Хаара.

4.15. Напишите программу для вычисления значений масштабирующих функций Добеши.

Приложение 1.

Метод блока фильтров

Пусть два данных числа x_1, x_2 заменены средним значением c и полуразностью δ :

$$c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \delta = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad (1)$$

т.е. выполнено преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (c, \delta)$. Обратное преобразование осуществляется по формулам

$$x_1 = c + \delta, \quad x_2 = c - \delta.$$

Поэтому исходные числа x_1, x_2 восстанавливаются по среднему значению c с абсолютной погрешностью, равной модулю числа δ :

$$|x_1 - c| = |x_2 - c| = |\delta|.$$

Значит, при малом $|\delta|$ *пару* чисел (x_1, x_2) можно закодировать *одним* числом c .

Пусть теперь даны четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 . Вычислим средние значения и полуразности:

$$c_{1,0} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \delta_{1,0} = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad (2)$$

$$c_{1,1} = \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad \delta_{1,1} = \frac{x_3 - x_4}{2}, \quad (3)$$

т.е. выполним преобразование $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (c_{1,0}, c_{1,1}, \delta_{1,0}, \delta_{1,1})$. Полученные таким образом числа $c_{1,0}, c_{1,1}$ и $\delta_{1,0}, \delta_{1,1}$ называют соответственно *аппроксимирующими* и *детализирующими* числами первого уровня. Если детализирующие числа $\delta_{1,0}, \delta_{1,1}$ имеют малые модули, то набор *четырёх* чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) можно закодировать (или аппроксимировать) *парой* чисел $(c_{1,0}, c_{1,1})$. В свою очередь, к числам $c_{1,0}, c_{1,1}$ можно применить преобразование по формулам (1) и получить числа нулевого уровня

$$c_{0,0} = \frac{c_{1,0} + c_{1,1}}{2}, \quad \delta_{0,0} = \frac{c_{1,0} - c_{1,1}}{2}. \quad (4)$$

Из равенств (2) – (4) видно, что аппроксимирующее число нулевого уровня совпадает со средним арифметическим данных четырех чисел:

$$c_{0,0} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Добавив к числам (4) детализирующие числа первого уровня, получим набор

$$(c_{0,0}, \delta_{0,0}, \delta_{1,0}, \delta_{1,1}),$$

по которому исходный набор (x_1, x_2, x_3, x_4) восстанавливается однозначно. Действительно, сначала из (4) по числам $c_{0,0}$ и $\delta_{0,0}$ находятся $c_{1,0}$ и $c_{1,1}$, а затем из формул (2) и (3) по значениям $c_{1,0}, c_{1,1}, \delta_{1,0}, \delta_{1,1}$ вычисляются x_1, x_2, x_3, x_4 .

ПРИМЕР. Для $x_1 = 9, x_2 = 7, x_3 = 3, x_4 = 5$ по формулам (2) и (3) находим

$$c_{1,0} = 8, c_{1,1} = 4, \delta_{1,0} = 1, \delta_{1,1} = -1.$$

Далее, применяя (4), получаем

$$c_{0,0} = 8, \delta_{0,0} = 1.$$

Таким образом, выполнено преобразование

$$(9, 7, 3, 5) \mapsto (6, 2, 1, -1)$$

(сравните с примером 1 в § 3).

□

Обобщая проведенные рассуждения на 2^n чисел x_1, x_2, \dots, x_{2^n} , приходим к следующему методу блока фильтров.

Шаг 1. Для $k = 1, 2, \dots, 2^n$ принять $c_{n,k-1} = x_k$.

Шаг 2. Для $j = n, n-1, \dots, 1$ вычислить

$$c_{j-1,k} = \frac{c_{j,2k} + c_{j,2k+1}}{2}, \quad \delta_{j-1,k} = \frac{c_{j,2k} - c_{j,2k+1}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1.$$

В результате будет выполнено преобразование кодирования:

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) \mapsto (c_{0,0}, \delta_{0,0}, \delta_{1,0}, \dots, \delta_{n-1,2^{n-1}-1}).$$

Обратное преобразование (декодирование или восстановление) осуществляется с помощью следующих двух шагов.

Шаг 3. Для $j = 1, 2, \dots, n$ вычислить

$$c_{j,2k} = c_{j-1,k} + \delta_{j-1,k}, \quad c_{j,2k+1} = c_{j-1,k} - \delta_{j-1,k}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1.$$

Шаг 4. Для $k = 1, 2, \dots, 2^n$ принять $x_k = c_{n,k-1}$.

Приложение 2.

Псевдокодовые процедуры дискретного преобразования Хаара

Следующие две псевдокодовые процедуры (см. [7, с.35]) реализуют прямое дискретное преобразование Хаара. Параметр m выбирается как в формулах (21) из § 3.

procedure *Decomposition* (**c**: array [1 ... 2^j] of reals)

$g = 2^j$

while $g \geq 2^{m+1}$ **do**

DecompositionStep($c[1 \dots g]$)

$g = g/2$

end while

end procedure;

```

procedure DecompositionStep (c: array [1 ... 2j] of reals)
  for  $i = 1$  to  $2^j/2$  do
     $c'[i] = (c[2i - 1] + c[2i])/\sqrt{2}$ 
     $c'[2^j/2 + i] = (c[2i - 1] - c[2i])/\sqrt{2}$ 
  end for
   $c = c'$ 
end procedure.

```

Отметим, что в процедуре *DecompositionStep* аппроксимирующие коэффициенты на каждом шаге помещаются на первые $g/2$ мест.

Исходные данные восстанавливаются с помощью следующих двух псевдокодовых процедур.

```

procedure Reconstruction (c: array [1 ... 2j] of reals)
   $g = 2^{m+1}$ 
  while  $g \leq 2^j$  do
    ReconstructionStep( $c[1 \dots g]$ )
     $g = 2g$ 
  end while
end procedure;

```

```

procedure ReconstructionStep (c: array [1 ... 2j] of reals)
  for  $i = 1$  to  $2^j/2$  do
     $c'[2i - 1] = (c[i] + c[2^j/2 + i])/\sqrt{2}$ 
     $c'[2i] = (c[i] - c[2^j/2 + i])/\sqrt{2}$ 
  end for
   $c = c'$ 
end procedure.

```

Приложение 3.

Доказательство теоремы 2 из §4

Ортогональные проекторы $P_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_j$ и $Q_j : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow W_j$ для каждого $j \in \mathbf{Z}$ определяются формулами

$$P_j f = \sum_k a_{jk} \varphi_{jk}, \quad a_{jk} = (f, \varphi_{jk}), \quad (1)$$

и

$$Q_j f = \sum_k d_{jk} \psi_{jk}, \quad d_{jk} = (f, \psi_{jk}). \quad (2)$$

Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f. \quad (3)$$

Переформулируем теорему 2 из §4 следующим образом:

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ и пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 и масштабирующему уравнению

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi(2t - l), \quad (4)$$

а вейвлет ψ задан по формуле

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} g_l \varphi(2t - l). \quad (5)$$

Если известны коэффициенты a_{jk} разложения

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{jk} \varphi_{jk},$$

то коэффициенты разложений

$$P_{j-1} f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}, \quad Q_{j-1} f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k},$$

вычисляются по формулам

$$a_{j-1,k} = \sum_l \bar{h}_{l-2k} a_{jl}, \quad d_{j-1,k} = \sum_l \bar{g}_{l-2k} a_{jl}. \quad (6)$$

Обратно, если известны коэффициенты $a_{j-1,k}$ и $d_{j-1,k}$, то коэффициенты a_{jl} восстанавливаются по формуле

$$a_{jl} = \sum_k (h_{l-2k} a_{j-1,k} + g_{l-2k} d_{j-1,k}). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь (4), для любых $j, k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$2^{(j-1)/2} \varphi(2^{j-1}t - k) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi(2^j t - (2k + l))$$

и, следовательно,

$$\varphi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi_{j,2k+l},$$

т.е.

$$\varphi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j,l}. \quad (8)$$

Аналогично из (5) выводится равенство

$$\psi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} g_{l-2k} \varphi_{j,l}. \quad (9)$$

Согласно (1) и (8) имеем

$$a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{l-2k}(f, \varphi_{j,l}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{l-2k} a_{jl}.$$

Аналогично из (2) и (5) выводим

$$d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{l-2k}(f, \varphi_{j,l}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{l-2k} a_{jl}.$$

Таким образом, формулы (6) доказаны.

Докажем (7). Согласно (8) и (9)

$$h_{l-2k} = (\varphi_{j-1,k}, \varphi_{j,k}), \quad g_{l-2k} = (\psi_{j-1,k}, \varphi_{j,k}). \quad (10)$$

Пользуясь тем, что разность $f - P_j f$ ортогональна подпространству V_j , и применяя (3), имеем

$$a_{jl} = (f, \varphi_{j,l}) = (P_j f, \varphi_{j,l}) = (P_{j-1} f, \varphi_{j,l}) + (Q_{j-1} f, \varphi_{j,l}).$$

Учитывая (1), (2) и (10), отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_{jl} &= \sum_k a_{j-1,k} (\varphi_{j-1,k}, \varphi_{j,l}) + \sum_k d_{j-1,k} (\psi_{j-1,k}, \varphi_{j,l}) = \\ &= \sum_k a_{j-1,k} h_{l-2k} + \sum_k d_{j-1,k} g_{l-2k}, \end{aligned}$$

т.е. верна формула (7). □

Приложение 4.

Лемма Рисса

Венгерский математик Фридьеш Рисс в 1916 г. доказал следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k \xi, \quad a_k \in \mathbf{R}, \quad a_n \neq 0, \quad (1)$$

– четный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$A(\xi) \geq 0 \quad \text{для всех } \xi \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Тогда существует тригонометрический полином

$$B(\xi) = \sum_{k=0}^n b_k e^{k\xi}, \quad b_k \in \mathbf{R}, \quad b_n \neq 0, \quad (3)$$

такой, что

$$|B(\xi)|^2 \equiv A(\xi). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ положим

$$p(z) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2^k} \left(z + \frac{1}{z}\right)^k \quad (5)$$

и доопределим $p(z)$ в точке $z = 0$ по непрерывности: $p(0) = \lim_{z \rightarrow 0} p(z)$. Из формулы Эйлера $\cos \xi = (e^{i\xi} + e^{-i\xi})/2$ видно, что

$$A(\xi) = e^{-in\xi} p(e^{i\xi}). \quad (6)$$

Многочлен $p(z)$ имеет на комплексной плоскости ровно $2n$ корней (с учетом кратностей). Не нарушая общности, предположим, что $a_0 \neq 0$. Тогда для многочлена $p(z)$ число 0 является корнем кратности n . Из формулы (5) видно, что если число $z_0 \neq 0$ является корнем $p(z)$, то число z_0^{-1} тоже является корнем $p(z)$. Многочлен $p(z)$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому если комплексное число z_0 является корнем $p(z)$, то число \bar{z}_0 тоже является корнем $p(z)$. Значит, если r_0 – отличный от нуля вещественный корень $p(z)$, то число r_0^{-1} тоже корень $p(z)$, а если z_0 – отличный от нуля комплексный корень $p(z)$, то числа \bar{z}_0 , z_0^{-1} , \bar{z}_0^{-1} тоже корни $p(z)$. При этом в случае $|z_0| = 1$ корни z_0 и z_0^{-1} будут кратными:

$$p(z_0) = p'(z_0) = p(z_0^{-1}) = p'(z_0^{-1}) = 0.$$

Все ненулевые корни многочлена $p(z)$ сгруппируем по трем множествам:

r_l, r_l^{-1} – пары вещественных корней,

$e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k}$ – пары кратных корней на единичной окружности,

$z_j, \bar{z}_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j^{-1}$ – четверки комплексных корней (первые два корня z_j, \bar{z}_j каждой четверки расположены либо внутри, либо вне единичной окружности).

В результате получаем разложение

$$\begin{aligned} p(z) &= 2^{-n} a_n z^n \prod_j (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \times \\ &\quad \times \prod_k (z - e^{i\theta_k})^2 (z - e^{-i\theta_k})^2 \prod_l (z - r_l)(z - r_l^{-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для любого $z_0 \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} |(e^{i\xi} - z_0)(e^{i\xi} - \bar{z}_0^{-1})| &= |z_0|^{-1} |(e^{i\xi} - z_0)(z_0 e^{i\xi} - 1)| = \\ &= |z_0|^{-1} |(e^{i\xi} - z_0)(e^{-i\xi} - \bar{z}_0)| = |z_0|^{-1} |e^{i\xi} - z_0|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Пользуясь условием (2) и равенствами (6) – (8), получаем

$$A(\xi) = |A(\xi)| = |p(e^{i\xi})| = 2^{-n} |a_n| \left| \prod_j |z_j|^{-1} (e^{i\xi} - z_j)(e^{i\xi} - \bar{z}_j) \right|^2 \times$$

$$\times \left| \prod_k (e^{i\xi} - e^{i\theta_k})(e^{i\xi} - e^{-i\theta_k}) \right|^2 \prod_l |r_l|^{-1} |e^{i\xi} - r_l|^2.$$

Остается заметить, что тригонометрический полином

$$B(\xi) = 2^{-n/2} |a_n|^{1/2} \prod_j |z_j|^{-1} (e^{i\xi} - z_j)(e^{i\xi} - \bar{z}_j) \times \prod_k (e^{i\xi} - e^{i\theta_k})(e^{i\xi} - e^{-i\theta_k}) \prod_l |r_l|^{-1/2} (e^{i\xi} - r_l) \quad (9)$$

имеет вид (3) и удовлетворяет условию (4).

□

Проведенное доказательство конструктивно: если вычислены корни многочлена $p(z)$, то тригонометрический полином $B(\xi)$ находится по формуле (9). Однако полином $B(\xi)$ по $A(\xi)$ определяется не однозначно. Действительно, как видно из (9), полином $B(\xi)$ изменится, если в какой-нибудь четверке комплексных корней $z_j, \bar{z}_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j^{-1}$ поменять местами первые и вторые пары (т.е. заменить z_j на z_j^{-1}). При построении классических вейвлетов Добеши все z_j (и r_l) берутся внутри единичной окружности (см. [2, с.269]).

Если дополнительно известно, что $A(0) = 1$, то в силу (4) имеем $|B(0)| = 1$. Полином $\tilde{B}(\xi) = B(\xi)/B(0)$ удовлетворяет условиям $\tilde{B}(0) = 1$ и $|\tilde{B}(\xi)| \equiv A(\xi)$. Значит, при условии $A(0) = 1$ полином $B(\xi)$ можно выбрать так, что $B(0) = 1$ (этим обоснован выбор полинома $B(\xi)$ на с.39).

Отметим также, что лемму Рисса иногда формулируют следующим образом: для любого четного неотрицательного тригонометрического полинома $A(\xi)$ степени n с вещественными коэффициентами существует алгебраический полином $Q(z)$ степени n с вещественными коэффициентами такой, что $|Q(e^{i\xi})|^2 \equiv A(\xi)$. Переход к этой формулировке получается с помощью формулы $B(\xi) = Q(e^{i\xi})$, где $Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ и коэффициенты b_k такие же, как в (3).

Литература

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М: Техносфера, 2004.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
3. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть II. М: МЦНМО, 1998.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976.
5. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М: Физматлит, 2003.
6. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М: Мир, 2005.
7. *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
8. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Изд-во Триумф, 2003.
9. *Федоров В.М.* Курс функционального анализа. М.: Изд-во "Лань", 2005.
10. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М: Мир, 2001.
11. *Holshneider M.* Wavelets: an analysis tool. Oxford: Clarendon Press, 1995.
12. *Jaffard S., Meyer Y.* Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions // Memoirs of the American Mathematical Society, no. 587, 1996.