ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ю. А. Фарков

Ряды Фурье
и основы вейвлет-анализа

Москва
2007

Ю. А. Фарков. Ряды Фурье и основы вейвлет-анализа. Учебное пособие. РГГРУ. 2007 г.

Учебное пособие состоит из трех глав и содержит начальные сведения по следующим темам:

– ряды и преобразования Фурье;

– преобразование Габора;

– непрерывные и дискретные вейвлет-преобразования;

– классические ортогональные системы (Хаара, Уолша, Радемахера, Лежандра и др.);

– вейвлеты Хаара, Добеши, Мейера, Котельникова – Шеннона, Батла – Лемарье и Лэнга;

– наилучшие приближения в гильбертовых пространствах;

– дискретные преобразования Уолша и Виленкина – Крестенсона;

– мультипликативные системы;

– кратномасштабный p-анализ на полупрямой.

Наряду с традиционными материалами представлены результаты из недавних журнальных публикаций о вейвлетах, а также упражнения и задания для самостоятельной работы. Основная цель данного пособия – подготовить студентов к изучению современной литературы по применениям рядов Фурье и вейвлетов для анализа сигналов, кодирования изображений и в компьтерной графике.

Библиография: 30 наименований.

Глава 1. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

§ 1. Скалярное произведение в линейных пространствах

Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) с нулевым элементом θ. *Скалярным произведением* в X называется функция, отображающая $X \times X$ в $\mathbf{R}$ (или в $\mathbf{C}$), обозначаемая $(\cdot\,,\cdot)$ и обладающая следующими свойствами:

1) для всех $x_1, x_2, y \in X$ и всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$)

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$$

(*линейность по первому аргументу*);

2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ для всех $x, y \in X$ (*эрмитовская симметричность*, в вещественном случае – обычная *симметричность*: $(y, x) = (x, y)$);

3) $(x, x) \geq 0$ для любого $x \in X$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (*положительная определенность*).

Из свойств 1) и 2) следуют равенства

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, \alpha_1 y_1) + (x, \alpha_2 y_2) \quad \text{и} \quad (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y).$$

В произвольном пространстве со скалярным произведением имеет место *неравенство Коши – Буняковского*

$$|\,(x, y)\,|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Для доказательства этого неравенства (при $y \neq \theta$) достаточно положить

$$\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

и, выполнив преобразования

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2(y, y) =$$

$$= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)},$$

заметить, что

$$(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 = (y, y)(x + \alpha y, x + \alpha y) \geq 0.$$

Отсюда видно, что неравенство Коши – Буняковского обращается в равенство только в том случае, когда x и y пропорциональны.

Приведем примеры скалярных произведений в некоторых линейных пространствах.

1. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

2. Пространство l^2 последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} |\, x|^2 < +\infty$:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

3. Пространство $l^2(\mathbf{Z})$ бесконечных в обе стороны последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$, для которых $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\, x|^2 < +\infty$:

$$(x, y) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k \bar{y}_k.$$

4. Пространство $L^2[a, b]$ измеримых функций $f : [a, b] \to \mathbf{C}$, для которых $\int_a^b |\, f(t)|^2\, dt < +\infty$:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

5. Пространство $L^2(\mathbf{R})$ измеримых функций $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, для которых $\int_{\mathbf{R}} |\, f(t)|^2\, dt < +\infty$:

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Обозначения l^2, $l^2(\mathbf{Z})$, $L^2[a, b]$, $L^2(\mathbf{R})$ применяются и для соответствующих пространств вещественных последовательностей или функций (тогда в скалярных произведениях черта не ставится). Напомним, что в пространствах $L^2[a, b]$ и $L^2(\mathbf{R})$ функции, совпадающие почти всюду, отождествляются.

§ 2. Ортогональные системы и минимальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть X – линейное пространство (вещественное или комплексное) со скалярным произведением $(\cdot\,, \cdot)$ и нулевым элементом θ. Норма в X определяется равенством

$$||\, x|| = \sqrt{(x, x)},$$

а расстояние между $x, y \in X$ вычисляется по формуле

$$d(x, y) = ||\, x - y||.$$

Сходимость в X определяется как сходимость по норме:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} ||\,x_n - x_0|| = 0.$$

Относительно этой сходимости *скалярное произведение непрерывно*: если $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$, то $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Это свойство следует из неравенств

$$|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| \le |(x_n, y_n - y_0)| + |(x_n - x_0, y_0)| \le \\ \le ||\,x_n||\,||\,y_n - y_0\,|| + ||\,x_n - x_0\,||\,||\,y_n\,||$$

и ограниченности сходящейся последовательности $\{x_n\}$.

Элементы $x, y \in X$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ – конечная или счетная система элементов в X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *ортогональной* в X, если ее элементы попарно ортогональны, т.е.

$$(\varphi_k, \varphi_l) = 0 \quad \text{для} \quad k \ne l.$$

Система $\{\varphi_k\}$ называется *ортонормированной* в X, если она ортогональна и нормы всех элементов этой системы равны 1. Иначе говоря,

$$(\{\varphi_k\} - \text{ ортонормирована в } X) \Leftrightarrow (\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{k,l},$$

где $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \ne l. \end{cases}$$

Напомним, что система из n элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, линейного пространства X называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих элементов

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n$$

равна нулевому элементу θ только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации нули. Иначе говоря, система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независима, если верна импликация:

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = \theta) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0).$$

В бесконечномерном пространстве X счетная система $\{\varphi_k\}$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Предложение 1. *Если система $\{\varphi_k\}$ ортогональна в X и не содержит нулевого элемента, то система $\{\varphi_k\}$ линейно независима. В частности, любая ортонормированная система линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что некоторая линейная комбинация n первых элементов данной системы $\{\varphi_k\}$ равна нулевому элементу пространства X:

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = \theta. \tag{1}$$

Умножая обе части равенства (1) последовательно на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, получим

$$\alpha_j(\varphi_j, \varphi_j) = 0 \quad \text{для} \quad 1 \le j \le n.$$

Так как $(\varphi_j, \varphi_j) > 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Таким образом, система $\{\varphi_k\}$ линейно независима.

□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система в X, не содержащая нулевого элемента. Если некоторый элемент $x \in X$ представим в виде ряда*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

то коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле

$$c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n, k \in \mathbf{N}$. Из формулы

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j$$

при $n > k$ имеем

$$(s_n, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\varphi_j, \varphi_k) = c_k(\varphi_k, \varphi_k).$$

Полагая $n \to \infty$ и пользуясь непрерывностью скалярного произведения, получаем $(x, \varphi_k) = c_k(\varphi_k, \varphi_k)$.

□

Для произвольного элемента $x \in X$ коэффициенты c_k, определенные по формуле (2), называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$. Отметим, что

$$(\varphi_k, \varphi_k) = ||\varphi_k||^2 > 0 \quad \text{и} \quad (x, \varphi_k) = c_k||\varphi_k||^2. \tag{3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $x \in X$. Для любых n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо тождество*

$$||\, x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k||^2 = ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, a_k - c_k|^2 ||\varphi_k||^2, \tag{4}$$

где c_k – коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{\varphi_k\}$.

Доказательство. В случае вещественного пространства X для произвольных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, пользуясь (3), имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = ||\, x||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2||\varphi_k||^2 =$$

$$= ||\, x||^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - 2a_kc_k)||\varphi_k||^2 = ||\, x||^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2||\varphi_k||^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2||\varphi_k||^2.$$

Пусть теперь пространство X комплексное. Тогда для любых комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) =$$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(x, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, x) + \sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^2(\varphi_k, \varphi_k).$$

Преобразуем полученное выражение с помощью равенств (3) и формул

$$(\varphi_k, x) = \overline{(x, \varphi_k)} = \bar{c}_k||\varphi_k||^2,$$

$$|\, a_k - c_k|^2 = (a_k - c_k)(\bar{a}_k - \bar{c}_k) = |\, a_k|^2 - a_k\bar{c}_k - \bar{a}_kc_k + |\, c_k|^2.$$

В результате получим

$$||\, x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k||^2 = (x, x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_kc_k||\varphi_k||^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k\bar{c}_k||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^2||\varphi_k||^2 =$$

$$= ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2||\varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, a_k - c_k|^2||\varphi_k||^2.$$

□

Непосредственно из тождества (4) выводится следующее предложение.

Предложение 4. *Для любого $x \in X$ справедливы равенства*

$$\min_{a_1,\ldots,a_n} ||\, x - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k||^2 = ||\, x - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k||^2 = ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2||\varphi_k||^2, \qquad (5)$$

где минимум достигается только тогда, когда $a_k = c_k$ для $1 \le k \le n$.

Формула (5) выражает *минимальное свойство коэффициентов Фурье.*

Расстояние от элемента x до произвольного подпространства $\mathcal{L}$ пространства X определяется по формуле

$$\operatorname{dist}(x,\, \mathcal{L}) = \inf_{y\in\mathcal{L}} ||\, x - y||.$$

Линейная оболочка, натянутая на векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, состоит из всевозможных линейных комбинаций этих векторов и обозначается символом $\operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Согласно (5) для любого $x \in X$ имеем

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}_n) = ||x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k||, \tag{6}$$

где $\mathcal{L}_n = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Отметим, что векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют ортогональный базис пространства $\mathcal{L}_n$.

Замечание 1. В произвольном линейном пространстве X со скалярным произведением от любой линейно независимой системы $\{g_k\}$ можно перейти к ортонормированной системе $\{e_k\}$ с помощью *процесса ортогонализации Шмидта*. Положим

$$\varphi_1 = g_1, \quad e_1 = \varphi_1 / ||\,\varphi_1\,||.$$

Далее полагаем

$$\varphi_2 = g_2 - (g_2, e_1)e_1, \quad e_2 = \varphi_2 / ||\,\varphi_2\,||.$$

Вообще, если элементы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ уже найдены, то следующий элемент e_{k+1} определяется с помощью формул

$$\varphi_{k+1} = g_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (g_{k+1}, e_j)e_j, \quad e_{k+1} = \varphi_{k+1} / ||\,\varphi_{k+1}\,||.$$

Полученная в результате система $\{e_k\}$ удовлетворяет условиям:

1) система $\{e_k\}$ ортонормирована в X;

2) каждый элемент e_k является линейной комбинацией первых k элементов данной системы:

$$e_k = \alpha_{k1} g_1 + \cdots + \alpha_{kk} g_k, \quad \alpha_{kk} \neq 0;$$

3) каждый элемент g_k представим в виде линейной комбинации элементов $e_1, \ldots, e_k$:

$$g_k = \beta_{k1} e_1 + \cdots + \beta_{kk} e_k, \quad \beta_{kk} \neq 0.$$

Отметим, что при этом линейные оболочки систем $\{e_1, \ldots, e_k\}$ и $\{g_1, \ldots, g_k\}$ совпадают:

$$\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_k\}, \quad k \in \mathbf{N},$$

и условиями 1) – 3) каждый элемент системы $\{e_k\}$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице.

Упражнение. Проведите процесс ортогонализации системы 1, t, t^2, t^3 в пространстве $L^2[-1, 1]$.

§ 3. Критерии полноты ортогональных систем

Пусть $\{\varphi_k\}$ – система элементов в нормированном пространстве X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *полной* в X, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $y \in X$ такой, что:

1) элемент y является линейной комбинацией конечного множества элементов системы $\{\varphi_k\}$,

2) элемент y удален от x на расстояние, меньшее ε: $\|x - y\| < \varepsilon$.

Условия 1) и 2) означают, что замыкание линейной оболочки системы $\{\varphi_k\}$ совпадает с пространством X. Например, теорема Вейерштрасса об аппроксимациях непрерывных функций многочленами (несколько доказательств этой теоремы см. в [5]) утверждает, что система степеней $1, t, t^2, \dots$ является полной в пространстве $C[a, b]$.

Предположим теперь, что X – пространство со скалярным произведением, а система $\{\varphi_k\}$ ортогональна в X и не содержит нулевого элемента. Из минимального свойства коэффициентов Фурье следует, что система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда любой элемент $x \in X$ разлагается в *ряд Фурье* по этой системе:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где коэффициенты c_k определяются по формуле (2.2).

Пусть $x \in X$. Из предложения 4 для произвольного натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 \le ||\, x||^2.$$

Полагая $n \to \infty$, получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k|^2 ||\varphi_k||^2 \le ||\, x||^2. \tag{1}$$

Таким образом, для любого элемента $x \in X$ ряд в левой части неравенства (1) сходится и сумма этого ряда не превосходит $||\, x||^2$. Отсюда видно, что $|\, c_k|\, ||\varphi_k|| \to 0$ при $k \to \infty$ для любого $x \in X$.

Предложение 5. *Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in X$ имеет место равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k|^2 ||\, \varphi_k||^2 = ||\, x||^2. \tag{2}$$

Для доказательства предложения 5 достаточно воспользоваться тождеством

$$||\, x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k||^2 = ||\, x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, c_k|^2 ||\, \varphi_k||^2$$

и неравенством Бесселя (1).

Предложение 6. *Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X тогда и только тогда, когда любые элементы $x, y \in X$ удовлетворяют обобщенному уравнению замкнутости*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}||\,\varphi_k||^2, \tag{3}$$

где

$$c_k(x) = \frac{(x, \varphi_k)}{||\,\varphi_k||^2}, \quad c_k(y) = \frac{(y, \varphi_k)}{||\,\varphi_k||^2}.$$

Доказательство. Действительно, при $y = x$ из уравнения (3) получается равенство Парсеваля (2), а значит (по предложению 5) и полнота системы $\{\varphi_k\}$. Обратно, предположим, что ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в X. Для любого $n \in \mathbf{N}$ из формулы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k$$

имеем

$$(s_n, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)(\varphi_k, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\overline{(y, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\overline{c_k(y)}||\,\varphi_k||^2$$

и остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

$\square$

Приведем критерий полноты ортонормированной системы в произвольном гильбертовом пространстве. Напомним, что пространства l^2 и $L^2[a, b]$ гильбертовы.

Пусть H – гильбертово пространство, т.е. полное бесконечномерное сепарабельное пространство со скалярным произведением. Возьмем в H ортонормированную счетную систему $\{e_k\}$. Коэффициенты Фурье произвольного элемента $x \in H$ по системе $\{e_k\}$ совпадают со скалярными произведениями (x, e_k). Соответственно, n-я частичная сумма ряда Фурье записывается в виде

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k.$$

По предложению 5,

$$\lim_{n\to\infty} ||\,x - s_n|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = ||\,x||^2.$$

Предложение 7. *Ортонормированная система $\{e_k\}$ полна в H тогда и только тогда, когда в H не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{e_k\}$.*

Доказательство. 1. Предположим, что существует элемент $x \neq \theta$, такой, что

$$(x, e_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Тогда элемент x не разложим в ряд Фурье, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = \theta \neq x.$$

2. Пусть теперь система $\{e_k\}$ такова, что верна импликация:

$$(y \in H) \wedge ((y, e_k) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbf{N}) \Rightarrow (y = \theta). \tag{4}$$

Возьмем произвольно $x \in H$ и обозначим

$$a_k = (x, e_k), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Для любых $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, имеем

$$||\, s_m - s_n||^2 = (s_m - s_n, s_m - s_n) = \left(\sum_{j=n+1}^{m} a_j e_j, \sum_{k=n+1}^{m} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{m} |\, a_k|^2. \tag{5}$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 \leq ||\, x||^2. \tag{6}$$

Из (5) и (6) по критерию Коши сходимости ряда получаем

$$||\, s_m - s_n||^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

т.е. последовательность $\{s_n\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства H существует элемент $x' \in H$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} ||\, x' - s_n|| = 0,$$

т.е.

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k.$$

Докажем, что $x = x'$. В силу (4) для этого достаточно проверить, что

$$(x' - x, e_k) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Для любых $n, k \in \mathbf{N}$, $n > k$, имеем

$$(s_n, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k \right) = a_k (e_k, e_k) = a_k = (x, e_k)$$

и, значит,

$$(x' - x, e_k) = (x', e_k) - (x, e_k) = (x', e_k) - (s_n, e_k) = (x' - s_n, e_k).$$

Отсюда, полагая $n \to \infty$ и пользуясь свойством непрерывности скалярного произведения, получаем (7).

$\square$

Из предложения 7 следует, что ортогональная система $\{\varphi_k\}$ полна в H тогда и только тогда, когда в H не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_k\}$ (действительно, полнота системы $\{\varphi_k\}$ равносильна полноте ортонормированной системы $\{e_k\}$, где $e_k = \varphi_k/||\varphi_k||$).

Предложения 5 и 7 существенно дополняет следующая теорема.

Теорема Рисса – Фишера. *Пусть $\{e_k\}$ – произвольная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H и пусть числа $a_1, a_2, \ldots$ таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2$ сходится. Тогда существует элемент $x \in H$ такой, что последовательность $\{a_k\}$ является последовательностью коэффициентов Фурье этого элемента, т.е. $a_k = (x, e_k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$, и при этом выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 = ||\, x||^2.$$

Доказательство этой теоремы приводится в учебниках по функциональному анализу (см., например, [10]).

§ 4. Существование и единственность элемента наилучшего приближения в произвольном подпространстве гильбертова пространства

Подпространством гильбертова пространства H называется множество $\mathcal{L} \subset H$ такое, что выполнены два свойства:

1) для любых элементов x, y из $\mathcal{L}$ и любых чисел α, β линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит $\mathcal{L}$ (*свойство линейности*) ;

2) если $x_n \in \mathcal{L}$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $x_0 \in \mathcal{L}$ (*свойство замкнутости*).

Пусть $\mathcal{L}$ – произвольное подпространство гильбертова пространства H и пусть $x \in H \setminus \mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ конечномерно и известен какой-нибудь базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ этого подпространства , то методом ортогонализации Шмидта (см. замечание 1) можно построить в $\mathcal{L}$ ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и для вычисления расстояния от x до $\mathcal{L}$ применить формулу

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}) = ||\, x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k||, \qquad (1)$$

которая следует из минимального свойства коэффициентов Фурье. В общем случае (пространство $\mathcal{L}$ может быть бесконечномерным) элемент $\hat{y} \in \mathcal{L}$, для которого выполнено равенство

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L}) = ||\, x - \hat{y}||, \tag{2}$$

называется *элементом наилучшего приближения* элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Пользуясь тождеством параллелограмма

$$||\, x + y||^2 + ||\, x - y||^2 = 2(||\, x||^2 + ||\, y||^2), \tag{3}$$

докажем следующее предложение.

Предложение 8. *Для любого $x \in H \setminus \mathcal{L}$ элемент наилучшего приближения подпространством $\mathcal{L}$ существует и единствен.*

Доказательство. Обозначим $d = \operatorname{dist}(x, \mathcal{L})$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $y_n \in \mathcal{L}$ такой, что

$$d^2 \le ||\, x - y_n||^2 \le d^2 + \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Согласно (3) имеем

$$||\,(x - y_m) + (x - y_n)||^2 + ||\,(x - y_m) - (x - y_n)||^2 = 2(||\, x - y_m||^2 + ||\, x - y_n||^2)$$

или

$$||\, y_m - y_n||^2 = 2(||\, x - y_m||^2 + ||\, x - y_n||^2) - 4||\, x - (y_m + y_n)/2||^2. \tag{5}$$

Поскольку $(1/2)(y_m + y_n) \in \mathcal{L}$, то

$$||\, x - (y_m + y_n)/2||^2 \ge d^2.$$

Учитывая (4) и (5), имеем

$$||\, y_m - y_n||^2 \le 2\left(\left(d^2 + \frac{1}{n}\right) + \left(d^2 + \frac{1}{m}\right)\right) - 4\, d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Отсюда видно, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу полноты H и замкнутости подпространства $\mathcal{L}$ существует элемент $\hat{y}$ такой, что

$$\hat{y} \in \mathcal{L} \quad \text{и} \quad \hat{y} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Переходя к пределу в (4), получим

$$||\, x - \hat{y}|| = \lim_{n\to\infty} ||\, x - y_n|| = d.$$

Предположим, что существует еще один элемент $y_0 \in \mathcal{L}$ такой, что $||\, x - y_0|| = d$. Тогда по тождеству параллелограмма аналогично (5) имеем

$$4\, d^2 = 2(||\, x - \hat{y}||^2 + ||\, x - y_0||^2) = ||\hat{y} - y_0||^2 + 4||\, x - (\hat{y} + y_0)/2||^2 \ge ||\hat{y} - y_0||^2 + 4\, d^2$$

и, следовательно, $||\hat{y} - y_0|| = 0$, $\hat{y} = y_0$.

$\square$

§ 5. Наилучшее приближение как проекция

Пусть $\mathcal{L}$ – подпространство гильбертова пространства H и пусть $x \in H$. *Ортогональной проекцией* элемента x на подпространство $\mathcal{L}$ называется элемент $y^* \in \mathcal{L}$ такой, что

$$(x - y^*, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L} \tag{1}$$

(обозначение: $\text{pr}_{\mathcal{L}} x = y^*$). Легко видеть, что если $x \in \mathcal{L}$, то проекция y^* совпадает с элементом x. Для остальных элементов из H ортогональные проекции характеризуются следующим предложением.

Предложение 9. *Ортогональная проекция любого элемента $x \in H \setminus \mathcal{L}$ на подпространство $\mathcal{L}$ существует, единственна и совпадает с элементом наилучшего приближения $\hat{y}$ элемента x подпространством $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что условием (1) элемент y^* определяется однозначно. Предположим, что имеются два элемента $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ таких, что

$$(x - y_1, y) = (x - y_2, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}.$$

Тогда

$$(y_2 - y_1, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L}.$$

Полагая $y = y_2 - y_1$, получим $y_1 = y_2$.

Пусть теперь d – расстояниие от x до подпространства $\mathcal{L}$ и пусть $\hat{y}$ – элемент наилучшего приближения элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Тогда

$$d = ||\, x - \hat{y}|| = \text{dist}\,(x, \mathcal{L}) = \inf_{y \in \mathcal{L}} ||\, x - y||. \tag{2}$$

Предположим, что существует элемент $z \in \mathcal{L}$ такой, что

$$(x - \hat{y}, z) = b \neq 0.$$

Положим

$$w = \hat{y} + \frac{bz}{(z, z)}.$$

Поскольку $w \in \mathcal{L}$, в силу (2) имеем

$$d^2 \leq ||\, x - w||^2 = (x - w, x - w) = \left(x - \hat{y} - \frac{bz}{(z, z)}, x - \hat{y} - \frac{bz}{(z, z)} \right) =$$

$$= ||\, x - \hat{y}||^2 - \frac{b}{(z, z)}(z, x - \hat{y}) - \frac{\bar{b}}{(z, z)}(x - \hat{y}, z) + \frac{|b|^2}{(z, z)} = d^2 - \frac{|b|^2}{(z, z)} < d^2.$$

Получено противоречие, поэтому

$$(x - \hat{y}, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{L},$$

т.е. элемент $\hat{y}$ совпадает с ортогональной проекцией $\mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$.

$\square$

Оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in H$ его ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$, называется *оператором ортогонального проектирования* пространства H на подпространство $\mathcal{L}$. Элемент $\mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x = x - \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x$ называется *перпендикуляром*, опущенным из x на $\mathcal{L}$. Справедливы равенства:

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{L}}(x+y) = \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x + \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} y, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{L}}(\alpha x) = \alpha\, \mathrm{pr}_{\mathcal{L}} x,$$

$$\mathrm{ort}_{\mathcal{L}}(x+y) = \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x + \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} y, \quad \mathrm{ort}_{\mathcal{L}}(\alpha x) = \alpha\, \mathrm{ort}_{\mathcal{L}} x,$$

где α – любое число, x и y – произвольные элементы из H.

§ 6. Выражение величины наилучшего приближения через определитель Грама

Пусть $\mathcal{L}$ – конечномерное подпространство гильбертова пространства H, x – элемент из $H \setminus \mathcal{L}$ и пусть $\hat{y}$ – элемент наилучшего приближения элемента x подпространством $\mathcal{L}$. Выберем в $\mathcal{L}$ какой-нибудь базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Согласно предложению 9,

$$(x - \hat{y}, g_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \le k \le n. \tag{1}$$

Разложим вектор $\hat{y}$ по выбранному базису:

$$\hat{y} = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \cdots + \gamma_n g_n \tag{2}$$

и запишем условия (1) в виде системы уравнений относительно коэффициентов этого разложения:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_1(g_1,g_1) + \gamma_2(g_2,g_1) + \cdots + \gamma_n(g_n,g_1) = (x,g_1), \\ \gamma_1(g_1,g_2) + \gamma_2(g_2,g_2) + \cdots + \gamma_n(g_n,g_2) = (x,g_2), \\ \cdots \\ \gamma_1(g_1,g_n) + \gamma_2(g_2,g_n) + \cdots + \gamma_n(g_n,g_n) = (x,g_n). \end{array} \right. \tag{3}$$

Согласно предложению 8 для данного x элемент $\hat{y}$ существует и единствен. Значит, система (3) имеет единственное решение, а определитель этой системы

$$G(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \begin{vmatrix} (g_1,g_1) & (g_2,g_1) & \ldots & (g_n,g_1) \\ (g_1,g_2) & (g_2,g_2) & \ldots & (g_n,g_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_1,g_n) & (g_2,g_n) & \ldots & (g_n,g_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель называется *определителем Грама* системы векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Таким образом, чтобы найти вектор $\hat{y}$ достаточно решить систему уравнений (3) и найденные значения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ подставить в формулу (2). Считая эти значения известными, вычислим величину наилучшего приближения $d = ||\, x - \hat{y}||$ (см. (2.2)).

Из предложения 9 следует, что $(x - \hat{y}, \hat{y}) = 0$. Поэтому

$$d^2 = (x - \hat{y}, x - \hat{y}) = (x - \hat{y}, x) = (x, x) - ((\hat{y}, x),$$

$$(\hat{y}, x) = (x, x) - d^2.$$

Учитывая (2), имеем

$$\gamma_1(g_1, x) + \cdots + \gamma_n(g_n, x) = (x, x) - d^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) видно, что

$$\begin{vmatrix} (x,x) - d^2 & (g_1, x) & \ldots & (g_n, x) \\ (x, g_1) & (g_1, g_1) & \ldots & (g_n, g_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x, g_n) & (g_1, g_n) & \ldots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Действительно, согласно (3) и (4) первый столбец этого определителя является линейной комбинацией его остальных столбцов. Пользуясь свойствами определителей, из (5) получаем формулу

$$d^2 = \frac{G(x, g_1, \ldots, g_n)}{G(g_1, \ldots, g_n)}. \tag{6}$$

В частности, если базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ортонормированный, то $G(g_1, \ldots, g_n) = 1$, $\gamma_k = (x, g_k)$ для $1 \le k \le n$ и формула (6) приводится к равенству

$$d^2 = (x, x) - \sum_{k=1}^{n} |(x, g_k)|^2$$

(сравните с формулами (2.5) и (2.6)).

Замечание 2. Определитель Грама произвольной линейно независимой системы векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ положителен:

$$G(g_1, g_2, \ldots, g_n) > 0. \tag{7}$$

Действительно, неравенство (7) для $n = 2$ следует из неравенства Коши – Буняковского:

$$G(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) \end{vmatrix} = (g_1, g_1)(g_2, g_2) - |(g_1, g_2)|^2 > 0$$

(последнее неравенство строгое, так как векторы g_1 и g_2 непропорциональны). Далее, при $n = 3$ согласно предложению 9 и равенству (6) имеем

$$\frac{G(g_1, g_2, g_3)}{G(g_1, g_2)} = ||\, g_3 - \mathrm{pr}_{\mathcal{L}_2} g_3\, ||^2 > 0,$$

где $\mathcal{L}_2 = \operatorname{span}\{g_1, g_2\}$. Поэтому $G(g_1, g_2, g_3) > 0$. Аналогично,

$$\frac{G(g_1, g_2, g_3, g_4)}{G(g_1, g_2, g_3)} = ||\, g_4 - \operatorname{pr}_{\mathcal{L}_3} g_4 \,||^2 > 0,$$

где $\mathcal{L}_3 = \operatorname{span}\{g_1, g_2, g_3\}$. Значит, неравенство (7) верно для $n = 4$ и т.д.

Упражнение. Пусть на прямой $\mathbf{R}$ выбраны m точек $x_1, \ldots, x_m$, где $m \geq n$, и по крайней мере n из этих точек различны. На множестве X всевозможных функций вида

$$f : \{x_1, \ldots, x_m\} \to \mathbf{R}$$

определим скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) g(x_i).$$

При аппроксимации данной функции $f \in X$ *методом наименьших квадратов* коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ в сумме

$$\sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_i + \ldots a_{n-1} x_i^{n-1} - f(x_i))^2$$

выбирают так, чтобы эта сумма была наименьшей. Покажите, что решение этой экстремальной задачи сводится к решению системы вида (3) для базисных функций $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t, \ldots,$ $g_n(t) = t^{n-1}$ и напишите соответствующий определитель Грама.

§ 7. Прямые суммы и ортогональные дополнения

Пусть V и W – ненулевые подпространства линейного пространства X. Если каждый элемент $x \in X$ однозначно представим в виде

$$x = y + z, \;\; y \in V, \;\; z \in W, \tag{1}$$

то говорят, что X является *прямой суммой* подпространств V, W и пишут $X = V \dot{+} W$.

Например, разложение в прямую сумму пространства $X = C[-1, 1]$ получится, если в качестве V (соотв. W) выбрать множество всех четных (соотв. нечетных) функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$.

Предложение 10. *Если $V \cap W = \{\theta\}$, то для любого элемента $x \in X$ элементы y и z в разложении (1) определяются однозначно.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента $x \in X$ кроме (1) имеется еще одно разложение

$$x = y_1 + z_1,\ y_1 \in V,\ z_1 \in W.$$

Тогда

$$(y - y_1) + (z - z_1) = \theta \quad \text{или} \quad y - y_1 = z_1 - z.$$

Отсюда, замечая, что $y - y_1 \in V$, $z_1 - z \in W$ и пользуясь условием $V \cap W = \{\theta\}$, получаем $y = y_1$ и $z = z_1$.

□

Замечание 3. В курсе линейной алгебры для случая, когда пространство X конечномерно, доказывается, что разложение $X = V \dotplus W$ имеет место, если кроме условия $V \cap W = \{\theta\}$ выполнено равенство

$$\dim X = \dim V + \dim W.$$

Пусть $V, V_1, \ldots, V_n$ – ненулевые подпространства линейного пространства X. Если каждый элемент $x \in V$ однозначно представим в виде

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \quad x_1 \in V_1, \ldots, x_n \in V_n,$$

то говорят, что V является *прямой суммой* подпространств $V_1, \ldots, V_n$ и пишут

$$V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n. \tag{2}$$

В частности, здесь может быть $V = X$. Например, пространство $\mathbf{R}^n$ есть прямая сумма n одномерных подпространств, определенных любыми n линейно независимыми векторами. Кроме того, пространство $\mathbf{R}^n$ можно представить разными способами в форме прямой суммы и неодномерных подпространств.

Отметим, что в разложении (2) всякие два из подпространств $V_1, \ldots, V_n$ имеют общим один лишь элемент θ. Действительно, если $z \in V_k \cap V_j$, то из разложений

$$z = z + \theta, \quad z \in V_k, \quad \theta \in V_j,$$
$$z = \theta + z, \quad \theta \in V_k, \quad z \in V_j,$$

в силу единственности представления z в виде суммы

$$z = z_1 + \cdots + z_n, \quad z_1 \in V_1, \ldots, z_n \in V_n,$$

получаем $z = \theta$.

Пусть V_0 и V_1 – два различных подпространства гильбертова пространства H, причем $V_0 \subset V_1$. Тогда множество

$$W_0 = \{z \in V_1 |\, (y, z) = 0 \text{ для всех } y \in V_0\}$$

называется *ортогональным дополнением* подпространства V_0 в V_1.

Предложение 11. *Ортогональное дополнение W_0 подпространства V_0 в V_1 является подпространством гильбертова пространства H и имеет место равенство $V_1 = V_0 \dotplus W_0$.*

Доказательство. Если $z_1, z_2 \in W_0$, то

$$(y, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \bar{\alpha}_1 (y, z_1) + \bar{\alpha}_2 (y, z_2) = 0$$

для всех $y \in V_0$ и любых чисел α_1, α_2. Отсюда следует, что $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in W_0$. Кроме того, если $z_n \in W_0$ и $z_n \to z_0$, то для любого $y \in V_0$ по свойству непрерывности скалярного произведения

$$(y, z_n) \to (y, z_0),$$

где все $(y, z_n) = 0$. Значит, $z_0 \in W_0$. Таким образом, множество W_0 является подпространством в H.

Возьмем произвольно $x \in V_1$ и обозначим через y^* ортогональную проекцию элемента x на V_0. После этого положим $z^* = x - y^*$. Тогда, во-первых, $z^* \in V_1$ (так как x и y^* лежат в V_1) и, во-вторых, по предложению 9

$$(z^*, y) = (x - y^*, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in V_0,$$

т.е. $z^* \in W_0$. Таким образом, для произвольного $x \in V_1$ существует разложение

$$x = y + z, \ y \in V_0, \ z \in W_0. \tag{3}$$

Заметим теперь, что если $x \in V_0 \cap W_0$, то $(x, x) = 0, x = \theta$ и, значит, $V_0 \cap W_0 = \{\theta\}$. Отсюда по предложению 10 следует единственность разложения (3).

□

Отметим, что если $P_0 : V_1 \to V_0$ и $Q_0 : V_1 \to W_0$ – ортогональные проекторы, то в разложении (29) для любого $x \in V_1$ имеем $y = P_0 x$ и $z = Q_0 x$.

Два подпространства V и W гильбертова пространства H называются *ортогональными* (обозначение: $V \perp W$), если любой вектор из V ортогонален каждому вектору подпространства W.

Пусть

$$V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n,$$

где $V_1, \ldots, V_n$ – ненулевые попарно ортогональные (т.е. $V_i \perp V_j$ при $i \neq j$) подпространства гильбертова пространства H. Тогда V называют *ортогональной суммой* подпространств $V_1, \ldots, V_n$ и пишут

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Например, само пространство H является ортогональной суммой любого своего подпространства $\mathcal{L}$ и его ортогонального дополнения (в H).

В гильбертовом пространстве H определены также ортогональные суммы счетных наборов подпространств. Пусть, например, в H заданы ненулевые попарно ортогональные подпространства V_k, $k \in \mathbf{Z}$. Говорят, что V является *ортогональной суммой* подпространств V_k и пишут

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} V_k,$$

если каждый элемент $x \in V$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k, \quad x_k \in V_k,$$

где сходимость ряда понимается по норме пространства H. Из однозначности этого представления следует, что при каждом $k \in \mathbf{Z}$ элемент x_k совпадает с ортогональной проекцией элемента x на V_k.

§ 8. Тригонометрические ряды Фурье в $L^2[-\pi, \pi]$

Напомним, что скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad ||f|| = \sqrt{(f, f)}.$$

Хорошо известно, что тригонометрическая система

$$\{1, \sin kt, \cos kt \mid k \in \mathbf{N}\} \tag{1}$$

ортогональна и полна в $L^2[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$ по этой системе определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt, \ k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

По свойству полноты системы (1) для каждой функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \tag{3}$$

сходится к f в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, для любой $f \in L^2[-\pi, \pi]$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} ||\, f - S_n \,|| = 0,$$

где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда (3), т.е.

$$S_0(t) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \ n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Согласно предложению 5, учитывая, что

$$||\sin kt|| = ||\cos kt|| = \sqrt{\pi}, \quad k \in \mathbf{N},$$

имеем равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{|\,a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k|^2 + |\,b_k|^2. \tag{5}$$

Кроме того, в силу (2.5),

$$||\,f - S_n\,||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt - \pi\left(\frac{|\,a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\,a_k|^2 + |\,b_k|^2\right). \tag{6}$$

Из равенства (5) по необходимому условию сходимости числового ряда получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

т.е. *коэффициенты Фурье произвольной функции пространства* $L^2[-\pi,\pi]$ *стремятся к нулю*. Известно, что этим же свойством обладают коэффициенты Фурье любой функции f из класса $L^1[-\pi,\pi]$.

Сформулируем несколько важных результатов о поточечной сходимости (и расходимости) тригонометрических рядов Фурье.

(i) *Дю Буа-Реймонд* (1876): Существует непрерывная на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция f, для которой ряд Фурье расходится в точке $t = 0$.

(ii) *Колмогоров* (1923): Существует функция f, интегрируемая по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$, для которой ряд Фурье не сходится ни в одной точке.

(iii) *Кахане и Катцнельсон* (1965): Для любого множества $A \subset [-\pi,\pi]$, мера Лебега которого равна нулю, существует непрерывная на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция f, ряд Фурье которой расходится в каждой точке множества A.

(iv) *Карлесон* (1966): Если $f \in L^2[-\pi,\pi]$, то для почти всех $t \in [-\pi,\pi]$ ряд Фурье функции f сходится к $f(t)$.

Последовательность средних арифметических частичных сумм (34) определяется равенством

$$\sigma_n(t) = \frac{S_0(t) + \cdots + S_{n-1}(t)}{n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Фейером (1904) доказано, что для любой непрерывной 2π-периодической функции f эта последовательность сходится к f равномерно:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t) - \sigma_n(t)| = 0.$$

Функция f называется *кусочно непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если существует такой набор точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{j-1}, x_j), $1 \le j \le n$, и имеет конечные односторонние пределы на концах этих интервалов. Функцию f, имеющую на отрезке $[a, b]$ кусочно непрерывную производную, называют *кусочно непрерывно дифференцируемой на этом отрезке.* В учебниках по математическому анализу доказывается следующий признак сходимости ряда Фурье в точке.

Предложение 12. *Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и пусть $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье* (33) *сходится в точке t к значению*

$$S(t) = \begin{cases} (f(t-0) + f(t+0))/2, & \textit{если } t \in (-\pi, \pi), \\ (f(-\pi) + f(\pi))/2, & \textit{если } t = -\pi \quad t = \pi. \end{cases}$$

В частности, $S(t) = f(t)$, если f непрерывна в точке $t \in (-\pi, \pi)$.

В точках разрыва проявляется *явление Гиббса*: при достаточно большом n частичные суммы ряда Фурье (33) в некоторых точках, зависящих от n и расположенных вблизи выбранной точки разрава, отличаются от соответствующего одностороннего предела функции f приблизительно на 18 %.

Пример 1. Для функции

$$f(t) = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } t \in (0, \pi), \\ 0, & \text{если } t \in \{0, -\pi, \pi\}, \\ -\pi/2, & \text{если } t \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

коэффициенты Фурье (32) имеют следующие значения

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k}(1 - (-1)^k), \ k \in \mathbf{N}.$$

По предложению 12 для всех $t \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \tag{7}$$

В частности, при $t = \pi/4$ отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Частичные суммы $S_{2n}(t)$ и $S_{2n-1}(t)$ ряда (7) совпадают с нечетной функцией

$$g_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \qquad (8)$$

Производная этой функции вычисляется по формуле

$$g_n'(t) = \frac{\sin 2nt}{\sin t},$$

и, следовательно, в точке $\pi/2n$ функция $g_n(t)$ имеет локальный максимум. Из формулы (8) получим

$$g_n(\pi/2n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)(\pi/2n)}{(2k-1)(\pi/2n)} \cdot \frac{\pi}{n} \to \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1,8519,$$

в то время как $f(0+0) = \pi/2 \approx 1,5707$. Таким образом, при больших n значения $g_n(\pi/2n)$ отличаются от $f(\pi/2n)$ приблизительно на 18 %.

□

Отметим, что из равенства Парсеваля (5) и разложения (7) следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}. \qquad (9)$$

получается из (2) и (3) с помощью формул Эйлера

$$e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt, \quad \cos kt = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2, \quad \sin kt = i(e^{-ikt} + e^{ikt})/2.$$

Коэффициенты ряда (9) вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt \qquad (10)$$

и связаны с коэффициентами (2) равенствами

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2, \quad k \in \mathbf{N}. \qquad (11)$$

Соответственно, частичные суммы (4) примут вид

$$S_0(t) = c_0, \quad S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (12)$$

Система экспонент
$$\{\, e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z} \,\} \tag{13}$$
ортогональна и полна в $L^2[-\pi, \pi]$. При этом
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-ilt}\, dt = 2\pi\delta_{k,l}.$$

Отсюда видно, что коэффициенты (10) являются коэффициентами Фурье функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$ по системе (13). Равенство Парсеваля для системы (13) записывается так:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\, c_k|^2$$
и имеет место для любой функции $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

Пример 2. Для функции $f(t) = e^{-it/2}$ коэффициенты Фурье (10) вычисляются так:
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(k+1/2)t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos{(k+1/2)t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos{(k+1/2)t}\, dt = \frac{\sin{(k\pi + \pi/2)}}{k\pi + \pi/2} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}.$$
Покажем, что для всех $t \in (-\pi, \pi)$ справедливо равенство
$$e^{-it/2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{ikt}. \tag{14}$$

Пользуясь формулой Эйлера, запишем его в виде
$$\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,(\cos kt + i\sin kt).$$

Отделяя действительные и мнимые части, видим, что равенство (14) верно тогда и только тогда, когда
$$\cos\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,\cos kt = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\,\cos kt \tag{15}$$
и
$$\sin\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\,\sin kt = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}\,\sin kt. \tag{16}$$

По предложению 12 разложение (15) имеет место для $t \in [-\pi, \pi]$, а разложение (16) справедливо для $t \in (-\pi, \pi)$. Значит, равенство (14) верно для всех $t \in (-\pi, \pi)$.

$\square$

Отметим, что при любом $a > 0$ от систем (1) и (13) заменой переменной $t = \pi x/a$ можно перейти к системам

$$\{\,1,\ \sin(\pi k/a)x,\ \cos(\pi k/a)x \mid\ k \in \mathbf{N}\} \quad \text{и} \quad \{\,e^{i\frac{\pi k}{a}x} \mid k \in \mathbf{Z}\,\},$$

ортогональным и полным в пространстве $L^2[-a, a]$.

Подробнее о тригонометрических рядах Фурье можно прочитать в учебниках по математическому анализу [7] и [21].

§ 9. Многочлены Лежандра

Система *многочленов Лежандра* $\{P_k(x)\}$ определяется формулами

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_k(x) = \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad k \geq 2. \tag{1}$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$(x^2-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k!}{j!(k-j)!} x^{2k-2j}.$$

Дифференцируя это тождество k раз, получаем следующее разложение многочлена $P_k(x)$ по степеням x:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (2k-2j)!}{j!(k-j)!(k-2j)!} x^{k-2j}, \tag{2}$$

где $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$. Отсюда видно, что старший коэффициент многочлена $P_k(x)$ есть

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} = \frac{2k(2k-1)\dots(k+1)}{k!\,2^k}.$$

Далее, с помощью (2) легко устанавливаются рекуррентные соотношения

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \geq 1,$$

из которых следует, например, что

$$P_k(1) = 1,\ P_k(-1) = (-1)^k,\ P_{2k+1}(0) = 0,\ P_{2k}(0) = (-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{(k!)2^k}.$$

Дифференцированием тождества

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^k = 2kx(x^2-1)^k$$

проверяется, что многочлен $P_k(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)\cdot P_k''(x) + 2x\cdot P_k'(x) - k(k-1)P_k(x) = 0.$$

Докажем, что многочлены Лежандра обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)\,dx = \frac{2}{2k+1}\,\delta_{k,l}, \quad k,l\in \mathbf{Z}_+. \tag{3}$$

Воспользуемся тем, что для вспомогательной функции $\varphi_k(x) = (x^2-1)^k$ выполнены равенства:

$$\varphi_k^{(l)}(-1) = \varphi_k^{(l)}(1) = 0, \quad l = 0,1,\ldots,k-1, \tag{4}$$

и

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi_k(x)\,dx = (-1)^k\frac{(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{2^{2k+1}}{2k+1}. \tag{5}$$

Равенства (4) следуют из того, что точки $x=\pm 1$ являются нулями кратности k функции $\varphi_k(x)$, а формула (5) доказывается методом интегрирования по частям (вначале следует записать подинтегральную функцию в виде $(x+1)^k(x-1)^k$).

Для $l<k$, применяя (1), (4) и интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} x^l P_k(x)\,dx = -\frac{l}{k!\,2^k}\int\limits_{-1}^{1} x^{l-1}\varphi_k^{(k-1)}(x)\,dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^l l!}{k!\,2^k}\left(\varphi_k^{(k-l-1)}(1) - \varphi_k^{(k-l-1)}(-1)\right) = 0.$$

Отсюда следуют соотношения (3) для $k\neq l$, т.е. доказана ортогональность системы многочленов Лежандра $\{P_k(x)\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$. Для $k=l$ соотношения (3) следуют из (5) и того, что

$$\int\limits_{-1}^{1} [P_k(x)]^2\,dx = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k}\int\limits_{-1}^{1} x^k P_k(x)\,dx = \frac{(2k)!}{(k!)^3\,2^{2k}}\int\limits_{-1}^{1} x^k\varphi_k^{(k)}(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^k(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_k(x)\,dx.$$

Здесь последовательно применялись: ортогональность многочлена $P_k(x)$ одночленам меньшей степени $1, x, \ldots, x^{k-1}$, выражение для старшего коэффициента многочлена $P_k(x)$, формулы (1), метод интегрирования по частям и равенства (4).

Из соотношений (3) получаем следующее выражение для квадрата нормы многочлена $P_k(x)$ в пространстве $L^2[-1,1]$:

$$\|P_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} [P_k(x)]^2\,dx = \frac{2}{2k+1}. \tag{6}$$

Соответственно, *ортонормированная система многочленов Лежандра* определяется по формуле

$$\tilde{P}_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(x), \quad k \in \mathbf{Z}_+. \tag{7}$$

Система $\{\tilde{P}_k(x)\}$ получается из системы

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots \tag{8}$$

процессом ортогонализации Шмидта (см. замечание 1). Линейная оболочка системы (8) есть множество всех алгебраических многочленов. По теореме Вейерштрасса, для любой функции f, непрерывной на отрезке $[-1,1]$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен p, что

$$\max_{x\in[-1,1]} |\,f(x) - p\,(x)\,| < \varepsilon.$$

Тогда, очевидно,

$$\|\,f - p\,\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - p\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \sqrt{2}\,\varepsilon.$$

Известно также, что множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L^2[-1,1]$. Отсюда следует, что система многочленов Лежандра $\{P_k(x)\}$ полна в пространстве $L^2[-1,1]$.

Разложение произвольной функции $f \in L^2[-1,1]$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x),$$

где

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

Соответствующее равенство Парсеваля записывается так:

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} |\,c_k|^2\,\|P_k\|^2,$$

где значения $\|P_k\|^2$ вычисляются по формуле (6).

Замечание 4. Говорят, что система многочленов $\{Q_k(x)\}$ ортогональна на числовом промежутке I с весом $h(x)$, если

$$\int_I Q_k(x)Q_l(x)h(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad k,l \in \mathbf{Z}_+,\ k \neq l.$$

Из формулы (3) видно, что система многочленов Лежандра ортогональна на отрезке $[-1,1]$ с весом $h(x) \equiv 1$. Укажем числовые промежутки и весовые функции, для которых из системы степеней 1, x, x^2, x^3, $\ldots$, методом ортогонализации Шмидта получаются другие классические системы ортогональных многочленов:

1) $I = [-1,1]$, $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ (система $\{T_k(x)\}$ многочленов Чебышёва I рода);

2) $I = [-1,1]$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ (система $\{U_k(x)\}$ многочленов Чебышёва II рода);

3) $I = [-1,1]$, $h(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta > -1$ (система $\{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ многочленов Якоби);

4) $I = (-\infty,+\infty)$, $h(x) = e^{-x^2}$ (система $\{H_k(x)\}$ многочленов Эрмита);

5) $I = (0,+\infty)$, $h(x) = e^{-x}$ (система $\{L_k(x)\}$ многочленов Лагерра).

Ряды Фурье по классическим ортогональным многочленам естественно возникают во многих задачах физики и часто применяются в вычислительной математике (см., например, [18]).

§ 10. О базисах в банаховых и гильбертовых пространствах

Пусть X – банахово пространство и пусть $\varphi_k \in X$ для $k \in \mathbf{N}$. Система $\{\varphi_k\}$ называется *базисом* пространства X, если каждый элемент $x \in X$ представим единственным образом в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k,$$

сходящимся к x по норме пространства X. Система $\{\varphi_k\}$ называется *безусловным базисом* пространства X, если она остается базисом при любой перестановке ее элементов. Например, тригонометрическая система (§ 8) является базисом (но не безусловным при $p \neq 2$) в пространствах $L^p[-\pi,\pi\,]$,

$1 < p < \infty$. Система функций Хаара (с. 47) является безусловным базисом во всех пространствах $L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$. Система степеней $1, t, t^2, \ldots$ не является базисом в пространстве $C[-1,1]$ (функцию $|t|$ нельзя разложить в степенной ряд, равномерно сходящийся на отрезке $[-1,1]$). В пространствах $C[a,b]$ и $L_1[a,b]$ не существует безусловных базисов.

Пусть $U : X \to X$ – линейный ограниченный обратимый оператор. Если система $\{\varphi_k\}$ – базис, то и система $\{U\varphi_k\}$ – базис. Если система $\{\varphi_k\}$ – безусловный базис, то и система $\{U\varphi_k\}$ – безусловный базис.

Обозначим через X^* пространство, сопряженное к X. Если система $\{\varphi_k\}$ является базисом пространства X, то существуют линейные ограниченные функционалы $f_j \in X^*$, $j \in \mathbf{N}$, такие, что выполнено *условие биортогональности*: $f_j(\varphi_k) = \delta_{j,k}$. Для данного базиса $\{\varphi_k\}$ биортогональная система $\{f_j\}$ определяется единственным образом. При этом существует константа $M > 0$ такая, что

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\varphi_k \right\| \le M||\,x\,||$$

для всех $x \in X$. Базис $\{\varphi_k\}$ является безусловным тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) f(\varphi_k)$$

абсолютно сходится для любых $x \in X$ и $f \in X^*$. Если система $\{\varphi_k\}$ – безусловный базис в X, то биортогональная система $\{f_j\}$ при условии сепарабельности пространства X^* будет безусловным базисом в X^*.

Рассмотрим теперь случай, когда $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Из предложений 2, 5 и 6 следует эквивалентность следующих утверждений:

1) $\{\varphi_k\}$ – базис пространства H;

2) система $\{\varphi_k\}$ полна в H;

3) для любого элемента $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\,c_k(x)|^2||\,\varphi_k||^2 = ||\,x||^2;$$

4) любые элементы $x, y \in H$ удовлетворяют обобщенному уравнению замкнутости

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}||\,\varphi_k||^2.$$

Полная ортогональная (соотв. ортонормированная) система $\{\varphi_k\}$ гильбертова пространства H называется *ортогональным* (соотв. *ортонормированным*) *базисом* этого пространства. Например, системы $\{1, \sin kt, \cos kt \mid k \in$

$\mathbf{N}\}$ и $\{\, e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$ являются ортогональными базисами в $L^2[-\pi, \pi]$. Многочлены Лежандра образуют ортогональный базис пространства $L^2[-1, 1]$.

Неортогональный базис $\{g_k\}$ гильбертова пространства H может быть получен из ортогонального базиса $\{\varphi_k\}$ с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Выбрать числовую последовательность $\{\alpha_j\}$ такую, что $|\,\alpha_1\,| > 0$ и для всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |\,\alpha_j\,|^2 \leq M \cdot \alpha_{n+1}^2,$$

где константа M не зависит от n.

Шаг 2. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ положить

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_j.$$

Система $\{g_k\}$ элементов гильбертова пространства H называется *системой Рисса*, если существуют положительные числа m и M такие, что

$$m \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k \right\| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k|^2 \right)^{1/2}$$

для произвольной последовательности $\{a_k\}$ из l^2. Если система Рисса $\{g_k\}$ является базисом в H, то она называется *базисом Рисса*.

В гильбертовом пространстве H любой ортогональный базис является безусловным. Кроме того, всякая система Рисса, полная в H, является безусловным базисом. Известно также, что любой безусловный базис пространства H может быть представлен в виде $\{Ue_k\}$, где U – линейный ограниченный обратимый оператор, а $\{e_k\}$ – ортонормированный базис.

Подробнее о биортогональных системах, а также о базисах и системах Рисса, можно прочитать в монографии [8] (см. также [22], [23]).

Глава 2. Преобразование Фурье и основы вейвлет-анализа

§ 1. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье произвольной функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-it\xi}\,dt. \tag{1}$$

Согласно *теореме Римана – Лебега*, для любой функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ является ограниченной и непрерывной на $\mathbf{R}$ функцией, которая стремится к нулю при $|\xi| \to +\infty$.

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)e^{it\xi}\,d\xi. \tag{2}$$

Для справедливости формулы (2) при $t = t_0$ достаточно предполагать, что функция f в точке t_0 удовлетворяет *условию Дини*:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t_0+t)-f(t_0)}{t}\right| dt < +\infty \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

При этом интеграл в формуле (2) понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)e^{it\xi}\,d\xi := \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi)e^{it\xi}\,d\xi.$$

Если обе функции f и $\widehat{f}$ принадлежат $L^1(\mathbf{R})$, то формула (2) верна во всех точках непрерывности функции f.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathcal{F}\ :\ f \mapsto \widehat{f}$ – оператор Фурье,

$e_\omega\ :\ t \mapsto e^{i\omega t}$ – гармоники (ω – вещественный параметр, t – вещественная переменная),

$T_h f(t) := f(t-h)$ – оператор сдвига,

$D_a f(t) := f(t/a)$ – оператор растяжения ($a \neq 0$),

$(f * g)(t) := \int_{\mathbf{R}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ – свертка функций f и g.

Оператор Фурье линеен:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}f + \beta\mathcal{F}g \quad \text{для} \quad \alpha,\beta \in \mathbf{C},\ f,g \in L^1(\mathbf{R}).$$

При вычислении преобразования Фурье часто применяют следующие правила:

(П1) $[\mathcal{F}(T_h f)](\xi) = e^{-i\xi h}\widehat{f}(\xi)$,

(П2) $[\mathcal{F}(e_\omega f)](\xi) = \widehat{f}(\xi - \omega)$,

(П3) $[\mathcal{F}(D_a f)](\xi) = |a| D_{1/a}\widehat{f}(\xi)$,

(П4) $[\mathcal{F}(f * g)](\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$,

(П5) $(\mathcal{F} f^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n (\mathcal{F} f)(\xi)$,

(П6) $(\mathcal{F} f\,)^{(n)}(\xi) = \mathcal{F}[(-it)^n f(t)]$.

Подробное обоснование правил (П1) – (П6) изложено в учебниках [7] и [10]. Из правила (П3) (его называют *правилом изменения масштаба*) видно, что график функции $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ растягивается в горизонтальном направлении и становится более плоским, когда график функции f сжимается горизонтально.

Правило (П5) применимо, если функция f имеет на $\mathbf{R}$ непрерывную производную n-го порядка, принадлежащую классу $L^1(\mathbf{R})$. В этом случае по теореме Римана – Лебега $(\mathcal{F} f^{(n)})(\xi) \to 0$ при $|\,\xi| \to +\infty$ и из (П5) получаем

$$\lim_{|\,\xi| \to +\infty} |\,\xi|^n \widehat{f}(\xi) = 0,$$

т.е. при указанных условиях преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $1/|\,\xi|^n$. Для существования производной $(\mathcal{F} f\,)^{(n)}$ и справедливости правила (П6) достаточно предполагать, что функции $f(t), tf(t), \ldots, t^n f(t)$ принадлежат классу $L^1(\mathbf{R})$. Таким образом, чем больше производных в $L^1(\mathbf{R})$ имеет функция f, тем быстрее убывает на бесконечности преобразование Фурье $\widehat{f}$ и, обратно, чем быстрее убывает функция f, тем более гладкой является ее преобразование Фурье. Известно также, что если при некотором $a > 0$ функция $e^{a|t|} f(t)$ принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, то преобразование Фурье $\widehat{f}$ аналитически продолжается в полосу $\{\zeta \in \mathbf{C} \,:\, |\mathrm{Im}\,\zeta| < a\,\}$.

Если функция f из $L^1(\mathbf{R})$ имеет компактный носитель, т.е. существует число $b > 0$ такое, что $f(t) = 0$ для $|\,t| > b$, то преобразование Фурье $\widehat{f}$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость по формуле

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{-b}^{b} f(t) e^{-it\zeta}\, dt, \tag{3}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ – комплексная переменная. Из формулы (3) выводится, что функция $\widehat{f}(\zeta)$ является целой функцией. Сходимость интеграла в (3) для любого $\zeta \in \mathbf{C}$ следует из оценки

$$|\,e^{-it\zeta}\,| = |\,e^{-it(\xi + i\eta)}\,| \le e^{b|\eta|}, \quad -b \le t \le b.$$

Отсюда и из (3) получаем неравенство

$$|\widehat{f}(\zeta)| \leq e^{b|\eta|} \int\limits_{-b}^{b} |f(t)|\,dt = e^{b|\eta|}\,\|f\|_{L^1(\mathbf{R})},$$

т.е. длина носителя функции f ограничивает скорость роста целой функции $\widehat{f}$ в вертикальном направлении.

Рассмотрим теперь случай, когда компактный носитель имеет не сама функция f, а ее преобразование Фурье. Итак, пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$ и $\widehat{f}(\xi) = 0$ для всех $|\,\xi| > a$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{f}(\xi) e^{it\xi}\,d\xi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что функция f продолжается на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ как целая функция. По теореме Римана – Лебега функция $\widehat{f}$ непрерывна на $[-a, a]$ и тем более принадлежит классу $L^2[-a, a]$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(\widehat{f}) e^{i\pi\xi k/a}, \tag{5}$$

где

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{f}(\xi) e^{-i\pi\xi k/a}\,d\xi. \tag{6}$$

По теореме Карлесона равенство (5) имеет место для почти всех $\xi \in [-a, a]$. Сравнивая (4) и (6), замечаем, что

$$c_k(\widehat{f}) = (\pi/a) f(-\pi k/a). \tag{7}$$

Из равенств (4), (5) и (7) при условии

$$f(t) = O(1/|t|^{1+\varepsilon}) \quad (|t| \to +\infty) \tag{8}$$

следует *формула Котельникова – Шеннона*:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(kT) \frac{\sin(a(t-kT))}{a(t-kT)}, \tag{9}$$

где $T = \pi/a$. Действительно, имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \left(\sum_k c_k(\widehat{f}) e^{i\xi(t+kT)} \right) d\xi = \frac{1}{2a} \sum_k f(-kT) \int\limits_{-a}^{a} e^{i\xi(t+kT)}\,d\xi$$

или, меняя k на $-k$,

$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_k f(kT) \int_{-a}^{a} e^{i\xi(t-kT)}\, d\xi.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{-a}^{a} e^{i\xi\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{i\varphi}(e^{ia\varphi} - e^{-ia\varphi}) = \frac{2\sin(a\varphi)}{\varphi},$$

получаем (9). Отметим, что условие (8) нам потребовалось для того, чтобы обосновать перестановку знаков суммирования и интегрирования в проведенных преобразованиях.

Функция $\operatorname{sinc} x$ для $x \in \mathbf{R}$ определяется формулой

$$\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Разложение этой функции в ряд Маклорена имеет вид

$$\operatorname{sinc} x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots .$$

Функция $\operatorname{sinc} x$ является четной, ограниченной на $\mathbf{R}$ бесконечно дифференцируемой функцией и продолжается с вещественной прямой на всю комплексную плоскость как целая функция. С помощью этой функции формула Котельникова – Шеннона (9) записывается в виде

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(kT) \operatorname{sinc}(a(t - kT). \tag{10}$$

Поскольку $\operatorname{sinc}(k\pi) = \delta_{0,k}$ и $T = \pi/a$, формула (10) показывает, что значение функции f в произвольной точке $t \in \mathbf{R}$ полностью восстанавливается по "отчетным значениям"$f(kT)$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти "отчетные значения"функции f вычисляются в точках арифметической прогрессии с шагом T. Если число a велико, то шаг T близок к нулю, и наоборот, если a близко к нулю, то шаг T велик. При этом параметр a задает отрезок, содержащий носитель переобразования Фурье функции f: $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-a, a]$. В частности, при $a = \pi$ формула Котельникова – Шеннона принимает вид

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(\pi(t - k),$$

т.е. функция f полностью восстанавливается по своим значениям в целых точках.

Ряд в правой части формулы (10) называется *кардинальным рядом* функции f. Он сходится для любой функции f, непрерывной на $\mathbf{R}$ и удовлетворяющей условию (8). Однако, если носитель преобразования Фурье $\widehat{f}$ выходит за пределы отрезка $[-a, a]$, то имеет место так называемый *эффект наложения* (см., упражнение 6 и [1, § 2.4]).

Оператор Фурье $\mathcal{F}$ можно рассматривать на пространстве Шварца $S(\mathbf{R})$. Напомним, что пространство $S(\mathbf{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций $f(t)$, убывающих на бесконечности (т.е. при $|\,t| \to +\infty$) вместе со всеми своими производными быстрее любой отрицательной степени $|\,t|$. Иными словами, $f \in S(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \sup_{t\in\mathbf{R}} |\,t^\beta f^{(\alpha)}(t)| < +\infty \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+.$$

Последовательность $\{\,\varphi_k\}$ функций из $S(\mathbf{R})$ считается сходящейся к нулю, если для любых неотрицательных целых чисел α, β последовательность $\{\,t^\beta \varphi_k^{(\alpha)}(t)\}$ сходится к нулю равномерно на $\mathbf{R}$. Соотношение $\varphi_k \to \varphi$ в $S(\mathbf{R})$ означает, что последовательность $\{\,\varphi_k - \varphi\}$ сходится к нулю. Преобразование Фурье произвольной функции f из $S(\mathbf{R})$ определяется по формуле (1). Оператор Фурье $\mathcal{F}$ отображает пространство Шварца $S(\mathbf{R})$ на себя гомеоморфно (т.е. отображение $\mathcal{F}\ :\ S(\mathbf{R}) \to S(\mathbf{R})$ биективно и предельные соотношения $\varphi_k \to \varphi$ и $\widehat{\varphi}_k \to \widehat{\varphi}$ в $S(\mathbf{R})$ равносильны).

Напомним, что скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R})$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt, \quad ||f|| = \sqrt{(f, f)}.$$

Не всякая функция из $L^2(\mathbf{R})$ содержится в $L^1(\mathbf{R})$ (пример: $1/\sqrt{1+t^2}$).

Для любой функции $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ преобразование Фурье $\widehat{f}$, определенное по формуле (1), принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R})$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}\ :\ L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$$

является линейным ограниченным оператором, причем $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. Поскольку множество $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$, оператор $\mathcal{F}$ может быть единственным образом продолжен на все $L^2(\mathbf{R})$ с сохранением нормы. Так определенный оператор $\mathcal{F}$ отображает пространство $L^2(\mathbf{R})$ на себя линейно, непрерывно и взаимно однозначно. При этом для любых $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ справедливо *равенство Парсеваля – Планшереля*:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}, \widehat{g}). \tag{11}$$

В частности, при $f = g$ имеем

$$\|\widehat{f}\| = \sqrt{2\pi}\|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \tag{12}$$

В квантовой механике движение одномерной частицы описывается волновой функцией $f \in L^2(\mathbf{R})$. Неотрицательные функции

$$p(t) = |f(t)|^2/\|f\|^2, \quad q(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2/\|\widehat{f}\|^2 \tag{13}$$

являются плотностями распределения вероятностей случайных величин, описывающих положение и импульс частицы. Математические ожидания и дисперсии этих случайных величин определяются равенствами

$$m(f) = \int_{\mathbf{R}} tp(t)\,dt, \quad m(\widehat{f}) = \int_{\mathbf{R}} \xi q(\xi)\,d\xi,$$

$$D(f) = \int_{\mathbf{R}} (t - m(f))^2 p(t)\,dt, \quad D(\widehat{f}) = \int_{\mathbf{R}} (\xi - m(\widehat{f}))^2 q(\xi)\,d\xi.$$

Принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что нельзя одновременно измерить точно и координату квантовой частицы, и ее импульс. В математической форме этот принцип выражается неравенством

$$D(f)D(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}. \tag{14}$$

Неравенство (14) верно для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$. Равенство достигается только для функций вида

$$f(t) = c\,e^{iat}e^{-(t-b)^2/4\alpha}, \quad a, b \in \mathbf{R},\ c \neq 0,\ \alpha > 0.$$

Лемма.*Для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ справедливо неравенство*

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\|f\|\|\widehat{f}\|. \tag{15}$$

Доказательство. Из плотности множества $S(\mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{R})$ следует, что достаточно рассмотреть случай $f \in S(\mathbf{R})$. Тогда, применяя равенство Парсеваля и правило (П5), запишем (15) в виде

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} |f'(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\|f\|^2. \tag{16}$$

Положим

$$I := \int_{\mathbf{R}} (tf(t))\overline{(f'(t))}\,dt.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского, левая часть в (16) не меньше, чем $|\,I|$. Далее применим неравенство $|\,I| \geq |\operatorname{Re} I|$ и выразим $\operatorname{Re} I$ через $\|f\|$:

$$2\operatorname{Re} I = I + \bar{I} = \int_{\mathbf{R}} t(f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)})\,dt = -\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt = -\|f\|^2.$$

Таким образом, лемма доказана.

Из формул (13) видно, что неравенство (14) при условиях

$$f \in L^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad m(f) = m(\widehat{f}) = 0$$

равносильно (15). Предположим теперь, что для данной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ величины $m(f)$ и $m(\widehat{f})$ конечны и отличны от нуля. Введем вспомогательную функцию

$$h(t) = e^{-i\xi_0 t} f(t + t_0), \quad t_0 = m(f),\ \xi_0 = m(\widehat{f}).$$

Для этой функции по лемме имеем

$$\left(\int_{\mathbf{R}} t^2 |h(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{h}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \|h\| \|\widehat{h}\|. \tag{17}$$

Применяя (П1) и (П2), получаем

$$\widehat{h}(\xi) = e^{ix_0(\xi + \xi_0)} \widehat{f}(\xi + \xi_0).$$

Легко видеть, что $\|h\| = \|f\|$, $\|\widehat{h}\| = \|\widehat{f}\|$ и

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 |h(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbf{R}} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 \, dt, \quad \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{h}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbf{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Отсюда и из (17) следует неравенство (14) для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$.

Отметим, что левые части неравенств (14) и (15) могут быть равными $+\infty$.

Упражнения

1. Докажите, что если $f = \chi_{[-a,a]}$ (т.е. f – характеристическая функция отрезка $[-a, a]$), то $\widehat{f}(\xi) = 2\sin(a\xi)/\xi$.

2. Найдите преобразования Фурье функций $\varphi = \chi_{[0,1)}$ и $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$. Убедитесь, что для данной функции φ условие

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \equiv 1$$

следует из разложения

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\xi + 2\pi k}.$$

3. Пусть $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Докажите, что $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi/a}\, e^{-\xi^2/4a}$ и найдите преобразования Фурье гауссовых функций

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{18}$$

4. Докажите следующие свойства:

1) если $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, то $f * g \in L^1(\mathbf{R})$ и $f * g = g * f$;
2) если $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ и g непрерывна на $\mathbf{R}$, то $f * g$ непрерывна на $\mathbf{R}$;
3) если $f, g, h \in L^1(\mathbf{R})$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$;
4) если функция $f \in L^1(\mathbf{R})$ непрерывна в точке $t_0 \in \mathbf{R}$, то

$$\lim_{\alpha \to 0} (f * g_\alpha)(t_0) = f(t_0),$$

где g_α – гауссовы функции, определенные по формуле (18).

5. Докажите правила (П1) – (П4) для функций $f, g \in S(\mathbf{R})$.

6. Предположим, что функция f непрерывна на $\mathbf{R}$, удовлетворяет условию (8) и $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-b, b]$, где $a < b < 3a$. Проверьте, что тогда кардинальный ряд

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kT) \operatorname{sinc}(a(t - kT),$$

где $T = \pi/a$, сходится к значениям функции g, такой, что

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(\xi - 2a) + \widehat{f}(\xi + 2a) \quad \text{для} \quad \xi \in [-a, a]$$

и $\widehat{g}(\xi) = 0$ для $\xi \notin [-3a, 3a]$.

7. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$. Докажите, что

$$\lim_{m \to \infty} \| \widehat{f} - \widehat{f}_m \| = 0,$$

где $\widehat{f}_m$ – преобразования Фурье срез-функций

$$f_m(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \le m, \\ 0, & |t| > m. \end{cases}$$

8. Система нормализованных B-сплайнов $\{N_m\}$ определяется формулами

$$N_1 = \chi_{[0,1)}, \quad N_m = N_{m-1} * N_1 \quad \text{для} \quad m \ge 2.$$

Постройте графики B-сплайнов N_1, N_2, N_3 и докажите равенство

$$\widehat{N}_m(\xi) = e^{-im\xi/2} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^m.$$

9. Покажите, что для преобразования Фурье функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2) \end{cases}$$

выполнено равенство

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right).$$

§ 2. Преобразование Габора и непрерывное вейвлет-преобразование

Для произвольной функции $g \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющей условиям

$$\|g\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |\,g(t)|^2\,dt > 0, \quad \int_{\mathbf{R}} |\,tg(t)|^2\,dt < +\infty,$$

центр $m(g)$ и *радиус* $\Delta(g)$ определяются равенствами

$$m(g) = \|g\|^{-2} \int_{\mathbf{R}} t\,|\,g(t)|^2\,dt \quad ,$$

$$\Delta(g) = \sqrt{D(g)} = \|g\|^{-1} \left(\int_{\mathbf{R}} (t - m(g))^2\,|\,g(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Частотно-временным прямоугольником функции g называют множество

$$R[g] = [m(g) - \Delta(g), m(g) + \Delta(g)] \times [m(\widehat{g}) - \Delta(\widehat{g}), m(\widehat{g}) + \Delta(\widehat{g})].$$

Площадь этого прямоугольника равна произведению $4\Delta(g)\Delta(\widehat{g})$. По принципу неопределенности Гейзенберга справедливо неравенство

$$4\Delta(g)\Delta(\widehat{g}) \geq 2. \tag{1}$$

В случае, когда g совпадает с функцией Гаусса

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

получается прямоугольник

$$R[g_\alpha] = [-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}] \times [-(2\sqrt{\alpha})^{-1}, (2\sqrt{\alpha})^{-1}].$$

Неравенство (1) является точным, так как площадь прямоугольника $R[g_\alpha]$ равна 2.

Для фиксированных $\alpha > 0$, $b, \xi \in \mathbf{R}$, положим

$$G^\alpha_{b,\,\xi}(t) = e^{i\xi t} g_\alpha(t - b), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что график функции

$$g_\alpha(t - b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,e^{-(t-b)^2/4\alpha}$$

симметричен относительно прямой $t = b$, эта функция бесконечно дифференцируема и быстро убывает к нулю при $|t| \to \infty$; кроме того,

$$\int_{\mathbf{R}} g_\alpha(t - b)\,db = \int_{\mathbf{R}} g_\alpha(x)\,dx = 1.$$

Преобразование Габора произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{G_{b,\xi}^\alpha(t)}\,dt \tag{2}$$

или

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} (f(t)g_\alpha(t-b))e^{-i\xi t}\,dt. \tag{3}$$

Под знаком интеграла в формуле (3) функция $f(t)$ сначала умножается на сглаживающую и локализационную функцию $g_\alpha(t-b)$, а затем к полученному произведению применяется обычное преобразование Фурье. Полученную в результате функцию $(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi)$ можно рассматривать как некоторую локализацию преобразования Фурье $\widehat{f}(\xi)$ в окрестности точки b.

При любом $\alpha > 0$ частотно-временной прямоугольник

$$R[G_{b,\xi}^\alpha] = [b-\sqrt{\alpha}, b+\sqrt{\alpha}] \times [\xi - (2\sqrt{\alpha})^{-1}, \xi + (2\sqrt{\alpha})^{-1}]$$

имеет площадь, равную 2 (его центр расположен в точке (b,ξ), ширина равна $2\sqrt{\alpha}$, а высота равна $1/\sqrt{\alpha}$). При $\alpha = 1/2$ этот прямоугольник является квадратом.

Пользуясь равенством Парсеваля – Планшереля (1.11), из формулы (2) получаем

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = (f, G_{b,\xi}^\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}, \widehat{G}_{b,\xi}^\alpha), \tag{4}$$

где

$$\widehat{G}_{b,\xi}^\alpha(\eta) = e^{-ib(\eta-\xi)}e^{-\alpha(\eta-\xi)}.$$

Отсюда выводится формула, выражающая преобразования Габора через преобразование Фурье функции f:

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\xi) = \frac{e^{-ib\xi}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbf{R}} (e^{ib\eta}\widehat{f}(\eta))g_{1/4\alpha}(\eta-\xi)\,d\eta. \tag{5}$$

Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию допустимости

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi < +\infty, \tag{D1}$$

называется *вейвлетом* в $L^2(\mathbf{R})$. Если $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, то преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ непрерывно на $\mathbf{R}$ и из (D1) следует, что

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbf{R}} \psi(t)\,dt = 0. \tag{6}$$

Известно, что если к множеству всех функций $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющих условию (D1), добавить нулевой элемент пространства $L^2(\mathbf{R})$, то получится плотное в $L^2(\mathbf{R})$ линейное подпространство.

Примеры.

1) Вейвлет Хаара:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 1). \end{cases}$$

2) Вейвлет Марра или "мексиканская шляпа":

$$\psi(t) = (1 - t^2) e^{-t^2/2}.$$

3) Вейвлет "французская шляпа":

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |\,t| \le 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |\,t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

3) DOG-вейвлет:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}\, e^{-t^2/8}.$$

4) Вейвлеты Паула:

$$\psi_m(t) = \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}} (1 - it)^{-(m+1)}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

5) Вейвлеты Коши:

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - it)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

6) Вейвлеты Морле:

$$\psi_\gamma(t) = \pi^{-1/4} (e^{-i\gamma t} - e^{-\gamma^2/2}) e^{-t^2/2}, \quad \gamma \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что вейвлеты Коши при целых значениях параметра α только постоянным иножителем отличаются от соответствующих вейвлетов Паула.

Пусть $\mathbf{R}^*$ – множество ненулевых действительных чисел, т.е. $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Для каждой пары $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ и произвольного вейвлета ψ положим

$$\psi_{a,b}(t) := |\,a|^{-1/2} \psi((t - b)/a).$$

Легко видеть, что $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\|$.

Непрерывное (или *интегральное*) *вейвлет-преобразование* произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)}\, dt. \tag{7}$$

Таким образом, вейвлет-преобразование W_ψ переводит произвольную функцию f пространства $L^2(\mathbf{R})$ в функцию $W_\psi f$ двух переменных, заданную на множестве $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. По неравенству Коши – Буняковского функция $W_\psi f$ ограничена:

$$|(W_\psi f)(a,b)| \le \|f\| \, \|\psi\| \quad \text{для всех} \quad (a,b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}.$$

Согласно следующей теореме по вейвлет-преобразованию $W_\psi f$ можно восстановить не только норму, но и значения исходной функции f.

ТЕОРЕМА 1 (Grossman – Morlet, 1984) . *Пусть функция* $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет условию* (D1). *Тогда для произвольной функции* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *справедливы равенства*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}} |W_\psi f(a,b)|^2 \frac{da\, db}{a^2}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\| = 0,$$

где

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{|a|>\varepsilon} \left(\int_{\mathbf{R}} W_\psi f(a,b) \psi_{a,b}(t)\, db \right) \frac{da}{a^2}.$$

Более того, если функция ψ *непрерывна на* $\mathbf{R}$*, то*

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$$

в каждой точке t*, где* f *непрерывна.*

Иногда вместо условия (D1) принимают условие

$$0 < c_\psi^{st} := \int_0^\infty \xi^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_0^\infty \xi^{-1} |\widehat{\psi}(-\xi)|^2 \, d\xi < +\infty. \tag{D2}$$

Легко видеть, что из (D2) следует (D1) с константой $c_\psi = 2c_\psi^{st}$. Если вейвлет ψ вещественный, то $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}(-\xi)$ и из (D1) следует (D2) с константой $c_\psi^{st} = c_\psi/2$. Имеет место следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет условию* (D2). *Тогда для произвольной функции* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *справедливы равенства*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_\psi^{st}} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty |W_\psi f(a,b)|^2 \, db \right) \frac{da}{a^2}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon^+\| = 0,$$

где

$$f_\varepsilon^+(t) = \frac{1}{c_\psi^{st}} \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a,b) \psi_{a,b}(t)\, db \right) \frac{da}{a^2}.$$

Более того, если функция ψ непрерывна на $\mathbf{R}$, то

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon^+(t)$$

в каждой точке t, где f непрерывна.

Замечание 1. При условиях теоремы 2 функция f восстанавливается по множеству значений $\{W_\psi f(a, b) \mid a > 0,\, b \in \mathbf{R}\}$. Часто эта информация для восстановления функции f оказывается избыточной. Для некоторых вейвлетов ψ существуют $\alpha_0 > 1$, $\beta_0 > 0$ такие, что для $1 < \alpha \leq \alpha_0$, $0 < \beta \leq \beta_0$, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ разлагается в ряд

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi(\alpha^j t - \beta k)$$

с коэффициентами $c_{j,k} = W_\psi(\alpha^{-j}, \beta k \alpha^{-j})$. При этом имеют место неравенства

$$m \left(\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |c_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\| \leq M \left(\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |c_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \tag{8}$$

где положительные константы m и M не зависят от f (о связанном с этими неравенствами понятии *фрейма*, см., например, в [1, глава 4], [6, глава 3]). В случае, когда ψ – вейвлет Хаара, можно выбрать $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$; тогда неравенства (8) обращаются в равенства, причем обе константы m и M равны 1 (см. §3).

Из формулы (7) аналогично (4) имеем

$$(W_\psi f)(a, b) = (f, \psi_{a,b}) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,b}),$$

где

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\xi) = |\, a|^{1/2} \widehat{\psi}(a\xi) e^{-ib\xi}.$$

Отсюда следует формула, выражающая непрерывное вейвлет-преобразования через преобразование Фурье функции f:

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{|\, a|^{1/2}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} e^{ib\xi} \, d\xi. \tag{9}$$

Таким образом, при фиксированном $a \neq 0$ отображение

$$(W_\psi f)(a, \cdot) : b \mapsto (W_\psi f)(a, b)$$

может рассматриваться как обратное преобразование Фурье функции

$$F_a(\xi) := |\, a|^{1/2} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}.$$

В теории вейвлетов ось a масштабируется вертикально, а ось b горизонтально. Частотно-временной прямоугольник функции $\psi_{a,b}$ имеет вид

$$R[\psi_{a,b}] = [b + am(\psi) - a\Delta(\psi), b + am(\psi) + a\Delta(\psi)]\times \\ \times [m(\widehat{\psi})/a - \Delta(\widehat{\psi})/a, m(\widehat{\psi})/a + \Delta(\widehat{\psi})/a].$$

При $a > 0$ этот прямоугольник имеет ширину, равную $2a\Delta(\psi)$, и высоту, равную $\Delta(\widehat{\psi})/a$. Отметим, что ширина прямоугольника $R[\psi_{a,b}]$ сужается для высоких частот ($a > 0$ – мало) и расширяется для низких частот ($a > 0$ – велико). Центр прямоугольника $R[\psi_{a,b}]$ расположен в точке $(b+am(\psi), m(\widehat{\psi})/a)$, а его площадь равна $4\Delta(\psi)\Delta(\widehat{\psi})$.

Из формулы (9) по теореме Римана – Лебега следует, что функция $W_\psi f$ непрерывна на горизонтальных прямых $a = const$ и стремится на них к нулю при $|\,b| \to +\infty$.

Изучение асимптотического поведения $W_\psi f(a, b)$ при $a \to 0$ в данной точке b позволяет применять вейвлет-преобразование для анализа свойств функции f в окрестности точки $t = b$, а также в самой этой точке. Известно, например, что чем более гладкой в окрестности точки b является функция f, тем быстрее $W_\psi f(a, b)$ сходится к 0 при $a \to 0$. Теоремы 3 и 4 иллюстрируют это явление (доказательства этих теорем см., например, в [6], [26]).

Теорема 3. *Пусть функция* $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ *имеет* N *нулевых моментов*:

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t)\,dt = 0 \quad \textit{для} \quad 0 \le l \le N-1 \quad \textit{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \overline{\psi(t)}\,dt =: \mu_N \ne 0$$

и пусть

$$\int_{\mathbf{R}} |\,t|^N |\,\psi(t)|\,dt < +\infty,$$

а функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ *имеет производную* $f^{(N)}(t_0)$, *где* $t_0 > 0$. *Тогда*

$$\lim_{a\to 0} |a|^{-N-1/2} W_\psi f(a, t_0) = \mu_N \frac{f^{(N)}(t_0)}{N!}.$$

Рассмотрим случай, когда $N = 1$ и $a > 0$. Тогда из формул

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t)\,dt = 0, \quad \int_{\mathbf{R}} t\,\overline{\psi(t)}\,dt = \mu_1 \ne 0$$

и

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + r(t), \quad r(t) = o(t - t_0)\ (t \to t_0)$$

согласно (7) имеем

$$W_\psi f(a, t_0) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} [f'(t_0)(t - t_0) + r(t)]\, \overline{\psi\left(\frac{t - t_0}{a}\right)}\,dt = \\ = a^{3/2} \left(f'(t_0) \int_{\mathbf{R}} \tau \overline{\psi(\tau)}\,d\tau + o(a) \right).$$

Поэтому
$$\lim_{a\to 0} a^{-3/2} W_\psi f(a,t_0) = \mu_1 f'(t_0).$$
$\square$

Пусть $0 < \alpha \le 1$. Говорят, что функция f *удовлетворяет на прямой* $\mathbf{R}$ *условию Липшица (или Гёльдера) порядка* α и пишут $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$, если существует константа $C > 0$ такая, что
$$|\, f(t) - f(s)\,| \le C|\, t - s\,|^\alpha \quad \text{для всех} \quad t, s \in \mathbf{R}.$$
Через $H^{(\alpha)}(t_0)$ обозначают класс функций f таких, что
$$|\, f(t_0 + t) - f(t_0)\,| \le C|\, t\,|^\alpha \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbf{R},$$
где константа C не зависит от t.

Теорема 4. *Пусть функция* $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет условиям*
$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t)\,dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} (1 + |\,t\,|)|\,\psi(t)|\,dt < +\infty, \tag{10}$$
а функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ *ограничена на* $\mathbf{R}$, *и пусть* $0 < \alpha \le 1$. *Тогда*:

(a) *если* $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$, *то* $|W_\psi f(a,b)| \le C|\,a|^{\alpha+1/2}$;

(b) *если* $f \in H^{(\alpha)}(t_0)$, *то* $|W_\psi f(a, t_0 + b)| \le C|\,a|^{1/2}(|\,a|^\alpha + |\,b|^\alpha)$.

Докажем утверждение (a). Учитывая (7) и (10), для $a > 0$ имеем
$$W_\psi f(a,b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} (f(t) - f(b))\, \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, dt$$
и, следовательно,
$$|W_\psi f(a,b)| \le C a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} |\,t - b\,|^\alpha \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| dt =$$
$$= C a^{\alpha+1/2} \int_{\mathbf{R}} |\,y\,|^\alpha |\psi(y)|\,dy \le C a^{\alpha+1/2},$$
где выполнена подстановка $t = b + ay$ и использовано неравенство $|\,y\,|^\alpha \le 1 + |\,y\,|$.

$\square$

Теорема 4 допускает частичное обращение:

Теорема 5. *Пусть функция* $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ *имеет компактный носитель, а функция* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *ограничена и непрерывна на* $\mathbf{R}$, *и пусть* $0 < \alpha < 1$. *Тогда*:

(a) *если* $|W_\psi f(a,b)| \le C|\,a|^{\alpha+1/2}$, *то* $f \in H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$;

(b) *если для некоторого* γ
$$|W_\psi f(a,b)| \le C|\,a|^{\gamma+1/2} \quad \textit{равномерно по} \quad b$$

и

$$|W_\psi f(a, t_0 + b)| \le C|\,a|^{1/2}\left(|\,a|^\alpha + \frac{|\,b|^\alpha}{|\log|\,b||}\right),$$

то $f \in H^{(\alpha)}(t_0)$.

Для $0 < \alpha < 1$ теоремы 4 и 5 дают вейвлет-характеризацию классов $H^{(\alpha)}(\mathbf{R})$ и $H^{(\alpha)}(t_0)$ (подробности см. в [6, §2.9]).

Замечание 2. Непрерывное вейвлет-преобразование иногда называют "математическим микроскопом", так как с его помощью удается проводить детальный анализ локальных свойств функций. Ограничимся здесь одним примером. В XIX веке Риман предположил, что непрерывная 2-периодическая функция

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2}$$

нигде не дифференцируема. В 1916 г. Харди доказал, что функция $W(t)$ не дифференцируема в иррациональных и некоторых рациональных точках. В 1970 г. Гервер доказал, что $W(t)$ дифференцируема во всех точках, кроме точек, указанных Харди. А именно, производная $W'(t)$ существует только в точках вида $t = (2p+1)/(2q+1)$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. В 1990 г. Хольшнейдер и Чамичан с помощью непрерывного вейвлет-преобразования получили новое доказательство результатов Харди – Гервера и полностью охарактеризовали особенности функции $W(t)$ в рациональных точках, где она не дифференцируема. Эти и другие результаты о поточечной регулярности функции Римана подробно изложены в монографиях [26] и [27]. О применениях непрерывного вейвлет-преобразования к анализу случайных процессов и исследованию динамических систем (а также к некоторым задачам геофизики) можно прочитать в книге [11].

Упражнения

1. Докажите, что если $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t)\,dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} |\,t|\,|\psi(t)|\,dt < +\infty,$$

то ψ является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

2. Постройте графики вейвлета Марра и DOG-вейвлета.

3. Пусть $g \in L^2(\mathbf{R})$, $g^{(k)} \in L^2(\mathbf{R})$ и $\|g^{(k)}\| > 0$ для некоторого натурального k. Докажите, что тогда $\psi = g^{(k)}$ является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

4. Докажите, что вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$ является любая производная функции $e^{-t^2/2}$.

5. Докажите, что произвольная функция $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t)\,dt = 0$$

и обладающая компактным носителем, является вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

6. Докажите утверждение (b) теоремы 4.

§ 3. Кратномасштабный анализ Хаара на прямой

Вейвлетом Хаара называют функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ получается из вейвлета ψ с помощью сдвигов и растяжений по формуле

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Легко видеть, что

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_{jk}(t)\,dt = 0, \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

Для каждого $n \in \mathbf{Z}$ числовые промежутки

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называют *двоичными интервалами ранга* n. Справедливы свойства:

1. Двоичные интервалы одного ранга либо не пересекаются, либо совпадают.

2. Двоичные интервалы ранга $n+1$ получаются делением пополам двоичных интервалов ранга n (т. е. $I_k^{(n)} = I_{2k}^{(n+1)} \cup I_{2k+1}^{(n+1)}$ для всех $k \in \mathbf{Z}$).

3. Если два двоичных интервала разных рангов пересекаются, то один из них содержится в другом.

Для всех $j, k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\psi_{jk}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & t \in I_{2k}^{(j+1)}, \\ -2^{j/2}, & t \in I_{2k+1}^{(j+1)}, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus I_k^{(j)}. \end{cases}$$

Докажем свойство ортогональности системы Хаара в пространстве $L^2(\mathbf{R})$:

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = 0, \quad \text{если} \quad j \neq s \quad \text{или} \quad k \neq l. \tag{2}$$

Если $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} = \emptyset$, то из (1) следует, что $\psi_{jk}(t) = 0$ для $t \in I_l^{(s)}$ и $\psi_{sl}(t) = 0$ для $t \in I_k^{(j)}$. Поэтому

$$(\psi_{jk}, \psi_{sl}) = \int_{I_k^{(j)}} \psi_{jk}(t)\psi_{sl}(t)\,dt + \int_{I_l^{(s)}} \psi_{jk}(t)\psi_{sl}(t)\,dt = 0$$

(в частности, это будет при $j = s$, $k \neq l$).

Пусть $j < s$ и $I_k^{(j)} \cap I_l^{(s)} \neq \emptyset$. Тогда $I_l^{(s)} \subset I_k^{(j)}$ и, следовательно, на интервале $I_l^{(s)}$ функция ψ_{jk} постоянна (равна $2^{j/2}$ или $-2^{j/2}$). Значит, в этом случае

$$(\psi_{jk}, \psi_{sk}) = \pm\, 2^{j/2} \int_{I_l^{(s)}} \psi_{sl}(t)\,dt = 0.$$

Таким образом, соотношения (2) доказаны. Поскольку

$$\|\psi_{jk}\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |\,\psi_{jk}(t)|^2\,dt = 2^j \int_{I_k^{(j)}} dt = 1,$$

то *система Хаара* $\{\psi_{jk}\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbf{R})$.

Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по системе $\{\psi_{jk}\}$ имеют вид

$$d_{jk} = (f, \psi_{jk}) = 2^{j/2} \left(\int_{I_{2k}^{(j+1)}} f(t)\,dt - \int_{I_{2k+1}^{(j+1)}} f(t)\,dt \right). \tag{3}$$

Известно, что система Хаара $\{\psi_{jk}\}$ полна в $L^2(\mathbf{R})$. Поэтому для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет место разложение в ряд Фурье – Хаара:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk} \tag{4}$$

и верно равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \|d_{jk}\|^2,$$

где коэффициенты вычисляются по формуле (3).

Характеристическая функция множества $E \subset \mathbf{R}$ обозначается χ_E и определяется равенством

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & t \in E, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus E. \end{cases}$$

Для любых $j, k \in \mathbf{Z}$ положим

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

где $\varphi = \chi_{[0,1)}$ (эту функцию φ называют *масштабирующей функцией Хаара*). Легко видеть, что $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}$ для $t \in I_k^{(j)}$ и $\varphi_{jk}(t) = 0$ для $t \in \mathbf{R} \setminus I_k^{(j)}$. Из определений видно, что

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\chi_{I_k^{(j)}}(t) \quad \text{и} \quad \psi_{jk}(t) = 2^{j/2}(\chi_{I_{2k}^{(j+1)}}(t) - \chi_{I_{2k+1}^{(j+1)}}(t))$$

для всех $t \in \mathbf{R}$. Кроме того,

$$2^{j/2}\int_{\mathbf{R}} \varphi_{jk}(t)\,dt = 1, \quad j,k \in \mathbf{Z}.$$

При каждом фиксированном $j \in \mathbf{Z}$ система $\{\varphi_{jk} | \, k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по этой системе вычисляются по формуле

$$a_{jk} = (f, \varphi_{jk}) = 2^{j/2}\int_{I_k^{(j)}} f(t)\,dt, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

Семейства замкнутых подпространств $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$ определим равенствами

$$V_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbf{R})}\operatorname{span}\{\varphi_{jk} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad W_j := \operatorname{clos}_{L^2(\mathbf{R})}\operatorname{span}\{\psi_{jk} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Ортогональные проекторы $P_j : L^2(\mathbf{R}) \to V_j$ и $Q_j : L^2(\mathbf{R}) \to W_j$ действуют по формулам

$$P_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{jk}\varphi_{jk}, \quad Q_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk}, \quad j \in \mathbf{Z}, \tag{7}$$

где $\{a_{jk}\}$ и $\{d_{jk}\}$ – коэффициенты Фурье функции f по системам $\{\varphi_{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}\}$ соответственно (см. (3), (6)).

Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ из (4) и (7) имеем

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} Q_j f,$$

где слагаемые попарно ортогональны. Следовательно, имеет место разложение пространства $L^2(\mathbf{R})$ в ортогональную прямую сумму:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j. \tag{8}$$

Видно также, что

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f \text{ постоянна на интервалах } [k, k+1)\}$$

и
$$f \in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2^{-j}\cdot) \in V_0, \quad j \in \mathbf{Z}.$$
Значит, всякая функция из V_j постоянна на двоичных интервалах ранга j. Отсюда, учитывая полноту в $L^2(\mathbf{R})$ множества кусочно постоянных функций со скачками в двоично рациональных точках $k2^{-j}$, получаем соотношения
$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}). \tag{9}$$
Из этих соотношений следует, что для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$ верны равенства
$$\lim_{j\to+\infty} \|f - P_j f\| = 0, \quad \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\| = 0. \tag{10}$$
Таким образом, при увеличении j погрешность аппроксимации $f \approx P_j f$ убывает к нулю, а если $j \to -\infty$, то проекции $P_j f$ стремятся к нулевому элементу пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Для любого $j \in \mathbf{Z}$ имеем
$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \tag{11}$$
т.е. W_j является ортогональным дополнением V_j в V_{j+1}. Отсюда получаем равенства
$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f, \quad \|P_{j+1} f\|^2 = \|P_j f\|^2 + \|Q_j f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),\ j \in \mathbf{Z}. \tag{12}$$
Иногда говорят, что $Q_j f$ содержит "детали", необходимые для перехода от j-го уровня аппроксимации функции f к более точному $(j+1)$-му уровню. Соответственно, подпространства $\{V_j\}$ (и коэффициенты $\{a_{jk}\}$) называют *аппроксимирующими*, а подпространства $\{W_j\}$ (и коэффициенты $\{d_{jk}\}$) – *детализирующими*.

Из формул (3) и (6) следуют равенства
$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \tag{13}$$
и
$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$
Равенства (13) и (14) задают соответственно *прямое и обратное дискретные преобразования Хаара.*

При фиксированном j и любом $s \in \mathbf{N}$ из (12) получаем
$$P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f = \cdots = P_{j-s} f + Q_{j-s} f + \cdots + Q_{j-1} f. \tag{15}$$

Схематично:

$$\begin{tikzcd}
P_j f \arrow[r] \arrow[dr] & P_{j-1} f \arrow[r] \arrow[dr] & P_{j-2} f \arrow[r] \arrow[dr] & \ldots\, P_{j-s} f \\
& Q_{j-1} f & Q_{j-2} f & \ldots\, Q_{j-s} f
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Пример 1. Функция f, заданная равенством

$$f(t) = 9\chi_{[0,1/2)}(t) + 7\chi_{[1/2,1)}(t) + 3\chi_{[1,3/2)}(t) + 5\chi_{[3/2,2)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

выражается через масштабирующую функцию Хаара по формуле

$$f(t) = 9\,\varphi(2t) + 7\,\varphi(2t-1) + 3\,\varphi(2t-2) + 5\,\varphi(2t-3).$$

Поскольку $\varphi_{1k}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t-k)$, то

$$f = P_1 f = \sum_{k=0}^{3} a_{1k}\varphi_{1k},$$

где

$$a_{10} = 9/\sqrt{2}, \quad a_{11} = 7/\sqrt{2}, \quad a_{12} = 3/\sqrt{2}, \quad a_{13} = 5/\sqrt{2}.$$

Пользуясь формулами (13), находим

$$a_{00} = \frac{a_{10} + a_{11}}{\sqrt{2}} = 8, \quad d_{00} = \frac{a_{10} - a_{11}}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$a_{01} = \frac{a_{12} + a_{13}}{\sqrt{2}} = 4, \quad d_{01} = \frac{a_{12} - a_{13}}{\sqrt{2}} = -1.$$

Значит,

$$f = P_0 f + Q_0 f, \quad \text{где} \quad P_0 f = 8\varphi_{00} + 4\varphi_{01}, \quad Q_0 f = \psi_{00} - \psi_{01}.$$

Далее, повторно применяя (13), получаем

$$a_{-1,0} = \frac{a_{00} + a_{01}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}, \quad d_{-1,0} = \frac{a_{00} - a_{01}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$P_0 f = P_{-1} f + Q_{-1} f, \quad \text{где} \quad P_{-1} f = 6\sqrt{2}\varphi_{-1,0}, \quad Q_{-1} f = 2\sqrt{2}\psi_{-1,0}.$$

Таким образом, для данной функции f разложение (15) в случае $j = 1$, $s = 2$ принимает вид

$$f(t) = 6\sqrt{2}\varphi_{-1,0}(t) + 2\sqrt{2}\psi_{-1,0}(t) + (\psi_{00}(t) - \psi_{01}(t))$$

или

$$f(t) = 6\varphi(t/2) + 2\psi(t/2) + (\psi(t) - \psi(t-1)),$$

где φ и ψ – масштабирующая функция и вейвлет Хаара.

$\square$

Из (10) и (15) следует, что для всех $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$P_j f = \sum_{s=1}^{\infty} Q_{j-s} f, \quad j \in \mathbf{Z}. \tag{16}$$

Отсюда получаем равенство

$$V_0 = \bigoplus_{j=1}^{\infty} W_{-j}. \tag{17}$$

Значит, наряду с (8) имеет место разложение

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{j \geq 0} W_j \right). \tag{18}$$

Пример 2. Для функции $\varphi = \chi_{[0,1)}$ из пространства V_0 в силу (15) и (17) имеем

$$\varphi = P_0 \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{-j} \varphi = \sum_{j=1}^{n} Q_{-j} \varphi + P_{-n} \varphi, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Среди аппроксимирующих коэффициентов $\{a_{0k}\}$ функции $f = \varphi$ только один отличен от нуля:

$$a_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (13) для любого целого $j \leq 0$ находим

$$a_{j-1,k} = \begin{cases} a_{j,0}/\sqrt{2}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$

$$P_{-n} \varphi = a_{-n,0} \varphi_{-n,0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \varphi_{-n,0},$$

где
$$\varphi_{-n,0}(t) = 2^{-n/2}\varphi(2^{-n}t) = \begin{cases} 2^{-n/2}, & t \in [0, 2^n), \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2^n), \end{cases}$$
Таким образом, L^2-норма погрешности аппроксимации $\varphi \approx \sum_{j=1}^{n} Q_{-j}\varphi$ совпадает с величиной
$$\|P_{-n}\varphi\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
и убывает к нулю со скоростью геометрической прогрессии, в то время как носитель этой погрешности имеет длину 2^n и неограниченно увеличивается при $n \to \infty$.

□

При кодировании сигналов аппроксимируют ступенчатые функции вида
$$f(t) = x_1\varphi_{n0}(t) + x_2\varphi_{n1}(t) + \dots + x_{2^n}\varphi_{n,2^n-1}(t), \tag{19}$$
где $x_1, x_2, \dots, x_{2^n}$ – заданный набор чисел. Для каждой такой функции имеем
$$P_n f = f \quad \text{и} \quad a_{n,k-1} = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n. \tag{20}$$
Таким образом, натуральное число n выбирается в качестве начального уровня аппроксимации функции f. Переход к m-му уровню осуществляется дискретным преобразованием Хаара:
$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad j = n, n-1, \dots, m+1. \tag{21}$$
где $0 \le m \le n-1$ и исходные коэффициенты $a_{n,k-1}$ определяются по формуле (20). Вычислив коэффициенты по формулам (21), получим следующее разложение
$$f = P_m f + \sum_{j=m}^{n-1} Q_j f = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{mk}\varphi_{mk} + \sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}. \tag{22}$$
Обратный переход к уровню n осуществляется по формулам
$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad j = m+1, m+2, \dots, n. \tag{23}$$
Если число n невелико, то принимают $m = 0$ и кодируют функцию (19) с помощью коэффициентов $a_{0,0}$, $d_{j,k}$, где $0 \le j \le n-1$, $0 \le k \le 2^j - 1$. Формулы (23) позволяют в этом случае точно восстановить все исходные коэффициенты $a_{n,k-1}$ и тем самым функцию f.

В случае большого n выбирают $m > 1$ и коэффициенты разложения
$$P_m f = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{m,k}\varphi_{m,k} \tag{24}$$

нумеруют в порядке убывания их абсолютных величин:

$$|a_{m,\pi(0)}| \geq |a_{m,\pi(1)}| \geq \cdots \geq |a_{m,\pi(2^m-1)}|.$$

Здесь π – биективное отображение множества $\{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$ на себя (т.е. некоторая перестановка этого множества). После этого задают малое число $\varepsilon > 0$ и заменяют нулями те коэффициенты разложения (24), модули которых меньше ε. В результате получается аппроксимация:

$$P_m f \approx \sum_{k=0}^{s} a_{m,\pi(k)} \varphi_{m,\,k}, \tag{25}$$

где число s находится из условия

$$s = \min\{\, l \mid \; 0 \leq l \leq 2^m - 1 \;\text{ и }\; |a_{m,\pi(k)}| < \varepsilon \text{ для всех } k > l\}.$$

Таким образом, функция f, заданная формулой (19), кодируется с помощью наборов коэффициентов

$$\{\, a_{m,\pi(k)} \mid \; 0 \leq k \leq s \,\} \quad \text{и} \quad \{d_{j,k} \mid \; m-1 \leq j \leq n-1,\; 0 \leq k \leq 2^j - 1\,\}.$$

Приближенное восстановление функции f вновь осуществляется с помощью формул (23), но при этом на первом шаге часть коэффициентов $a_{m,\,k}$ заменяется нулями по указанному ε-критерию.

В заключение параграфа приведем псевдокодовые процедуры (см. [17, с.35]), реализующие прямое и обратное дискретные преобразования Хаара. Параметр m выбирается как в формулах (21).

procedure *Decomposition* **(c: array** $[1 \ldots 2^j]$ **of reals)**
    $g = 2^j$
    while $g \geq 2^{m+1}$ **do**
      $DecompositionStep(c[1 \ldots g])$
      $g = g/2$
    end while
end procedure;

procedure *DecompositionStep* **(c: array** $[1 \ldots 2^j]$ **of reals)**
    for $i = 1$ **to** $2^j/2$ **do**
      $c'[i] = (c[2i-1] + c[2i])/\sqrt{2}$
      $c'[2^j/2 + i] = (c[2i-1] - c[2i])/\sqrt{2}$
    end for
     $c = c'$
end procedure.

Отметим, что в процедуре *DecompositionStep* аппроксимирующие коэффициенты на каждом шаге помещаются на первые $g/2$ мест.

Исходные данные восстанавливаются с помощью следующих двух псевдокодовых процедур.

procedure *Reconstruction* **(c: array** $[1\ldots 2^j]$ **of reals)**
  $g = 2^{m+1}$
  while $g \le 2^j$ **do**
    $ReconstructionStep(c[1\ldots g])$
    $g = 2g$
  end while
end procedure;

procedure *ReconstructionStep* **(c: array** $[1\ldots 2^j]$ **of reals)**
  for $i = 1$ **to** $2^j/2$ **do**
    $c'[2i-1] = (c[i] + c[2^j/2+i])/\sqrt{2}$
    $c'[2i] = (c[i] - c[2^j/2+i])/\sqrt{2}$
  end for
  $c = c'$
end procedure.

Для дальнейшего изучения свойств системы Хаара рекомендуются книги [3], [4] и [8]. В монографиях [12], [17] и [19] дискретные преобразования Хаара (и их вейвлетные обобщения) эффективно применяются к задачам кодирования информации и анализу сигналов.

Упражнения

1. Докажите, что если два двоичных интервала разных рангов пересекаются, то один из них содержится в другом.

2. Докажите полноту системы Хаара в $L^2(\mathbf{R})$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что множество непрерывных финитных на $\mathbf{R}$ функций плотно в $L^2(\mathbf{R})$, а также тем, что характеристическая функция произвольного двоичного интервала $I_l^{(s)}$ аппроксимируется (как в примере 2) линейными комбинациями функций системы Хаара.

3. Докажите, что при любом $1 \le p < \infty$ система Хаара полна в пространствах $L^p[0,1]$ и $L^p(\mathbf{R})$.

4. Пусть система $\{\varphi_{jk}\}$ определена по формуле (5). Постройте графики нескольких функций этой системы. Докажите, что $(\varphi_{jk}, \varphi_{j\,l}) = 0$ для всех $k \ne l$.

5. Пусть

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid \text{для каждого } k \in \mathbf{Z} \text{ функция } f \text{ постоянна на } [k, k+1)\}$$

и

$$f \in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2^{-j}\cdot) \in V_0, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Докажите, что

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}).$$

6. Приведите графические иллюстрации к примерам 1 и 2.

7. Для функции

$$f(t) = 5\chi_{[0,1/2)}(t) + \chi_{[1/2,1)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите проекции $P_0 f$ и $Q_0 f$. Постройте графики этих проекций и убедитесь, что $f = P_0 f + Q_0 f$.

8. Для функции

$$f(t) = 5\chi_{[0,1/4)}(t) + 3\chi_{[1/4,3/4)}(t) + \chi_{[3/4,1)}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите вейвлет-разложения

$$f = P_1 f + Q_1 f$$

и

$$f = P_0 f + Q_0 f + Q_1 f.$$

Приведите графические иллюстрации этих разложений.

9. Для функции

$$f(t) = \varphi_{3,0}(t) - 3\varphi_{3,2}(t) + 2\varphi_{3,3}(t) + \varphi_{3,4}(t) + \varphi_{3,6}(t) + 2\varphi_{3,7}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

найдите вейвлет-разложение

$$f = P_0 f + \sum_{j=0}^{2} Q_j f.$$

10. Напишите программу для анализа и синтеза массива данных $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}$, основанную на формулах (21) и (23) при $m = 0$. Как модифицируется эта программа при переходе к случаю $m > 1$ и применении аппроксимаций вида (25)?

§ 4. Кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbf{R})$

Определение 1. *Кратномасштабным анализом* в $L^2(\mathbf{R})$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$, $j \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;

(iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(2\,\cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;

(iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot\,-\,k) \in V_0$ для $k \in \mathbf{Z}$;

(v) существует функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что система $\{\varphi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Согласно (i), семейство $\{V_j\}$ представляет собой последовательность вложенных подпространств. Равенство $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$ означает, что объединение подпространств V_j, $j \in \mathbf{Z}$, плотно в $L^2(\mathbf{R})$. Пусть W_j – ортогональное дополнение V_j в V_{j+1}, т.е.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}\,. \tag{1}$$

Из свойств (i) и (ii) следуют равенства

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j = V_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{j\geq 0} W_j\right). \tag{2}$$

Свойство (iii) позволяет по одному подпространству V_0 воспроизвести все семейство $\{V_j\}$. Действительно, по этому свойству

$$f(\cdot) \in V_0 \iff f(2^j\,\cdot) \in V_j \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbf{Z}\,.$$

Согласно (iii) и (iv) имеем

$$f(\cdot) \in V_j \iff f(\cdot\,-\,2^{-j}k) \in V_j \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbf{Z}\,,$$

т.е. V_j инвариантно относительно сдвигов на $2^{-j}k$.

Из свойств (iii) и (v) следует, что система функций

$$\varphi_{1k}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t-k), \quad k \in \mathbf{Z}\,,$$

является ортонормированным базисом подпространства V_1. Поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, функция φ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\varphi, \varphi_{1k})\,\varphi_{1k}. \tag{3}$$

Определение 2. *Масштабирующей функцией* в $L^2(\mathbf{R})$ называют функцию φ из $L^2(\mathbf{R})$ такую, что

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \varphi(2t-k), \tag{4}$$

где $\{c_k\}$ – некоторая последовательность из l^2.

Согласно (3), для функции φ из условия (v) определения 1 равенство (4) выполнено с коэффициентами $c_k = \sqrt{2}\,(\varphi, \varphi_{1k})$. Кроме того, из ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$ выводится равенство

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \bar{c}_{k-2l} = 2\,\delta_{0,l} \quad \text{(и, в частности,} \quad \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\,c_k|^2 = 2).$$

Функцию φ из условия (v) определения 1 называют *масштабирующей функцией кратномасштабного анализа* $\{V_j\}$.

Для произвольной последовательности $\{c_k\}$ из l^2 равенство (4) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно φ. Это уравнение называют *масштабирующим уравнением* для φ.

Определение 3. *Ортогональным вейлетом* в $L^2(\mathbf{R})$ называется функция ψ такая, что функции

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}\,, \tag{5}$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$.

Таким образом, если ψ – ортогональный вейвлет в $L^2(\mathbf{R})$, то система $\{\psi_{j,k}\}$ ортонормирована и всякая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{j,k})\,\psi_{j,k}.$$

Для каждой масштабирующей функции φ полагают

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}\,, \tag{6}$$

и

$$V_j = \overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi_{j,k} \,:\, k \in \mathbf{Z}\},\ j \in \mathbf{Z}\,. \tag{7}$$

Для широкого класса масштабирующих функций соответствующие им ортогональные вейвлеты определяются по формуле, приведенной в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая уравнению (4), и пусть семейство подпостранств $\{V_j\}$ определено по формуле (7). Предположим, что система $\{\varphi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$ и объединение подпространств V_j плотно в $L^2(\mathbf{R})$, т.е.*

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}). \tag{8}$$

Тогда семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(\mathbf{R})$, а функция ψ, заданная формулой

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k \bar{c}_{1-k}\varphi(2t - k), \tag{9}$$

является ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$.

Отметим, что ортогональный вейвлет по масштабирующей функции φ определяется неоднозначно (см. ниже замечание 2). Имеет место следующий критерий ортонормированности в $L^2(\mathbf{R})$ системы целочисленных сдвигов функции φ.

Предложение 1. *Пусть* $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$. *Система* $\{\varphi(\cdot - k) \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbf{R})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \text{для п.в.} \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Следующие два предложения содержат условия, достаточные для справедливости равенства (8).

Предложение 2. *Пусть масштабирующая функция* φ *удовлетворяет условию ортогональности* (10), *а преобразование Фурье* $\widehat{\varphi}$ *ограничено на* $\mathbf{R}$ *и непрерывно в окрестности нуля, причем* $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. *Тогда верно равенство* (8).

Предложение 3. *Пусть масштабирующая функция* φ *удовлетворяет условию ортогональности* (10) *и существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$|\,\varphi(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbf{R}$$

(*в частности,* φ *может иметь компактный носитель на* $\mathbf{R}$). *Тогда равенство* (8) *эквивалентно условию* $|\,\widehat{\varphi}(0)| = 1$.

В связи с предложением 3 принимают следующее условие нормировки:

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\,dt = \widehat{\varphi}(0) = 1. \tag{11}$$

При условиях теоремы 1 для каждого фиксированного j система $\{\psi_{jk} : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства W_j. Ортогональные проекторы $P_j : L^2(\mathbf{R}) \to V_j$ и $Q_j : L^2(\mathbf{R}) \to W_j$ для каждого $j \in \mathbf{Z}$ определяются формулами

$$P_j f = \sum_k a_{jk}\varphi_{jk}, \quad a_{jk} = (f, \varphi_{jk}),$$

и

$$Q_j f = \sum_k d_{jk}\psi_{jk}, \quad d_{jk} = (f, \psi_{jk}).$$

Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ согласно (1) имеем

$$P_{j+1}f = P_j f + Q_j f, \quad \|P_{j+1}f\|^2 = \|P_j f\|^2 + \|Q_j f\|^2, \quad j \in \mathbf{Z}\,. \tag{12}$$

Иногда говорят, что Q_jf содержит "детали", необходимые для перехода от j-го уровня аппроксимации функции f к более точному $(j+1)$-му уровню. Соответственно, подпространства $\{V_j\}$ (и коэффициенты $\{a_{jk}\}$) называют *аппроксимирующими*, а подпространства $\{W_j\}$ (и коэффициенты $\{d_{jk}\}$) – *детализирующими.*

При фиксированном j и любом $s \in \mathbf{N}$ из равенств (12) получаем

$$P_jf = P_{j-1}f + Q_{j-1}f = \cdots = P_{j-s}f + Q_{j-s}f + \cdots + Q_{j-1}f \tag{13}$$

(схематично эти преобразования можно представить как в случае Хаара; см. Рис. 1).

Из соотношений

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \bigcap V_j = \{0\}$$

следует, что для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеют место равенства

$$\lim_{j\to+\infty} \|f - P_jf\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{j\to-\infty} \|P_jf\| = 0.$$

Таким образом, при увеличении j погрешность аппроксимации $f \approx P_jf$ убывает к нулю, а если $j \to -\infty$, то проекции P_jf стремятся к нулевому элементу пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ и пусть $h_k = (\varphi, \varphi_{1k})$, $g_k = (\psi, \varphi_{1k})$, $k \in \mathbf{Z}$, где масштабирующая функция φ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а вейвлет ψ задан по формуле* (9). *Если известны коэффициенты a_{jk} разложения*

$$P_jf = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{jk}\varphi_{jk},$$

то коэффициенты разложений

$$P_{j-1}f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}, \quad Q_{j-1}f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j-1,k}\psi_{j-1,k},$$

вычисляются по формулам

$$a_{j-1,k} = \sum_l \bar{h}_{l-2k}a_{jl}, \quad d_{j-1,k} = \sum_l \bar{g}_{l-2k}a_{j\,l}. \tag{14}$$

Обратно, если известны коэффициенты $a_{j-1,k}$ и $d_{j-1,k}$, то коэффициенты a_{jl} восстанавливаются по формуле

$$a_{j\,l} = \sum_k (h_{l-2k}a_{j-1,k} + g_{l-2k}d_{j-1,k}). \tag{15}$$

Доказательство. Согласно (4) и (9), для коэффициентов в формулах (14) и (15) имеют место равенства $h_k = c_k/\sqrt{2}$, $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$. Учитывая (3), имеем разложения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi(2t - l) \tag{16}$$

и

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} g_l \varphi(2t - l). \tag{17}$$

Пользуясь (16), для любых $j, k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$2^{(j-1)/2} \varphi(2^{j-1} t - k) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi(2^j t - (2k + l))$$

и, следовательно,

$$\varphi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l \varphi_{j,2k+l},$$

т.е.

$$\varphi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j,l}. \tag{18}$$

Аналогично из (17) выводится равенство

$$\psi_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} g_{l-2k} \varphi_{j,l}. \tag{19}$$

Согласно (18) имеем

$$a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{l-2k} (f, \varphi_{j,l}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{l-2k} a_{j,l}.$$

Аналогично из (19) выводим

$$d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{l-2k} (f, \varphi_{j,l}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{l-2k} a_{j,l}.$$

Таким образом, формулы (14) доказаны.

Докажем (15). Согласно (18) и (19)

$$h_{l-2k} = (\varphi_{j-1,k}, \varphi_{j,k}), \quad g_{l-2k} = (\psi_{j-1,k}, \varphi_{j,k}). \tag{20}$$

Пользуясь тем, что разность $f - P_j f$ ортогональна подпространству V_j, и применяя (3), имеем

$$a_{j\,l} = (f, \varphi_{j,l}) = (P_j f, \varphi_{j,l}) = (P_{j-1} f, \varphi_{j,l}) + (Q_{j-1} f, \varphi_{j,l}).$$

Учитывая (20), отсюда по определению операторов P_{j-1} и Q_{j-1} получаем

$$a_{j\,l} = \sum_k a_{j-1,k} (\varphi_{j-1,k}, \varphi_{j,l}) + \sum_k d_{j-1,k} (\psi_{j-1,k}, \varphi_{j,l}) =$$

$$= \sum_k a_{j-1,k} h_{l-2k} + = \sum_k d_{j-1,k} g_{l-2k},$$

т.е. верна формула (15).

□

Пример 1. В случае Хаара $\varphi = \chi_{[0,1)}$ и

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1), \quad \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1).$$

Отсюда видно, что $g_0 = h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$, а все остальные коэффициенты h_k и g_k равны нулю. Из формул (14) и (15) получаем

$$a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

и

$$a_{j,2k} = \frac{a_{j-1,k} + d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}, \quad a_{j,2k+1} = \frac{a_{j-1,k} - d_{j-1,k}}{\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Равенства (21) и (22) задают соответственно *прямое и обратное дискретные преобразования Хаара* (см. § 3).

□

Пример 2. Одна из масштабирующих функций Добеши является решением функционального уравнения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{3} h_k \varphi(2t-k)$$

с коэффициентами

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \tag{23}$$

Эта функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1, непрерывна на $\mathbf{R}$ и имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi = [0,3]$. Ненулевые коэффициенты g_k связаны с коэффициентами (23) равенствами

$$g_{-2} = h_3, \quad g_{-1} = -h_2, \quad g_0 = h_1, \quad g_1 = -h_0,$$

а формулы (14) принимают вид

$$a_{j-1,k} = h_0 a_{j,2k} + h_1 a_{j,2k+1} + h_2 a_{j,2k+2} + h_3 a_{j,2k+3},$$

$$d_{j-1,k} = -h_0 a_{j,2k} + h_1 a_{j,2k+1} - h_2 a_{j,2k+2} + h_3 a_{j,2k+3}.$$

□

Замечание 1. Если число ненулевых коэффициентов в уравнении (4) конечно, то *прямые и обратные дискретные вейвлет-преобразования* могут быть заданы в матричной форме:

$$A_j\bar{a}_j = \bar{a}_{j-1}, \quad D_j\bar{a}_j = \bar{d}_{j-1}, \quad j = n, n-1, \ldots, n-s, \tag{24}$$

и

$$\bar{a}_j = A_j^*\bar{a}_{j-1} + D_j^*\bar{d}_{j-1}, \quad j = n-s, n-s+1, \ldots, n, \tag{25}$$

где n – начальный уровень аппроксимации, матрицы A_j и D_j находятся из формул (15), A_j^*, D_j^* – матрицы, комплексно-сопряженные к A_j и D_j.

Применим преобразование Фурье к обеим частям масштабирующего уравнения (4). В результате получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \tag{26}$$

где

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}, \quad h_k = \frac{c_k}{\sqrt{2}}\,. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (10), разлагая полученную сумму на две суммы с четными и нечетными индексами и пользуясь 2π-периодичностью функции $H(\xi)$, получаем, что

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = 1 \quad \text{для п.в.} \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{28}$$

При условии $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ (см. предложения 2 и 3) из (26) и (28) следует, что

$$H(0) = 1 \quad \text{и} \quad H(\pi) = 0. \tag{29}$$

Для произвольного $s \in \mathbf{N}$ из равенства (26) имеем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2^s)\prod_{j=1}^{s} H(\xi/2^j).$$

Отсюда видно, что если бесконечное произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j) \tag{30}$$

сходится и существует предел

$$\lim_{j\to+\infty} \widehat{\varphi}(\xi/2^j) = c \neq 0,$$

то

$$\widehat{\varphi}(\xi) = c\prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j).$$

В частности, если функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ непрерывна в окрестности нуля, то

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j). \tag{31}$$

При условии нормировки (11) равенство (31) принимает вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j). \tag{32}$$

Предложение 4. *Справедливы свойства*:

1. *Пусть функция* $H(\xi)$ *задана по формуле* (27). *Если* $H(0) = 1$ *и* $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |h_k|\,|k|^{\varepsilon} < \infty$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$, *то произведение* (30) *сходится равномерно на компактных множествах из* $\mathbf{R}$.

2. *Если* 2π*-периодическая функция* $H(\xi)$ *обладает свойством* (28), *а произведение* (30) *сходится к функции* $F(\xi)$ *для почти всех* $\xi \in \mathbf{R}$, *то* $F \in L^2(\mathbf{R})$ *и* $||F|| \le 1$.

3. *Пусть* 2π*-периодическая функция* $H(\xi)$ *непрерывно дифференцируема на* $\mathbf{R}$ *и обладает свойством* (28) *Предположим, что* $H(0) = 1$ *и* $H(\xi) \ne 0$ *для всех* $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$. *Тогда существует функция* $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ *такая, что справедливо равенство* (22) *и система* $\{\varphi(\cdot - k)\ :\ k \in \mathbf{Z}\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbf{R})$.

Применим теперь преобразование Фурье к обеим частям равенства (9). В результате получим формулу

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \tag{33}$$

где

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k e^{-ik\xi}, \quad g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}\,. \tag{34}$$

Из формул (27) и (34) видно, что

$$G(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H(\xi+\pi)}. \tag{35}$$

Учитывая (28), замечаем, что матрица

$$\begin{pmatrix} H(\xi) & H(\xi+\pi) \\ G(\xi) & G(\xi+\pi) \end{pmatrix} \tag{36}$$

является унитарной для п.в. $\xi \in \mathbf{R}$.

Будем говорить, что ψ *имеет* N *нулевых моментов*, если

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t)\,dt = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le l \le N-1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \psi(t)\,dt \ne 0. \tag{37}$$

При условии абсолютной интегрируемости функций $t^l\psi(t)$, $0 \le l \le N$, формулы (37) эквивалентны следующим

$$\widehat{\psi}(0) = \widehat{\psi}'(0) = \cdots = \widehat{\psi}^{(N-1)}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}^{(N)}(0) \ne 0. \tag{38}$$

Согласно (33) и (35) имеем

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\overline{H(\xi/2+\pi)}\widehat{\varphi}(\xi/2). \tag{39}$$

Поскольку $\widehat{\varphi}(0) \ne 0$, из (38) и (39) следует, что

$$H(\pi) = H'(\pi) = \cdots = H^{(N-1)}(\pi) = 0 \quad \text{и} \quad H^{(N)}(\pi) \ne 0, \tag{40}$$

т.е. число π является нулем кратности N функции $H(\xi)$.

Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема $N-1$ раз в окрестности точки t_0. Тогда по формуле Тейлора

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(t_0)}{(N-1)!}(t-t_0)^{N-1} + \beta(t)(t-t_0)^{N-1},$$

где $\beta(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Если ортогональный вейвлет ψ имеет N нулевых моментов, то

$$\int_{\mathbf{R}} (t-t_0)^l \psi_{j,k}(t)\,dt = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le l \le N-1$$

и, следовательно,

$$d_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbf{R}} \beta(t)(t-t_0)^{N-1}\psi_{j,k}(t)\,dt. \tag{41}$$

Известно, что если ортогональный вейвлет ψ принадлежит классу $C^{N-1}(\mathbf{R})$ и имеет компактный носитель, то ψ имеет N нулевых моментов. Отсюда и из формулы (41) видно, что $d_{j,k} \to 0$ при $j \to +\infty$, причем скорость убывания коэффициентов $d_{j,k}$ к нулю тем выше, чем больше производных в окрестности точки t_0 имеют f и ψ. Таким образом, детализирующие коэффициенты $d_{j,k}$ при больших j близки к нулю в окрестности точек, где функция f гладкая. Это свойство играет важную роль при локализации особенностей сигналов с помощью вейвлетов.

Замечание 2. Иногда вместо формулы (9) вейвлет ψ определяется по формуле

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k \varphi(2t-k),$$

где $g_k = (-1)^{k+1}\bar{h}_{-k-1}$ или $g_k = (-1)^k \bar{h}_{N-k}$. Соответственно, вместо функции (35) в формуле (33) берут одну из следующих функций

$$G(\xi) = e^{i\xi}\overline{H(\xi+\pi)} \quad \text{или} \quad G(\xi) = e^{-iN\xi}\overline{H(\xi+\pi)}. \tag{42}$$

Вообще, если φ – масштабирующая функция некоторого кратномасштабного анализа в $L^2(\mathbf{R})$, то ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R})$ является любая функция ψ, преобразование Фурье которой представимо по формуле

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\gamma(\xi/2)}\overline{H(\xi/2+\pi)}\widehat{\varphi}(\xi/2),$$

где функция $H(\xi)$ определена в (27), а функция $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такова, что $\gamma(\xi+2\pi) - \gamma(\xi) \in 2\pi\mathbf{Z}$ для всех $\xi \in \mathbf{R}$.

Детальное обоснование изложенной в настоящем параграфе конструкции вейвлетов в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ (включая доказательства теоремы 1 и предложений 1 - 4) содержится в монографиях [1], [6] и [14].

Упражнения

1. Докажите, что из свойств (i) и (ii) определения 1 следуют равенства (2).

2. Докажите, что если функция φ в свойстве (v) определения 1 имеет компактный носитель, то в разложении (3) только конечное число коэффициентов h_k отлично от нуля.

3. Для функции φ из примера 2 вычислите значения $\varphi(1)$ и $\varphi(2)$.

4. Докажите, что условие (28) необходимо для ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot - k) \;:\; k \in \mathbf{Z}\}$ в $L^2(\mathbf{R})$.

5. Покажите, что для функции $\varphi = (1/3)\chi_{[0,3)}$ условие (28) выполнено, произведение (30) сходится к $\widehat{\varphi}(\xi)$, но система $\{\varphi(\cdot - k) \;:\; k \in \mathbf{Z}\}$ не является ортонормированной в $L^2(\mathbf{R})$.

6. Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1, а функции $H(\xi)$ и $G(\xi)$ определены формулами (27) и (34). Докажите, что матрица (36) унитарна для п.в. $\xi \in \mathbf{R}$. Убедитесь в унитарности матрицы (36) при условиях примеров 1 и 2.

7. Пусть функция $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ и масштабирующему уравнению

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \varphi(2t-k),$$

а система $\{\varphi(\cdot - k) \;:\; k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$. Докажите, что тогда выполнены равенства

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k = 2, \quad \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k c_k = 0, \quad \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \bar{c}_{k-2l} = 2\,\delta_{0,l}.$$

8. Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R})$, имеющая компактный носитель, удовлетворяющая масштабирующему уравнению (4) и такая, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Предположим, что система $\{\varphi(\cdot - k) \;:\; k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована

в $L^2(\mathbf{R})$, а функция ψ получена из φ по формуле (9). Докажите, что если ψ имеет N нулевых моментов, то

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k k^l c_k = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le l \le N-1.$$

9. Укажите явный вид матриц A_3, D_3 и A_3^*, D_3^* в формулах (24) и (25) при условиях примеров 1 и 2.

§ 5. Вейвлет Котельникова – Шеннона

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(t) = \operatorname{sinc}\pi t = \begin{cases} \sin\pi t/\pi t, & t \ne 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Из формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi t}\,d\xi = \operatorname{sinc}\pi t$$

видно, что преобразованием Фурье функции (1) является функция $\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$. Поэтому условие

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 = 1 \quad \text{п.в.}$$

выполнено и система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$.

Пусть V_0 состоит из тех функций пространства $L^2(\mathbf{R})$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль вне отрезка $[-\pi,\pi]$. По теореме Котельникова – Шеннона каждая функция $f \in V_0$ представима в виде

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(k)\operatorname{sinc}\pi(t-k). \tag{2}$$

Учитывая (1), получаем, что система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом подпространства V_0. Для соответствующего семейства подпространств

$$V_j = \{\, f \in L^2(\mathbf{R}) \,:\, \operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]\,\}, \quad j \in \mathbf{Z}\,,$$

свойства

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

очевидны. Как в общем случае (см. (4.6)), положим

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}\,.$$

При каждом фиксированном j система $\{\varphi_{jk} : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства V_j. Аналогично (4.3) и (4.21) имеем

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \varphi_{1k}, \quad h_k = (\varphi, \varphi_{1k}), \tag{3}$$

и

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = H(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-k\xi}. \tag{4}$$

Для $\xi \in [-\pi, \pi]$ после подстановки $\widehat{\varphi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$ в (4) получаем

$$H(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0, & \xi \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{5}$$

Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ функция $H(\xi)$ продолжается периодически. Коэффициенты в (3) вычисляются по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\xi) e^{ik\xi}\, d\xi,$$

из которой с помощью (5) получаются равенства

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, \\ (-1)^{(k-1)/2}\sqrt{2}/k\pi, & k \text{ нечетное}, \end{cases}$$

причем $h_k = 0$ для остальных k.

Таким образом, функция (1) является масштабирующей функцией в $L^2(\mathbf{R})$. Согласно (4.34), преобразование Фурье соответствующего ортогонального вейвлета ψ может быть найдено по формуле

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\overline{H(\xi/2 + \pi)}\widehat{\varphi}(\xi/2) = \begin{cases} e^{-i\xi/2}, & \pi \le |\xi| \le 2\pi, \\ 0 & \text{для остальных } \xi. \end{cases}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, находим

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{it\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i(t-1/2)\xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{i(t-1/2)\xi}\, d\xi$$

или

$$\psi(t) = 2\,\mathrm{sinc}\, 2\pi(t - 1/2) - \mathrm{sinc}\, \pi(t - 1/2). \tag{6}$$

Функцию (6) называют *вейвлетом Котельникова – Шеннона*. Она связана с масштабирующей функцией (1) равенством $\psi(t) = 2\varphi(2t-1) - \varphi(t - 1/2)$.

Замечание 3. Полезно сравнить конструкцию Котельникова – Шеннона с конструкцией Хаара. В то время как вейвлет Хаара является ступенчатой разрывной функцией, вейвлет Котельникова – Шеннона (6) имеет производные всех порядков и продолжается с вещественной прямой $\mathbf{R}$ на комплексную плоскость как целая функция. Соответствующие масштабирующие функции определяются с помощью характеристических функций числовых промежутков: в первом случае $\varphi = \chi_{[0,1)}$ (во временной области), а во втором $\widehat{\varphi} = \chi_{[\pi,\pi]}$ (в частотной области). Поэтому конструкция Котельникова – Шеннона в некотором смысле противоположна конструкции Хаара.

Упражнение. Найдите вейвлет Котельникова – Шеннона ψ, если его преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{H(\xi/2+\pi)}\widehat{\varphi}(\xi/2),$$

где $\widehat{\varphi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$, а функция H задана по формуле (5). Постройте графики масштабирующей функции φ и вейвлета Котельникова – Шеннона ψ.

§ 6. Вейвлеты Мейера

Нам потребуется вспомогательная функция

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3(10-15x+6x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющая условию

$$\nu(1-x) = 1-\nu(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Отметим, что

$$\nu(x) = 30\int_0^x t^2(1-t)^2\,dt \quad \text{для} \quad x \in [0,1].$$

Выберем в качестве φ функцию из $L^2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\,\xi| \le 2\pi/3, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\,\xi| - 1\right)\right), & 2\pi/3 \le |\,\xi| \le 4\pi/3, \\ 0, & |\,\xi| \ge 4\pi/3. \end{cases} \tag{3}$$

Функция φ бесконечно дифференцируема на $\mathbf{R}$, так как ее преобразование Фурье имеет компактный носитель. Для нее имеет место интегральное представление

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{4\pi/3} \widehat{\varphi}(\xi)\cos\xi t\,d\xi. \tag{4}$$

Из формул (1) и (3) видно, что $\widehat{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$. Кроме того, для 2π-периодической непрерывной функции

$$\Phi(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2$$

имеем

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)|^2, & -4\pi/3 \le \xi \le -2\pi/3, \\ |\widehat{\varphi}(\xi)|^2, & |\xi| \le 2\pi/3, \\ |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + |\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)|^2, & 2\pi/3 \le \xi \le 4\pi/3. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая (1) и (3), замечаем, что $\Phi(\xi) = 1$ при $|\xi| \le 2\pi/3$. Пусть $2\pi/3 \le \xi \le 4\pi/3$. Тогда

$$\frac{3}{2\pi}|\xi - 2\pi| - 1 = 1 - \left(\frac{3}{2\pi}\xi - 1\right)$$

и, в силу (3) и (5),

$$\Phi(\xi) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}\xi - 1\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}\xi - 1\right)\right) = 1.$$

Аналогично, $\Phi(\xi) = 1$ при $-4\pi/3 \le \xi \le -2\pi/3$. Таким образом, для функции (3) выполнено условие ортонормированности:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1.$$

Пользуясь теоремой 1 и предложением 2, видим, что свойства

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

также выполнены.

Таким образом, функция (4) является масштабирующей функцией. Соответствующий вейвлет ψ будем искать с помощью формулы (4.34). Пользуясь (3), из равенства

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$$

находим

$$H(\xi) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(2\xi), & \xi \in [-2\pi/3, 2\pi/3], \\ 0, & \xi \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{cases}$$

Соответственно, коэффициенты разложений

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\,\varphi_{1k}, \quad \text{и} \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}$$

вычисляются по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\xi)e^{ik\xi}\,d\xi = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{2\pi/3} \widehat{\varphi}(2\xi)\cos k\xi\,d\xi.$$

За пределы отрезка $[-\pi, \pi]$ функция $H(\xi)$ продолжается периодически. Для этой функции при любом $\xi \in \mathbf{R}$ имеем

$$H(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(2\xi + 4\pi k).$$

Применяя (4.34), получаем

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\overline{H(\xi/2 + \pi)}\widehat{\varphi}(\xi/2) = e^{-i\xi/2}\widehat{\varphi}(\xi/2)\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi + 4\pi k).$$

Учитывая, что функция $\widehat{\varphi}(\xi/2)$ равна нулю вне промежутка $[-8\pi/3, 8\pi/3]$, находим следующее выражение для преобразования Фурье вейвлета ψ:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\widehat{\varphi}(\xi/2)(\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi) + \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)). \tag{6}$$

Из формул (3) и (6) выводится интегральное представление *вейвлета Мейера*:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{2\pi/3}^{8\pi/3} \widehat{\varphi}(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)\cos\xi(t - 1/2)\,d\xi. \tag{7}$$

Замечание 4. Преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера (3) представляет собой сглаженный вариант соответствующей функции из конструкции Котельникова – Шеннона. При этом иногда вместо функции (1) выбирают другую вспомогательную функцию ν, удовлетворяющую условию (2) и такую, что

$$\nu(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le 0 \quad \text{и} \quad \nu(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \ge 1.$$

Если потребовать, чтобы в точках $2\pi/3$ и $4\pi/3$ функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ имела n непрерывных производных, то можно показать, что в классе полиномиальных (на отрезке $[0,1]$) функций вспомогательная функция единственна и имеет вид

$$\nu(x) = x^{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x).$$

Для $n = 1$ и $n = 3$ получаются функции

$$\nu(x) = x^2(3 - 2x) \quad \text{и} \quad \nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3), \quad 0 \le x \le 1.$$

Вспомогательная функция (1) соответствует значению $n = 2$. Для каждой из этих вспомогательных функций получаются свои масштабирующие функции и вейвлеты. Все вейвлеты Мейера принадлежат классу $C^\infty(\mathbf{R})$ и убывают на бесконечности быстрее любой отрицательной степени (но не экспоненциально быстро). При построении графиков масштабирующих функций и вейвлетов Мейера в системе MATLAB следует обращать внимание на выбор не только функции ν, но и функции G (см. замечание 2).

Упражнение. Постройте график функции (1) и нарисуйте эскиз графика функции (3). Напишите программу для вычисления значений вейвлетов Мейера.

§ 7. Лемма Рисса

При построении вейвлетов Добеши (см. § 8) применяется следующая лемма, доказанная венгерским математиком Фридьешем Риссом в 1916 г.

Лемма. *Пусть*

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k \xi, \quad a_k \in \mathbf{R}, \quad a_n \neq 0, \tag{1}$$

– четный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$A(\xi) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Тогда существует тригонометрический полином

$$B(\xi) = \sum_{k=0}^{n} b_k e^{k\xi}, \quad b_k \in \mathbf{R}, \quad b_n \neq 0, \tag{3}$$

такой, что

$$|B(\xi)|^2 \equiv A(\xi). \tag{4}$$

Доказательство. Для любого $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ положим

$$p(z) = z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} \left(z + \frac{1}{z}\right)^k \tag{5}$$

и доопределим $p(z)$ в точке $z = 0$ по непрерывности: $p(0) = \lim\limits_{z \to 0} p(z)$. Из формулы Эйлера $\cos \xi = (e^{i\xi} + e^{-i\xi})/2$ следует, что

$$A(\xi) = e^{-in\xi} p(e^{i\xi}). \tag{6}$$

Многочлен $p(z)$ имеет на комплексной плоскости ровно $2n$ корней (с учетом кратностей). Не нарушая общности, предположим, что $a_0 \neq 0$. Тогда для многочлена $p(z)$ число 0 является корнем кратности n. Из формулы (5) видно, что если число $z_0 \neq 0$ является корнем $p(z)$, то число z_0^{-1} тоже является корнем $p(z)$. Многочлен $p(z)$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому если комплексное число z_0 является корнем $p(z)$, то число $\bar{z}_0$ тоже является корнем $p(z)$. Значит, если r_0 – отличный от нуля вещественный корень $p(z)$, то число r_0^{-1} тоже корень $p(z)$, а если z_0 – отличный от нуля комплексный корень $p(z)$, то числа $\bar{z}_0$, z_0^{-1}, $\bar{z}_0^{-1}$ тоже корни $p(z)$. При этом в случае $|\,z_0| = 1$ корни z_0 и z_0^{-1} будут кратными:

$$p(z_0) = p'(z_0) = p(z_0^{-1}) = p'(z_0^{-1}) = 0.$$

Все ненулевые корни многочлена $p(z)$ сгруппируем по трем множествам:

r_l, r_l^{-1} – пары вещественных корней,

$e^{i\theta_k}$, $e^{-i\theta_k}$ – пары кратных корней на единичной окружности,

z_j, $\bar{z}_j$, z_j^{-1}, $\bar{z}_j^{-1}$ – четверки комплексных корней (первые два корня z_j, $\bar{z}_j$ каждой четверки расположены либо внутри, либо вне единичной окружности).

В результате получаем разложение

$$p(z) = 2^{-n} a_n z^n \prod_j (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \times$$
$$\times \prod_k (z - e^{i\theta_k})^2 (z - e^{-i\theta_k})^2 \prod_l (z - r_l)(z - r_l^{-1}). \tag{7}$$

Для любого $z_0 \neq 0$ имеем

$$|\,(e^{i\xi} - z_0)(e^{i\xi} - \bar{z}_0^{-1})| = |\,z_0|^{-1}|\,(e^{i\xi} - z_0)(z_0 e^{i\xi} - 1)| =$$
$$= |\,z_0|^{-1}|\,(e^{i\xi} - z_0)(e^{-i\xi} - \bar{z}_0)| = |\,z_0|^{-1}|\,e^{i\xi} - z_0|^2. \tag{8}$$

Пользуясь условием (2) и равенствами (6) – (8), получаем

$$A(\xi) = |\,A(\xi)| = |\,p(e^{i\xi})| = 2^{-n}|\,a_n| \left| \prod_j |\,z_j|^{-1}(e^{i\xi} - z_j)(e^{i\xi} - \bar{z}_j) \right|^2 \times$$
$$\times \left| \prod_k (e^{i\xi} - e^{i\theta_k})(e^{i\xi} - e^{-i\theta_k}) \right|^2 \prod_l |\,r_l|^{-1}|\,e^{i\xi} - r_l|^2.$$

Остается заметить, что тригонометрический полином

$$B(\xi) = 2^{-n/2}|\,a_n|^{1/2} \prod_j |\,z_j|^{-1}(e^{i\xi} - z_j)(e^{i\xi} - \bar{z}_j) \times$$
$$\prod_k (e^{i\xi} - e^{i\theta_k})(e^{i\xi} - e^{-i\theta_k}) \prod_l |\,r_l|^{-1/2}(e^{i\xi} - r_l) \tag{9}$$

имеет вид (3) и удовлетворяет условию (4).

$\square$

Проведенное доказательство конструктивно: если вычислены корни многочлена $p(z)$, то тригонометрический полином $B(\xi)$ находится по формуле (9). Однако полином $B(\xi)$ по $A(\xi)$ определяется не однозначно. Действительно, как видно из (9), полином $B(\xi)$ изменится, если в какой-нибудь четверке комплексных корней z_j, $\bar{z}_j$, z_j^{-1}, $\bar{z}_j^{-1}$ поменять местами первые и вторые пары (т.е. заменить z_j на z_j^{-1}). При построении классических вейвлетов Добеши все z_j (и r_l) берутся внутри единичной окружности (см. [6, с.269]).

Если дополнительно известно, что $A(0) = 1$, то в силу (4) имеем $|B(0)| = 1$. Полином $\tilde{B}(\xi) = B(\xi)/B(0)$ удовлетворяет условиям $\tilde{B}(0) = 1$ и $|\tilde{B}(\xi)| \equiv$

$A(\xi)$. Значит, при условии $A(0) = 1$ полином $B(\xi)$ можно выбрать так, что $B(0) = 1$.

Отметим также, что лемму Рисса иногда формулируют следующим образом: *для любого четного неотрицательного тригонометрического полинома $A(\xi)$ степени n с вещественными коэффициентами существует алгебраический полином $Q(z)$ степени n с вещественными коэффициентами такой, что* $|Q(e^{i\xi})|^2 \equiv A(\xi)$. Переход к этой формулировке получается с помощью формулы $B(\xi) = Q(e^{i\xi})$, где $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ и коэффициенты b_k такие же, как в (3).

§ 8. Масштабирующие функции и вейвлеты Добеши

В 1988 г. Ингрид Добеши для каждого натурального N доказала существование вещественных коэффициентов $h_0, h_1, \ldots, h_{2N-1}$ таких, что решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2t - k) \tag{1}$$

обладает следующими свойствами:

1) функция φ принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, dt = 1 \tag{2}$$

и имеет компактный носитель: $\operatorname{supp} \varphi = [0, 2N - 1]$;

2) система $\{\varphi(\cdot - k) :\ k \in \mathbf{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R})$;

3) семейство замкнутых подпространств

$$V_j = \overline{\operatorname{span}}\, \{\varphi(2^j \cdot - k) :\ k \in \mathbf{Z}\},\ j \in \mathbf{Z}\,,$$

является кратномасштабным анализом в $L^2(\mathbf{R})$.

При $N = 1$ конструкция Добеши приводит к функции Хаара: $\varphi = \chi_{[0,1)}$, а при $N = 2$ решение уравнения (1) непрерывно на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|\,\varphi(t) - \varphi(x)| \leq C\,|\,t - x|^{\alpha}, \quad t, x \in \mathbf{R},$$

с показателем $\alpha \approx 0,550$. Известно также, что при $N \geq 3$ решения уравнения (1) непрерывно дифференцируемы на $\mathbf{R}$ и при достаточно больших N их гладкость растет приблизительно как $0,2N$ (подробности см. в [6]).

Для $N = 1$ и $N = 2$ коэффициенты уравнения (51) приведены в § 4 (см. примеры 1 и 2). В таблице 6.1 книги [6] даны значения коэффициентов этого уравнения для $3 \leq N \leq 10$.

Ортогональный вейвлет ψ, соответствующий решению φ уравнения (1), определяется по формуле

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \varphi(2t - k), \tag{3}$$

где $g_k = (-1)^k h_{1-k}$, если $0 \le 1 - k \le 2N - 1$, и $g_k = 0$ в остальных случаях. Справедливы свойства:

1) вейвлет ψ имеет N нулевых моментов:

$$\int_{\mathbf{R}} t^l \psi(t)\, dt = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le l \le N - 1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}} t^N \psi(t)\, dt \ne 0\,; \tag{4}$$

2) $\operatorname{supp} \psi = [-N + 1, N]$;

3) гладкость вейвлета ψ совпадает с гладкостью функции φ (например, если функция φ имеет на прямой $\mathbf{R}$ непрерывную производную порядка l, то из формулы (3) следует, что таким же свойством обладает и вейвлет ψ).

Интегрируя обе части уравнения (1) и пользуясь условием нормировки (2), получаем

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = \sqrt{2}.$$

Применяя преобразование Фурье, из (1) имеем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\xi}, \tag{5}$$

где $H(0) = 1$. Согласно (4.23), (4.35) и (4) тригонометрический полином $H(\xi)$ должен удовлетворять условиям

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \tag{6}$$

и

$$H(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N B(\xi), \tag{7}$$

где $B(\xi)$ – тригонометрический полином, $B(\pi) \ne 0$. Тогда

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi)H(-\xi) = \left(\frac{1 + \cos\xi}{2} \right)^N B(\xi)B(-\xi). \tag{8}$$

Произведение $B(\xi)B(-\xi)$ является четным тригонометрическим полиномом. Значит, существует алгебраический полином $P(y)$ такой, что

$$B(\xi)B(-\xi) = P(\sin^2(\xi/2)).$$

Полагая $y = \sin^2(\xi/2)$, из (6) и (8) получаем

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1. \tag{9}$$

Предложение 5. *Полином*

$$P_N(y) := \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} y^j$$

удовлетворяет уравнению (9) *и всякое полиномиальное решение этого уравнения имеет вид*

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(1/2 - y),$$

где $R(y)$ *– нечетный алгебраический полином, выбранный так, чтобы* $P(y) \geq 0$ *для* $0 \leq y \leq 1$.

Отметим, что $P_N(y)$ является частной суммой биномиального ряда

$$(1-y)^{-N} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{N-1+j}{j} y^j.$$

Масштабирующие функции Добеши получаются в случае, когда $R(y) \equiv 0$. Точнее говоря, коэффициенты $h_0, h_1, \ldots, h_{2N-1}$ в формуле (1) выбираются так, чтобы тригонометрический полином $H(\xi)$ удовлетворял условию

$$|H(\xi)|^2 = \left(\frac{1+\cos\xi}{2}\right)^N P_N(\sin^2(\xi/2)). \tag{10}$$

Алгоритм вычисления этих коэффициентов основан на приведенном в § 7 доказательстве леммы Рисса (при этом в качестве тригонометрического полинома $A(\xi)$ следует принять $P_N(\sin^2(\xi/2))$). Например, в случае $N = 2$ имеем

$$P_2(\sin^2(\xi/2)) = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} \sin^2(\xi/2) = 2 - \cos\xi.$$

Найдем вещественные числа b_0 и b_1 такие, что $b_0 + b_1 = 1$ и

$$(b_0 + b_1 e^{-i\xi})(b_0 + b_1 e^{i\xi}) = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \tag{11}$$

(существование таких b_0 и b_1 следует из леммы Рисса, примененной к полиному $A(\xi) = 2 - \cos\xi$). Из равенства (11) следует, что

$$b_0^2 + b_1^2 = 2, \quad b_0 b_1 = -\frac{1}{2}.$$

Условию $b_0 + b_1 = 1$ удовлетворяют значения

$$b_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad b_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая (7), имеем

$$\sum_{k=0}^{3} h_k e^{-ik\xi} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + 2e^{-i\xi} + e^{-2i\xi})(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})e^{-i\xi}).$$

Отсюда получаются значения h_0, h_1, h_2, h_3, указанные в примере 2.

В заключение изложим два метода вычисления значений масштабирующих функций Добеши. *Итерационный метод* решения масштабирующего уравнения (1) состоит в реализации следующих двух шагов.

Шаг 1. Определить последовательность функций

$$\eta_0 = \chi_{[-1/2,1/2)}, \quad \eta_m(\cdot) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k \eta_{m-1}(2\cdot - k), \quad m \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

Шаг 2. Для $t \in \mathbf{R}$ принять

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \eta_m(t).$$

Сходимость этого метода обосновывается следующим образом. Из формул (12) имеем

$$\widehat{\eta}_0(\xi) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}, \quad \widehat{\eta}_m(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\eta}_{m-1}(\xi/2) = \left(\prod_{j=1}^{m} H(\xi/2^j)\right)\widehat{\eta}_0(2^{-m}\xi).$$

Отсюда в силу предложения 4 следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{\eta}_m(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/2^j) = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем, что последовательность $\{\eta_m\}$ сходится к масштабирующей функции φ.

Каскадный метод решения масштабирующего уравнения (1) определяется следующим образом.

Шаг 1. Найти последовательность функций

$$\varphi_m(\cdot) = \sum_k a_k^m 2^{m/2} \chi_{[-1/2,1/2]}(2^m \cdot - k), \quad m \in \mathbf{N}, \tag{13}$$

где

$$a_k^0 = \delta_{0,k}, \quad a_k^j = \sum_l h_{k-2l} a_l^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{14}$$

и коэффициенты h_k, отсутствующие в уравнении (1), принимаются равными нулю.

Шаг 2. Для $t \in \mathbf{R}$ принять

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(t).$$

Заметим, что формулы (14) представляют собой специальный случай формул (4.15).

Иногда в каскадном методе последовательность $\{\varphi_m\}$ определяют иначе. А именно, для каждого $m \in \mathbf{N}$ в качестве φ_m выбирают кусочно-линейную функцию, которая является линейной на отрезках $[2^{-m}k, 2^{-m}(k+1)]$, $k \in \mathbf{Z}$, и такой, что $\varphi_m(2^{-m}k) = 2^{m/2}a_k^m$. При этом

$$\varphi_m(2^{-m}2k) = \sqrt{2}\sum_l h_{2(k-l)}\varphi_{m-1}(2^{-j+1}l), \tag{15}$$

$$\varphi_m(2^{-m}(2k+1)) = \sqrt{2}\sum_l h_{2(k-l)+1}\varphi_{m-1}(2^{-j+1}l). \tag{16}$$

Напомним, что $\operatorname{supp}\varphi = [0, 2N-1]$. Поэтому $\varphi(0) = \varphi(2N-1) = 0$. Значения $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(2N-2)$ находятся из уравнения (1) при условии

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(2N-2) = 1.$$

При $m = 1$ правые части формул (15) и (16) определяются с помощью равенств

$$\varphi_0(t+k) = (1-t)\varphi(k) + t\,\varphi(k+1) \quad \text{для} \quad t \in [0,1],\ k = 0, 1, \ldots, 2N-2.$$

После этого для данного $m \geq 2$ приближенные значения φ в двоично-рациональных точках $k/2^m$, лежащих на отрезке $[0, 2N-1]$, находятся по формулам (15) и (16). Выбирая m достаточно большим, этим способом получают график функции φ на отрезке $[0, 2N-1]$. Обоснование каскадного метода имеется в § 6.5 книги Добеши [6].

Упражнения

1. Каким будет носитель функции ψ, определенной по формуле (3), если в этой формуле положить: a) $g_k = (-1)^{k+1}h_{-k-1}$, b) $g_k = (-1)^k h_{N-k}$? Предполагается, что ненулевые коэффициенты h_k берутся из формулы (1).

2. Проверьте, что при $N = 1$ конструкция Добеши приводит к вейвлету Хаара.

3. Напишите программу для вычисления значений масштабирующих функций Добеши каскадным методом.

§ 9. Нормализованные B-сплайны и вейвлеты Батла-Лемарье

Система нормализованных B-сплайнов $\{N_m(t)\}$ определяется формулами

$$N_1(t) = \chi_{[0,1)}(t), \quad N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1), \quad m = 2, 3, \ldots . \tag{1}$$

Из формулы (1) при $m = 2$ получаем

$$N_2(t) = t\, N_1(t) + (2-t)\, N_1(t-1)$$

и, следовательно,

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2-t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus [0, 2) \end{cases}$$

Справедливы свойства:

1^0. N_m на каждом отрезке $[k, k+1]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, совпадает с алгебраическим полиномом степени $m-1$.

2^0. $N_m \in C^{m-2}(\mathbf{R})$ для $m \ge 2$.

3^0. $\operatorname{supp} N_m = [0, m]$ и $N_m > 0$ для всех $t \in (0, m)$.

4^0. $N_m(t)$ выражается через $N_m(2t-k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, по формуле

$$N_m(t) = 2^{-m+1} \sum_{k=0}^{m} C_k^m N_m(2t-k), \tag{2}$$

где

$$C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

– биномиальные коэффициенты.

5^0. $N_m = N_1 * N_{m-1}$, т.е.

$$N_m(t) = \int_0^1 N_{m-1}(t-\tau)\, d\tau$$

для $m \ge 2$.

6^0. Преобразования Фурье нормализованных B-сплайнов находятся по формуле

$$\widehat{N}_m(\xi) = e^{-im\xi/2} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^m .$$

Отметим, что свойства 5^0 и 6^0 приводились в упражнении 1.8. Из формулы (2) имеем, в частности,

$$N_1(t) = N_1(2t) + N_1(2t-1),$$
$$2N_2(t) = N_2(2t) + 2N_2(2t-1) + N_2(2t-2),$$
$$4N_3(t) = N_3(2t) + 3N_3(2t-1) + 3N_3(2t-2) + N_3(2t-3).$$

Сплайном степени r дефекта 1 с целочисленными узлами называется функция $f \in C^{r-1}(\mathbf{R})$, совпадающая на каждом отрезке $[k, k+1]$, $k \in \mathbf{N}$, с некоторым полиномом степени r (этот полином зависит от k). Множество таких сплайнов обозначается $S_r(\mathbf{Z})$; в частности, $S_0(\mathbf{Z})$ и $S_1(\mathbf{Z})$ состоят соответственно из кусочно-постоянных функций и ломаных с узловыми точками $k \in \mathbf{Z}$.

Нормализованный B-сплайн N_m принадлежит пространству $S_{m-1}(\mathbf{Z})$.

Пусть $m \geq 2$. Известно, что система $\{N_m(\cdot - k) |\ k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса пространства
$$V_0 = S_{m-1} \cap L^2(\mathbf{R}).$$
Кроме того, выполнены неравенства
$$0 < A_m \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\xi + 2\pi k)|^2 \leq 1, \quad \xi \in \mathbf{R}, \tag{3}$$
где константа A_m зависит только от m (см., например, [23, формула (4.2.21)]).

Функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой имеет вид
$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{N}_m(\xi) \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\xi + 2\pi k)|^2 \right)^{-1/2}, \tag{4}$$
называется *масштабирующей функцией Батла – Лемарье*. Отметим, что согласно (3) и (4) справедливо неравенство
$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq A_m^{-1/2} |\widehat{N}_m(\xi)|, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, масштабирующая функция Батла – Лемарье может быть задана равенством
$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{it\xi}\, d\xi, \quad t \in \mathbf{R},$$
где $\widehat{\varphi}(\xi)$ имеет вид (4). Эта функция обладает свойствами:

1^0. Функция φ принадлежит пространству $V_0 = S_{m-1} \cap L^2(\mathbf{R})$.

2^0. Система $\{\varphi(\cdot - k) |\ k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства V_0.

3^0. Носитель $\operatorname{supp} \varphi$ не компактен.

4^0. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) e^{\gamma |t|} = 0$ при некотором $\gamma > 0$.

Из свойства 4^0 следует существование константы $C > 0$ такой, что

$$|\varphi(t)| \leq Ce^{-\gamma|t|} \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbf{R},$$

т.е. φ убывает экспоненциально.

Разложим функцию φ по базису Рисса $\{N_m(\cdot - k)|\ k \in \mathbf{Z}\}$ пространства V_0:

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k N_m(t-k), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Применяя преобразование Фурье, получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi} \widehat{N}_m(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Из формулы (4) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{\widehat{N}_m(\xi)}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}}\,, \tag{7}$$

где

$$e_n(\xi) := \left(2\sin\frac{\xi}{2}\right)^{n+2} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\xi + 2\pi k)^{n+2}}.$$

Из (6) и (7) видно, что числа α_k являются коэффициентами Фурье функции $1/\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}$, то есть

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\xi}}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}}\, d\xi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Известно, что если $x = \cos(\xi/2)$, то

$$e_n(\xi) = u_n(x), \tag{9}$$

где система $\{u_n(x)\}$ определяется формулами

$$u_0(x) = 1, \quad u_n(x) = xu_{n-1}(x) + \frac{1-x^2}{n+1}u'_{n-1}(x), \quad n \in \mathbf{N}.$$

В частности,

$$u_1(x) = x, \qquad u_2(x) = \frac{1}{3}(1+2x^2),$$
$$u_3(x) = \frac{1}{3}(2x+x^3), \qquad u_4(x) = \frac{1}{15}(2+11x^2+2x^4).$$

С помощью формул (5), (8) и (9) можно вычислять значения функции φ.

По масштабирующей функции φ стандартным образом определяется ортогональный вейвлет ψ. А именно, пусть

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \tag{10}$$

где

$$G(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H(\xi+\pi)}, \quad H(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)/\widehat{\varphi}(\xi). \tag{11}$$

Замечая, что

$$\widehat{N}_m(2\xi) = e^{-i\xi m/2}\cos^m(\xi/2)\widehat{N}_m(\xi),$$

из (7), (10) и (11) выводим формулу

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\frac{\widehat{N}_m(\xi/2)}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi/2)}}. \tag{12}$$

Отсюда аналогично (5) и (8) имеем

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\beta_k N_m(t-k), \quad t\in\mathbf{R}, \tag{13}$$

где

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G(\xi)e^{ik\xi}}{\sqrt{e_{2m-2}(\xi)}}\,d\xi, \quad k\in\mathbf{Z}. \tag{14}$$

Вейвлет Батла – Лемерье ψ, определенный формулами (13) и (14), обладает следующими свойствами:

1^0. Вейвлет ψ является сплайном степени $m-1$ дефекта 1 с узловыми точками $k/2$, $k\in\mathbf{Z}$.

2^0. Система $\{2^{j/2}\psi(\cdot-k)|\ j,k\in\mathbf{Z}\}$ является ортонормированным базисом пространства $L^2(\mathbf{R})$.

3^0. Для $k=0,1,\ldots,m-1$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbf{R}} t^k\psi(t)\,dt = 0.$$

4^0. Носитель $\operatorname{supp}\psi$ не компактен.

5^0. Существует число $\gamma>0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)e^{\gamma|t|} = 0.$$

График вейвлета ψ может быть построен с помощью формул (13) и (14).

Упражнение. Напишите программу для вычисления значений масштабирующих функций Батла – Лемерье.

Глава 3. Дискретные преобразования и кратномасштабный p-анализ на полупрямой

§ 1. Системы Хаара, Уолша и Радемахера на единичном интервале

Пусть n – целое число. Напомним, что числовые промежутки

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называются *двоичными* (или *диадическими*) *интервалами ранга* n. Двоичный интервал $I_0^{(0)} = [0, 1)$ обозначается через Δ. Следующие два элементарных свойства были сформулированы в § 1 главы 2; доказательства остальных утверждений настоящего параграфа имеются в [3], [4] и [8].

1.1. Любые два двоичных интервала одного ранга не пересекаются.

1.2. Если два двоичных интервала пересекаются, то один из них содержится в другом.

Система функций Хаара $\{h_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ на Δ определяется следующим образом:

1) при $n = 0$ считают $h_0(t) = 1$ для всех $t \in \Delta$;

2) при $n \in \mathbf{N}$ полагают

$$h_n(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & t \in I_{2k}^{(j+1)}, \\ -2^{j/2}, & t \in I_{2k+1}^{(j+1)}, \\ 0, & t \in \Delta \setminus I_k^{(j)}, \end{cases}$$

где числа $j, k \in \mathbf{Z}_+$ определяются из условий

$$n = 2^j + k, \quad 0 \le k \le 2^j - 1$$

(так что $j = \max\{\, s \in \mathbf{Z}_+ \mid 2^s \le n\}$, $k = n - 2^j$).

1.3. Система Хаара $\{h_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом пространства $L^2(\Delta)$.

Для любой функции $f \in L^1(\Delta)$ положим

$$c_0(f) = \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{и} \quad c_n(f) = 2^{j/2} \left(\int_{I_{2k}^{(j+1)}} f(t)\, dt - \int_{I_{2k+1}^{(j+1)}} f(t)\, dt \right),$$

где $n = 2^j + k$, $0 \le k \le 2^j - 1$. Ряд Фурье функции f по системе Хаара имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) h_n. \tag{1}$$

1.4. Если $N-1=2^m+k$, $0\le k\le 2^m-1$, то значение частичной суммы

$$S_N f(t) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n(f) h_n(t)$$

ряда (2) в произвольной точке $t\in\Delta$ вычисляется по формуле

$$S_N f(t) = \begin{cases} 2^{m+1}\int_{I_l^{(m+1)}} f(\tau)\,d\tau & \text{для} \quad t\in I_l^{(m+1)},\ 0\le l\le 2k+1, \\ 2^m \int_{I_l^{(m)}} f(\tau)\,d\tau & \text{для} \quad t\in I_l^{(m)},\ k+1\le l\le 2^m-1. \end{cases}$$

1.5. Система Хаара $\{h_n \mid n\in \mathbf{Z}_+\}$ полна во всех пространствах $L^q(\Delta)$, $1\le q<\infty$.

Для произвольной функции f, ограниченной на интервале Δ, положим

$$\|f\|_\Delta := \sup_{0\le t<1} |\,f(t)|.$$

Согласно следующему утверждению, непрерывные функции, отличные от постоянных, не могут равномерно приближаться полиномами Хаара порядка N со скоростью $o(1/N)$ при $N\to\infty$.

1.6. Пусть функция f непрерывна и ограничена на Δ. Если $f\ne const$, то

$$\lim_{N\to\infty} (N\cdot \|f-S_N f\|_\Delta)\ne 0,$$

где $S_N f$ – частичные суммы ряда (1).

Обозначим через $\mathcal{D}_N$ множество *полиномов Хаара степени не выше* $N-1$, т.е. полиномов вида

$$g=\sum_{k=0}^{N-1} a_k h_k, \tag{2}$$

где a_k – произвольные действительные числа. Иначе говоря, полагаем

$$\mathcal{D}_N := \operatorname{span}\{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}.$$

1.7. Если $N-1=2^m$, то каждая функция вида (2) является ступенчатой функцией, принимающей постоянные значения на двоичных интервалах $I_k^{(m)}$, $0\le k\le 2^m-1$. В общем случае, когда $N-1=2^m+k$, $0\le k\le 2^m-1$, множество $\mathcal{D}_N$ совпадает с множеством ступенчатых функций, интервалами постоянства которых являются $I_l^{(m+1)}$ для $0\le l\le 2k+1$ и $I_l^{(m)}$ для $k<l\le 2^m-1$.

Множество всех функций, непрерывных и ограниченных на Δ, обозначим через $C_b(\Delta)$. Для данной функции $f\in C_b(\Delta)$ положим

$$\alpha_j^{(m)}(f) := \sup\{f(t)\mid t\in I_j^{(m)}\},\quad \beta_j^{(m)}(f) := \inf\{f(t)\mid t\in I_j^{(m)}\},$$

$$\omega_j^{(m)}(f) := \alpha_j^{(m)}(f) - \beta_j^{(m)}(f),$$

где m и j – целые числа, $0 \le j \le 2^m - 1$.

1.8. Пусть $f \in C_b(\Delta)$, N – натуральное число и пусть $m, l \in \mathbf{Z}_+$ определены из условий $N - 1 = 2^m + l$, $0 \le l \le 2^m - 1$. Тогда полином g_N, заданный формулой

$$g_N(t) = \begin{cases} (\alpha_j^{(m+1)}(f) - \beta_j^{(m+1)}(f))/2 & \text{для} \quad t \in I_j^{(m+1)},\ 0 \le j \le 2l+1, \\ (\alpha_j^{(m)}(f) - \beta_j^{(m)}(f))/2 & \text{для} \quad t \in I_j^{(m)},\ l+1 \le j \le 2^m - 1, \end{cases}$$

осуществляет наилучшее равномерное приближение функции f на Δ среди всех полиномов Хаара из $\mathcal{D}_N$, т.е. для него выполнено равенство

$$\|f - g_N\|_\Delta = \inf_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_\Delta.$$

При этом

$$\|f - g_N\|_\Delta = \frac{1}{2} \max \left\{ \max_{0 \le j \le 2l+1} \omega_j^{(m+1)}(f),\ \max_{l < j < 2^m} \omega_j^{(m)}(f) \right\}.$$

Пусть $r_0 : \mathbf{R} \to \{-1, 1\}$ – функция, определяемая условиями: 1) $r_0(x) = 1$ для $x \in [0, 1/2)$, 2) $r_0(x) = -1$ для $x \in [1/2, 1)$ и 3) $r_0(x+1) = r_0(x)$ для $x \in \mathbf{R}$. Тогда *система функций Радемахера* $\{r_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ определяется по формуле

$$r_n(x) = r_0(2^n x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

1.9. Функция Радемахера r_n имеет период $1/2^n$, постоянна на двоичных интервалах ранга $n+1$ и принимает на этих интервалах попеременно значения 1 и -1:

$$r_n(x) = (-1)^k, \quad \text{если} \quad x \in I_k^{(n+1)},\ k \in \mathbf{Z}\,,$$

а в точках $k/2^{n+1}$, $k \in \mathbf{Z}$, она непрерывна справа. Кроме того,

$$\int_{I_k^{(n)}} r_n(x)\,dx = 0, \quad n \in \mathbf{Z}_+,\ k \in \mathbf{Z}\,.$$

1.10. Система $\{r_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована, но не полна в $L^2(\Delta)$.

1.11. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, где a_n – комплексные числа. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$$

сходится почти всюду на Δ, сумма f этого ряда принадлежит пространствам $L^q(\Delta)$ для всех $q \in (0, +\infty)$ и при каждом таком q

$$A_q \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \le \left(\int_\Delta |f(x)|^q\,dx \right)^{1/q} \le B_q \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

где A_q и B_q – положительные константы, зависящие только от q.

Для произвольного $x \in \mathbf{R}$ числа $x_j \in \{0,1\}$ определим по формуле

$$x_j = [2^j x] (\operatorname{mod} 2), \quad j \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Эти числа являются цифрами двоичного разложения дробной части числа x:

$$\{x\} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых).

1.12. Для любых $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$r_n(x) = 1 - 2x_{n+1} = (-1)^{x_{n+1}},$$

где x_j находятся по формуле (3).

Пусть μ – мера Лебега на $\mathbf{R}$ и f_n $(n = 0, 1, \ldots, N)$ – вещественные измеримые функции, области определения которых содержат Δ. Говорят, что $\{f_n \mid n = 0, 1, \ldots, N\}$ является *набором независимых функций*, если для любых интервалов $I_n \subset \mathbf{R}$, $n = 0.1, \ldots, N$, справедливо равенство

$$\mu\{x \in \Delta \, : \, f_n(x) \in I_n, \, n = 1, 2, \ldots, N\} = \prod_{n=1}^{N} \mu\{x \in \Delta \, : \, f_n(x) \in I_n\}.$$

Систему $\{f_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ называют *системой независимых функций*, если для любого $N \in \mathbf{N}$ набор $\{f_n \mid n = 0, 1, \ldots, N\}$ есть набор независимых функций.

Для $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \mathbf{R}$ положим

$$\theta_n(x) = \frac{1 - r_n(x)}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \theta_n(x) = x_{n+1},$$

где x_j находятся по формуле (3).

1.13. Системы $\{r_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ и $\{\theta_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ являются системами независимых функций.

Система функций Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ на Δ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_n(x) = \prod_{j=0}^{s-1} (r_0(2^j x))^{n_j}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \Delta,$$

где n_j берутся из двоичного разложения

$$n = \sum_{j=0}^{s-1} n_j 2^j, \quad n_j \in \{0,1\}, \quad n_{s-1} = 1.$$

1.14. Функции Уолша выражаются через функции Радемахера по формулам

$$w_n(x) = \prod_{j=0}^{s-1} (r_j(x))^{n_j} = r_{s-1}(x) \prod_{j=0}^{s-2} (r_j(x))^{n_j}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \Delta,$$

и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_0^1 w_n(x) w_m(x)\, dx = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbf{Z}_+.$$

1.15. Функции Уолша $w_l(x)$ при $0 \le l \le 2^n - 1$ принимают постоянные значения, равные 1 или -1, на каждом из двоичных интервалов $I_k^{(n)}$, $0 \le k \le 2^n - 1$, причем $w_l(x) = 1$ при $x \in I_0^{(n)}$.

Обозначим через $w_{l,k}^{(n)}$ постоянное значение, которое принимает функция $w_l(x)$ на интервале $I_k^{(n)}$, т.е.

$$w_{l,k}^{(n)} := w_l(k 2^{-n}) \quad \text{для} \quad 0 \le l, k \le 2^n - 1.$$

В частности,

$$w_{0,0}^{(0)} = 1, \quad w_{0,0}^{(1)} = w_{1,0}^{(1)} = w_{0,1}^{(1)} = 1, \quad w_{1,1}^{(1)} = -1.$$

1.16. Для любого натурального n матрица $(w_{l,k}^{(n)})$ является симметричной и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} w_{i,l}^{(n)} w_{i,k}^{(n)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} w_{l,j}^{(n)} w_{k,j}^{(n)} = 2^n \delta_{l,k}, \quad 0 \le l, k \le 2^n - 1.$$

При этом справедливы равенства

$$w_{2l,k}^{(n)} = w_{2l+1,k}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}, \quad w_{2l,2^n+k}^{(n)} = -w_{2l+1,2^n+k}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)},$$

$$w_{l,2k}^{(n)} = w_{l,2k+1}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}, \quad w_{2^n+l,2k}^{(n)} = -w_{2^n+l,2k+1}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}.$$

Отсюда видно, что для получения матрицы $(w_{l,k}^{(n)})$ следует каждую строку матрицы $(w_{l,k}^{(n-1)})$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком. Например, для $n = 1$ и $n = 2$ получаются матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.17. Для любых $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \Delta$, справедливы равенства

$$w_{2^n+l}(x) = 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)}\, h_{2^n+k}(x), \quad 0 \le l \le 2^n - 1,$$

и

$$h_{2^n+k}(x) = 2^{-n/2} \sum_{l=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)}\, w_{2^n+l}(x), \quad 0 \le k \le 2^n - 1.$$

1.18. Пусть

$$w(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(x)$$

– полином Уолша степени не выше $2^n - 1$ и пусть

$$b_l = w(x) \quad \text{для} \quad x \in I_l^{(n)}, \quad 0 \le l \le 2^n - 1,$$

– значения, принимаемые этим полиномом на двоичных интервалах ранга n. Тогда

$$c_k = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} b_l, \quad 0 \le k \le 2^n - 1,$$

и

$$b_l = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} c_k, \quad 0 \le l \le 2^n - 1.$$

1.19. Пусть $f \in L^1(\Delta)$ и

$$S_{2^n}(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j w_j(x), \quad c_j = \int_0^1 f(t) w_j(t)\, dt, \quad x \in \Delta.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_{2^n}\|_{L^1(\Delta)} = 0.$$

1.20. Система Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ полна во всех пространствах $L^q(\Delta)$, $1 \le q < \infty$, а в пространстве $L^2(\Delta)$ она является ортонормированным базисом.

§ 2. Дискретные преобразования Уолша и Виленкина – Крестенсона

Для произвольной функции g, заданной на множестве $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ и принимающей комплексные значения, *преобразование Уолша* обозначается $\widehat{g}$ и определяется по формуле

$$\widehat{g}(j) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(k) w_j(k2^{-n}), \quad 0 \le j \le 2^n - 1.$$

2.1. Формула обращения преобразования Уолша имеет вид

$$g(k) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \widehat{g}(j) w_k(j2^{-n}), \quad 0 \le k \le 2^n - 1.$$

Поскольку $w_j(k2^{-n}) = w_k(j2^{-n}) = w_{j,k}^{(n)}$, из **1.18** имеем:

1) произвольный полином Уолша $w(x)$ степени $2^n - 1$ восстанавливается по своим значениям на двоичных интервалах ранга n с помощью переобразования Уолша;

2) для данного полинома Уолша $w(x)$ его значения на двоичных интервалах $I_l^{(n)}$ могут быть вычислены с помощью обратного преобразования Уолша.

2.2. Пусть функция f интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и пусть $g_n(k) = f(k2^{-n})$ для $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n(j) = \int_0^1 f(x) w_j(x)\, dx, \quad j \in \mathbf{Z}_+.$$

Для каждого $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, имеющего двоичное разложение

$$k = k_{n-1}2^{n-1} + k_{n-2}2^{n-2} + \dots + k_0, \quad k_i \in \{0, 1\},$$

полагают

$$\mathrm{rev}_1(k) = k_0, \quad \mathrm{rev}_\nu(k) := k_0 2^{\nu-1} + k_1 2^{\nu-2} + \dots + k_{\nu-1}, \quad \nu \in \{2, \dots, n\}.$$

2.3. Для любых $\sigma \in \{0, 1\}$, $\nu \in \{2, \dots, n\}$ имеют место рекуррентные формулы

$$\mathrm{rev}_1(\sigma) = \sigma, \quad \mathrm{rev}_\nu(2l + \sigma) = \sigma 2^{\nu-1} + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^{\nu-1} - 1\}.$$

2.4. Преобразование Уолша произвольной функции $g : \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \to \mathbf{C}$ может быть вычислено с помощью следующих формул

$$x_n(k) = g(k), \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\};$$

$$x_\nu(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu}) + (-1)^\sigma x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1})\right),$$

$$\nu \in \{n-1, n-2, \ldots, 0\}, \qquad \sigma \in \{0, 1\},$$
$$l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-\nu-1} - 1\}, \qquad s \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\};$$
$$\widehat{g}(k) = x_0(\mathrm{rev}_n(k)), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

2.5. Обратное преобразование Уолша может быть вычислено по формулам

$$x_0(k) = \widehat{g}(\mathrm{rev}_n(k)), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\};$$
$$x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}) = x_\nu(l + s2^{n-\nu}) + (-1)^\sigma x_\nu(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}),$$

$$\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \qquad \sigma \in \{0, 1\},$$
$$l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-\nu-1} - 1\}, \qquad s \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\};$$
$$g(k) = x_n(k), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Заданные в **2.4** и **2.5** преобразования называют соответственно *прямым и обратным быстрым преобразованием Уолша* (см., например, [30]).

Пусть $N = p^n$, где p и n – натуральные числа, большие 1. Через $\mathbf{C}_N$ обозначается пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$. Скалярное произведение и норма в $\mathbf{C}_N$ определяются равенствами

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Для целого неотрицательного k через $\langle k \rangle_p$ обозначается остаток от деления k на p. Если $k, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеют p-ичные разложения

$$k = k_{n-1}p^{n-1} + k_{n-2}p^{n-2} + \cdots + k_0, \quad l = l_{n-1}p^{n-1} + l_{n-2}p^{n-2} + \cdots + l_0,$$
$$k_i, l_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

то полагают

$$k \oplus_p l = \sum_{\nu=0}^{n-1} \langle k_\nu + l_\nu \rangle_p \, p^\nu \quad \text{и} \quad \{k, l\}_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu l_\nu.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. *Функции Виленкина – Крестенсона* $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ определяются равенствами

$$v_k(j) = \varepsilon_p^{\{k,l\}_n}, \quad k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

и
$$v_k(j) = v_k(j+N), \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

2.6. Функции Виленкина – Крестенсона $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ обладают свойством мультипликативности
$$v_k(j) v_l(j) = v_{k \oplus_p l}(j), \quad j \in \mathbf{Z},$$
и образуют ортогональный базис в $\mathbf{C}_N$, причем
$$\|v_k\|^2 = N, \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\}.$$

Для любой последовательности $\{x(j)\}$ из $\mathbf{C}_N$ имеем
$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k v_k(j), \quad a_k = N^{-1} \langle x, v_k \rangle. \tag{1}$$
Приведем два метода вычисления коэффициентов a_k разложения (1) по известным значениям $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$.

2.7. Пусть
$$x_0(k) = x(k), \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\};$$
$$x_\nu(l + \sigma p^{\nu-1} + s p^\nu) = \frac{1}{p} \sum_{\tau=0}^{p-1} \varepsilon_p^{-\sigma\tau} x_{\nu-1}(l + \tau p^{\nu-1} + s p^\nu),$$
$$\nu \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \sigma \in \{0,1,\dots,p-1\},$$
$$l \in \{0,1,\dots,p^{\nu-1}-1\}, \quad s \in \{0,1,\dots,p^{n-\nu}-1\}.$$
Тогда
$$a_k = x_n(k), \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\}.$$

2.8. Пусть
$$y_0(k) = x(k), \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\};$$
$$y_\nu(l p^{n-\nu+1} + \sigma p^{n-\nu} + s) = \frac{1}{p} \sum_{\tau=0}^{p-1} \varepsilon_p^{-\sigma\tau} y_{\nu-1}(l p^{n-\nu-1} + \tau p^{n-\nu} + s),$$
$$\nu \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \sigma \in \{0,1,\dots,p-1\},$$
$$l \in \{0,1,\dots,p^{\nu-1}-1\}, \quad s \in \{0,1,\dots,p^{n-\nu}-1\}.$$
Тогда
$$a_k = y_n(k), \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\}.$$

Заданные в **2.7** и **2.8** преобразования называют *прямыми быстрыми преобразованиями Виленкина – Кристенсона*. Обращая формулы, задающие эти преобразования, получаем следующие два метода вычисления значений $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ по известным коэффициентам a_k.

2.9. Пусть

$$x_n(k) = a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\};$$

$$x_{\nu-1}(l + \tau p^{\nu-1} + s p^{\nu}) = \sum_{\sigma=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\sigma\tau} x_{\nu}(l + \sigma p^{\nu-1} + s p^{\nu}),$$

$$\nu \in \{n, n-1, \ldots, 1\}, \quad \tau \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

$$l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда

$$x(k) = x_0(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

2.10. Пусть

$$y_n(k) = a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\};$$

$$y_{\nu-1}(l p^{n-\nu-1} + \tau p^{n-\nu} + s) = \sum_{\sigma=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\sigma\tau} y_{\nu}(l p^{n-\nu+1} + \sigma p^{n-\nu} + s),$$

$$\nu \in \{n, n-1, \ldots, 1\}, \quad \tau \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

$$l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда

$$x(k) = y_0(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Заданные в **2.9** и **2.10** преобразования называют *обратными быстрыми преобразованиями Виленкина – Кристенсона.*

Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, имеющего p-ичное разложение

$$k = k_{n-1} p^{n-1} + k_{n-2} p^{n-2} + \cdots + k_0, \quad k_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

полагают

$$\operatorname{rev}_1^{(p)}(k) = k_0, \quad \operatorname{rev}_{\nu}^{(p)}(k) := k_0 p^{\nu-1} + k_1 p^{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-1}, \quad \nu \in \{2, \ldots, n\}.$$

В частности, при $p = 2$ имеем $\operatorname{rev}_{\nu}^{(2)}(k) = \operatorname{rev}_{\nu}(k)$. Справедливо следующее обобщение утверждения **2.3.**

2.11. Для любых $\sigma \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\nu \in \{2, \ldots, n\}$ имеют место рекуррентные формулы

$$\operatorname{rev}_1^{(p)}(\sigma) = \sigma, \quad \operatorname{rev}_{\nu}^{(p)}(p\,l + \sigma) = \sigma p^{\nu-1} + \operatorname{rev}_{\nu-1}^{(p)}(l), \quad l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}.$$

Доказательства утверждений **2.6** – **2.11** содержатся в статье [13].

§ 3. Обобщенные функции Уолша и мультипликативные системы на полупрямой

Пусть $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ и p – натуральное число, большее 1. Как обычно, целая и дробная части числа x обозначаются через $[x]$ и $\{x\}$ соответственно.

Для каждого $x \in \mathbf{R}_+$ и любого $j \in \mathbf{N}$ числа x_j, $x_{-j} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ определим равенствами

$$x_j = [p^j x] (\operatorname{mod} p), \qquad x_{-j} = [p^{1-j} x] (\operatorname{mod} p). \tag{1}$$

Эти числа являются цифрами p-ичного разложения числа x:

$$x = \sum_{j<0} x_j p^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j p^{-j}.$$

При этом

$$[x] = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} p^{j-1}, \quad \{x\} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p^{-j}.$$

Напомним, что $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$ и для целого k через $\langle k \rangle_p$ обозначается остаток от деления k на p. Легко видеть, что $\langle k \rangle_p = k - [\,k/p\,]\,p$.

Для любых $x, y \in \mathbf{R}_+$ положим

$$x \oplus y = \sum_{j<0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j-1} + \sum_{j>0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j}, \tag{2}$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (1). В частности, при $p = 2$ имеем

$$x \oplus y = \sum_{j<0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j>0} |x_j - y_j| 2^{-j}.$$

Равенство $z = x \ominus y$ означает, что $z \oplus y = x$ (в случае $p = 2$ бинарные операции $\ominus$ и $\oplus$ совпадают). Из определений видно, что

$$[x \oplus y] = [x] \oplus [y] \quad \text{и} \quad \{x \oplus y\} = \{x\} \oplus \{y\}.$$

Кроме того, если $k, l \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, то $k \oplus l = k \oplus_p l$ (см. §2).

3.1. Бинарная операция $\oplus$ на $\mathbf{R}_+$ коммутативна, но не ассоциативна.

Пусть $w_1(x)$ – функция, заданная на [0,1) формулой

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/p), \\ \varepsilon_p^l, & x \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}),\ l \in \{1, \dots, p-1\}, \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbf{R}_+$ так, что $w_1(x+1) = w_1(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}_+$. Тогда *система обобщенных функций Уолша* $\{w_l \mid l \in \mathbf{Z}_+\}$ на $\mathbf{R}_+$ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_l(x) = \prod_{j=0}^{k} (w_1(p^j x))^{l_j}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}_+,$$

где l_j берутся из p-ичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} l_j p^j, \quad l_j \in \{0, 1 \dots, p-1\}, \quad l_k \neq 0, \quad k = k(l),$$

(классическая система Уолша соответствует случаю $p = 2$). Легко видеть, что

$$w_l(x+1) = w_l(x) \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbf{Z}_+, \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Числовые промежутки

$$[kp^{-n}, (k+1)p^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называются *p-адическими интервалами ранга n*.

3.2. Обобщенные функции Уолша $w_l(x)$, $0 \leq l \leq p^n - 1$, принимают постоянные значения на каждом из p-адических интервалов ранга n, причем $w_l(x) = 1$ для $x \in [0, p^{-n})$.

3.3. Пусть $l, s \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ и $m = \mathrm{rev}_n^{(p)}(l)$. Тогда

$$w_l(sp^{-n}) = v_m(s),$$

где v_m – функции Виленкина – Крестенсона.

Для любых $x, y \in \mathbf{R}_+$ положим

$$\chi(x, y) = \varepsilon_p^{t(x,y)}, \qquad t(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j\, y_{-j} + x_{-j}\, y_j), \tag{3}$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (1). В частности, $\chi(x, y) = (-1)^{t(x,y)}$ при $p = 2$.

3.4. Справедливы равенства

$$\chi(x, 0) = \chi(0, y) = |\chi(x, y)| = 1, \quad \chi(x, y) = \chi(y, x) = w_{[y]}(\{x\}) w_{[x]}(\{y\}),$$

и

$$\chi(x, l) = w_l(\{x\}), \quad l \in \mathbf{Z}_+, \quad x, y \in \mathbf{R}_+.$$

Кроме того, при любом натуральном j

$$\chi(x, p^{-j} l) = \chi(p^{-j} x, l) = w_l(p^{-j} x), \quad l \in \mathbf{Z}_+, \quad x \in [0, p^j).$$

3.5. Пусть $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ и число $x \oplus y$ не является p-ично рациональным. Тогда

$$\chi(x,z)\chi(y,z) = \chi(x \oplus y, z) \quad \text{и} \quad \chi(x,z)\overline{\chi(y,z)} = \chi(x \ominus y, z). \tag{4}$$

Таким образом, при фиксированных x, z равенства (4) верны для всех y из $\mathbf{R}_+$, кроме счетного множества.

Утверждения **3.1** – **3.5** выводятся непосредственно из определений; дополнительные сведения о функциях Уолша и мультипликативных системах имеются в [3], [4] и [30].

§ 4. Кратномасштабный p-анализ в $L^2(\mathbf{R}_+)$

Кратномасштабным p-анализом или *p-кратномасштабным анализом* (сокращенно: *p-КМА*) в $L^2(\mathbf{R}_+)$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbf{R}_+)$, $j \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:
(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;
(ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R}_+)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
(iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(p\,\cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbf{Z}$;
(iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot \oplus k) \in V_0$ для $k \in \mathbf{Z}_+$;
(v) существует функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция φ из условия (v) называется *масштабирующей функцией* в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

4.1. Всякая масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R}_+)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+} a_\alpha \varphi(px \ominus \alpha), \qquad \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+} |a_\alpha|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Функциональное уравнение (1) называется *масштабирующим уравнением*.

Функция ψ называется *ортогональным вейвлетом* в $L^2(\mathbf{R}_+)$, если система функций $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot \ominus k) \mid j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

4.2. Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющая уравнению (1) при $p = 2$. Тогда функция ψ, заданная формулой

$$\psi(x) = 2 \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+} (-1)^\alpha \overline{a}_{1 \oplus \alpha} \varphi(2x \ominus \alpha), \tag{2}$$

является ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Вейвлет ψ, определенный по формуле (2), называется *диадическим вейвлетом* на полупрямой $\mathbf{R}_+$, соответствующим масштабирующей функции φ.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ положим

$$\varphi_{j,k}(x) = p^{j/2}\,\varphi(p^j x \ominus k), \qquad j \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}_+,$$

и

$$V_j = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbf{Z}_+\}, \qquad j \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Будем говорить, что *функция φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$*, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств (3) является p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$. Если функция φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$, то она является масштабирующей функцией в $L^2(\mathbf{R}_+)$. В этом случае для каждого $j \in \mathbf{Z}$ система $\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в V_j и по функции φ могут быть определены *вейвлеты* $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,k}(x) = p^{j/2}\psi_l(p^j x \ominus k), \qquad 1 \le l \le p-1, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}_+,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R}_+)$. При $p = 2$ из функции φ получается диадический вейвлет ψ (см. **4.2**).

Для произвольных $p, n \in \mathbf{N}, p \ge 2$, рассмотрим масштабирующее уравнение вида

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(p\,x \ominus \alpha). \tag{4}$$

Решение φ уравнения (4) называется *финитным*, если φ имеет компактный носитель на $\mathbf{R}_+$. Если масштабирующее уравнение (4) имеет ненулевое финитное решение $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$, то это решение единственно с точностью до умножения на константу. Нормируем это решение условием

$$\int_{\mathbf{R}_+} \varphi(t)\,dt = 1. \tag{5}$$

Характеристическую функцию множества $E \subset \mathbf{R}_+$ обозначим через $\mathbf{1}_E$.

4.3. Если $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 1/p$ и все $a_\alpha = 0$ для $\alpha \ge p$, то решением уравнения (4) является функция $\varphi = \mathbf{1}_{[0,p^{n-1})}$; в частности, при $n = 1$ функция φ является масштабирующей функцией Хаара.

Пусть $\{w_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Z}_+\}$ – система обобщенных функций Уолша на $\mathbf{R}_+$, соответствующих выбранному значению p (см. § 3). Обобщенный полином Уолша

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(\omega)} \tag{6}$$

называется *маской* уравнения (4) (или его решения φ).

4.4. Пусть $b_s = m(sp^{-n})$ – значения, принимаемые маской m уравнения (4) на p-адических интервалах ранга n, т.е.

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(sp^{-n})} = b_s, \quad 0 \le s \le p^n - 1. \tag{7}$$

Тогда

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s w_\alpha(s/p^n), \quad 0 \le \alpha \le p^n - 1. \tag{8}$$

и обратно, из формул (8) следуют (7).

Для реализации преобразований (7) и (8) можно применять быстрые алгоритмы Виленкина – Крестенсона (см. **2.7 - 2.10** и **3.3**).

4.5. Если функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (4) и условию (5), то

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [\,0, p^{n-1}\,].$$

Кроме того, если система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \,|\, k \in \mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R}_+)$, то маска (6) удовлетворяет условиям

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/p)|^2 + \cdots + |m(\omega + (p-1)/p)|^2 = 1, \quad \omega \in [\,0, 1/p\,). \tag{9}$$

Условия (9) эквивалентны равенствам

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \le l \le p^{n-1} - 1, \tag{10}$$

где $b_l = m(lp^{-n})$. В частности, для $p = n = 2$ получаются три равенства

$$b_0 = 1, \quad b_2 = 0, \quad |b_1|^2 + |b_3|^2 = 1,$$

а для $p = 3, n = 2$ имеем

$$b_0 = 1, \quad b_3 = b_6 = 0, \quad |b_1|^2 + |b_4|^2 + |b_7|^2 = |b_2|^2 + |b_5|^2 + |b_8|^2 = 1.$$

Кроме того, из (10) при любом n следуют равенства

$$b_{p^{n-1}} = b_{2\,p^{n-1}} = \cdots = b_{(p-1)p^{n-1}} = 0.$$

Пусть $M \subset [0, 1)$ и

$$T_p M = \bigcup_{l=0}^{p-1} \Big\{ l/p + \omega/p \mid \omega \in M \Big\}.$$

Множество M называется *блокированным* (для маски m), если оно представимо в виде объединения p-адических интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, p^{-n+1})$ и обладает свойством $T_pM \subset M \cup \mathrm{Null}\, m$, где $\mathrm{Null}\, m$ – множество всех нулей маски m на интервале [0,1). Например, интервал $[1-p^{1-n}, 1)$ является блокированным множеством, если маска m обращается в нуль в точках $l/p - 1/p^n$, $1 \le l \le p-1$.

4.6. Пусть финитная функция $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ удовлетворяет уравнению (4) и условию (5). Тогда справедливы утверждения:

(a) система $\{\varphi(\cdot \ominus k) | \, k \in \mathbf{Z}_+\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда маска m имеет блокированное множество;

(b) система $\{\varphi(\cdot \ominus k) | \, k \in \mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R}_+)$ в том и только в том случае, когда маска m не имеет блокированных множеств и удовлетворяет условиям (9).

Пусть множество $E \subset \mathbf{R}_+$ таково, что из любого покрытия этого множества p-адическими интервалами можно выделить конечное подпокрытие (в частности, E может быть объединением конечного числа p-адических интервалов). Множество E назовем *конгруэнтным* [0,1) *по модулю* $\mathbf{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x \in [0,1)$ существует $k \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $x \oplus k \in E$.

Будем говорить, что маска m уравнения (4) удовлетворяет *модифицированному условию Коэна*, если существует множество E такое, что:

1) E конгруэнтно [0,1) по модулю $\mathbf{Z}_+$ и содержит некоторый интервал вида $[0, \delta)$, $\delta > 0$;

2) выполнено неравенство

$$\inf_{j \in \mathbf{N}} \inf_{\omega \in E} |m(p^{-j}\omega)| > 0. \qquad (11)$$

Отметим, что поскольку $m(\omega) \equiv 1$ на $[0, p^{-n})$, для проверки неравенства (11) достаточно найти номер j_0 такой, что $E/2^{j_0} \subset [0, p^{-n})$, а затем убедиться, что полином m не обращается в нуль на множествах $E/2, \ldots, E/2^{j_0-1}$.

4.7. Пусть маска m финитного L^2-решения φ уравнения (4) удовлетворяет условиям (5) и (9). Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

(a) функция φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$;

(b) маска m не имеет блокированных множеств;

(c) маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна.

Для произвольных $p, n \in \mathbf{N}, p \ge 2$, определим коэффициенты a_α такие, что масштабирующее уравнение (4) имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ со следующими свойствами:

1) $\mathrm{supp}\, \varphi \subset [0, p^{n-1}]$,

2) φ является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша,

3) φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Пусть $\mathbf{N}_0(p,n)$ – множество всех натуральных чисел $l \geq p^{n-1}$, у которых в p-арном разложении

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j, \quad \mu_j \in \{0,1,\ldots,p-1\}, \quad \mu_k \neq 0, \quad k = k(l) \in \mathbf{Z}_+, \tag{12}$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_{j+n-1})$ отсутствуют наборы

$$(0,0,\ldots,0,1),(0,0,\ldots,0,2),\ldots,(0,0,\ldots,0,p-1).$$

Положим $\mathbf{N}(p,n) = \{1,2,\ldots,p^{n-1}-1\} \cup \mathbf{N}_0(p,n)$. Имеем, в частности,

$$\mathbf{N}(2,2) = \{2^{j+1}-1 \mid j \in \mathbf{Z}_+\} = \{1,3,7,15,31,\ldots\},$$

$$\mathbf{N}(2,3) = \{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,21,22,23,26,27,29,30,31,42,\ldots\},$$

$$\mathbf{N}(p,2) = \{\sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j \mid \mu_j \in \{1,2,\ldots,p-1\}, k \in \mathbf{Z}_+\} \ (p \geq 3).$$

Для каждого $l \in \mathbf{N}(p,n), 1 \leq l \leq p^n - 1$, выберем (действительное или комплексное) число b_l так, чтобы выполнялись условия (10). Положим

$$\gamma(i_1,i_2,\ldots,i_n) = b_l, \quad \text{если} \quad l = i_1 p^0 + i_2 p^1 + \cdots + i_n p^{n-1}, \quad i_j \in \{0,1,\ldots,p-1\}.$$

После этого представим каждое $l \in \mathbf{N}(p,n)$ в виде p-арного разложения (12) и определим коэффициенты $c_l[m]$ с помощью равенств:

$$c_l[m] = \gamma(\mu_0,0,0,\ldots,0,0), \quad \text{если} \quad k(l) = 0;$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_1,0,0,\ldots,0,0)\gamma(\mu_0,\mu_1,0,\ldots,0,0), \quad \text{если} \quad k(l) = 1;$$

$$\ldots$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_k,0,0,\ldots,0)\gamma(\mu_{k-1},\mu_k,0,\ldots,0)\ldots\gamma(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{n-2},\mu_{n-1}),$$

если $k = k(l) \geq n-1$. Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются "сдвигом" индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из p-арного разложения (12) числа l (например, за множителем $\gamma(\mu_{k-l},\mu_{k-l+1},\ldots,\mu_k,$
$0,0,\ldots,0)$ следует $\gamma(\mu_{k-l-1},\mu_{k-l},\ldots,\mu_k,0,\ldots,0)$).

4.8. Пусть параметры b_s удовлетворяют условиям (10), коэффициенты a_α уравнения (4) определены из системы

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(sp^{-n})} = b_s, \quad 0 \le s \le p^n - 1, \tag{13}$$

а функция φ задана разложением

$$\varphi(x) = (1/p^{n-1})\mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1})(1 + \sum_{l\in\mathbf{N}(p,n)} c_l[m]w_l(x/p^{n-1})), \quad x \in \mathbf{R}_+. \tag{14}$$

Предположим, что для маски m уравнения (4) выполнено любое из условий:

1) m не имеет блокированных множеств;

2) m удовлетворяет модифицированному условию Коэна.

Тогда функция φ, определенная по формуле (14), является решением уравнения (4) и генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Отметим, что система (13) может быть записана в виде

$$m(sp^{-n}) = b_s, \quad 0 \le s \le p^n - 1,$$

а коэффициенты a_α находятся из этой системы по формулам (8) с помощью преобразований Виленкина – Кристенсона. Кроме того, если $b_l \ne 0$ для всех $0 \le l \le p^{n-1} - 1$, то маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна на множестве $E = [0, 1)$ (так как $m(\omega) \ne 0$ на $[0, 1/2)$).

Примеры масштабирующих функций в $L^2(\mathbf{R}_+)$, получаемых указанным в **4.8** методом, приведены в **4.9** – **4.14**. Гладкость каждой из этих функций φ характеризуется скоростью убывания последовательности

$$\Omega_j(\varphi) := \sup\{\, |\varphi(x) - \varphi(y)| \;:\; x, y \in [\,0, p^{n-1}),\ x \ominus y \in [\,0, p^{-j}\,)\,\}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Применяемое ниже понятие безусловного базиса обсуждалось в § 10 главы 1.

4.9. При $p = n = 2$ положим

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = b,$$

где $|\,a|^2 + |\,b|^2 = 1$. Этот выбор параметров приводит к масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = 2\sum_{k=0}^{3} a_\alpha \varphi(2x \ominus \alpha) \tag{15}$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1+a+b}{4}, \quad a_1 = \frac{1+a-b}{4}, \quad a_2 = \frac{1-a-b}{4}, \quad a_3 = \frac{1-a+b}{4}.$$

При $a = 1$ и $a = -1$ решениями уравнения (15) являются функция Хаара $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ и смещенная функция Хаара $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x \ominus 1)$ соответственно. В случае $a = 0$ интервал $[1/2, 1)$ является блокированным множеством для маски уравнения (15), функция φ определяется по формуле $\varphi(x) = (1/2)\chi_{[0,1)}(x/2)$ и система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ линейно зависима (легко видеть, что $\varphi(x) = \varphi(x \ominus 1)$).

Пусть теперь $0 < |\,a| < 1$. Тогда из формулы (14) получается масштабирующая функция Лэнга:

$$\varphi(x) = (1/2)\chi_{[0,1)}(x/2)(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}(x/2)), \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Эта функция φ генерирует 2-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяет неравенству

$$\Omega_j(\varphi) \le C|\,b|^j, \quad j \in \mathbf{N},$$

и обладает фрактальным свойством:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 + a - b)/2 + b\varphi(2x) & \text{для} \quad 0 \le x < 1, \\ (1 - a + b)/2 - b\varphi(2x - 2) & \text{для} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Кроме того, при условии $|\,b| < 1/2$ система $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot \ominus k) \mid j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}_+\}$, где вейвлет ψ определен по φ с помощью формулы (2), является безусловным базисом во всех пространствах $L^q(\mathbf{R}_+)$, $1 < q < \infty$.

4.10. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/4) \cup [3/8, 1/2), \\ b, & \omega \in [1/4, 3/8), \\ 0, & \omega \in [1/2, 3/4) \cup [7/8, 1), \\ \beta, & \omega \in [3/4, 7/8), \end{cases}$$

где $0 \le |\,b| < 1$, $|\beta| = \sqrt{1 - |\,b|^2}$. Для маски m модифицированное условие Коэна выполнено на множестве $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$. Пользуясь (14), получаем масштабирующую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\chi_{[0,1)}(x/4)\left[1 + w_1(x/4) + bw_2(x/4) + w_3(x/4) + \beta w_6(x/4)\right]. \qquad (16)$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{7} c_k\varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = (3 + b + \beta)/4, \quad c_1 = (3 + b - \beta)/4, \quad c_2 = c_6 = (1 - b - \beta)/4,$$

$$c_3 = c_7 = (1 - b + \beta)/4, \quad c_4 = (-1 + b + \beta)/4, \quad c_5 = (-1 + b - \beta)/4.$$

4.11. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ b_3 = c,\ b_4 = 0,\ b_5 = \alpha,\ b_6 = \beta,\ b_7 = \gamma,$$

где $|\,a|^2 + |\alpha|^2 = |\,b|^2 + |\beta|^2 = |\,c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда

$$\gamma(1,0,0) = a, \quad \gamma(0,1,0) = b, \quad \gamma(1,1,0) = c,$$

$$\gamma(1,0,1) = \alpha, \quad \gamma(0,1,1) = \beta, \quad \gamma(1,1,1) = \gamma$$

и

$$c_l[m] = \gamma(\mu_k, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0)\ldots\gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2),$$

где

$$l = \sum_{i=0}^{k} \mu_i 2^i, \quad \mu_k = 1, \quad \mu_i \in \{0, 1\}.$$

Разложение (14) принимает вид

$$\varphi(x) = (1/4)\chi_{[0,1)}(y)(1 + \sum_{l \in \mathbf{N}(2,3)} c_l[m] w_l(y))$$

$$= (1/4)\chi_{[0,1)}(y)(1 + a\, w_1(y) + ab\, w_2(y) + ac\, w_3(y) + ab\alpha\, w_5(y)$$
$$+ ac\beta\, w_6(y) + ac\gamma\, w_7(y) + ab^2\alpha\, w_{10}(y) + abc\alpha\, w_{11}(y) +$$
$$+ ac\beta\gamma\, w_{14}(y) + ac\gamma^2\, w_{15}(y) + ab^2\alpha^2\, w_{21}(y) + abc\alpha\beta\, w_{22}(y) + ab\alpha\beta\gamma\, w_{23}(y)$$
$$+ abc\alpha\beta\, w_{26}(y) + ac^2\alpha\beta\, w_{27}(y) + ac\alpha\beta\gamma\, w_{29}(y) + ac\beta\gamma^2\, w_{30}(y) + \ldots),$$

где $y = x/4$. Если a и c ненулевые, то функция φ генерирует 2-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$ (модифицированное условие Коэна в случае $abc \neq 0$ выполнено для $E = [0,1)$, а в случае $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ оно имеет место для $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$). Функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{7} c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma),$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma),$$

$$c_3=\frac{1}{4}(1+a-b-c-\alpha+\beta+\gamma),$$
$$c_4=\frac{1}{4}(1-a+b-c-\alpha+\beta-\gamma),$$
$$c_5=\frac{1}{4}(1-a+b-c+\alpha-\beta+\gamma),$$
$$c_6=\frac{1}{4}(1-a-b+c-\alpha-\beta+\gamma),$$
$$c_7=\frac{1}{4}(1-a-b+c+\alpha+\beta-\gamma).$$

В случае $a=1$, $0\le|\gamma|<1$, для функции φ имеет место оценка

$$\Omega_j(\varphi)\le C|\gamma|^j,\quad j\in\mathbf{N},$$

а если $b=c=1$, $0\le|\alpha|<1$, то

$$\Omega_j(\varphi)\le C|\alpha|^j,\quad j\in\mathbf{N},$$

причем обе оценки точные по порядку. Отметим также, что при $a=0$ и $c=0$ блокированными множествами для маски

$$m(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}c_kw_k(\omega)$$

являются интервалы $[1/4,1)$ и $[3/4,1)$ соответственно. Значит, если $a=0$ или $c=0$, то система $\{\varphi(\cdot\ominus k)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$ линейно зависима и функция φ не генерирует 2-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Масштабирующие функции, рассмотренные в **4.9** и **4.10**, получаются при $a=1$ из **4.11** соответственно в случаях: 1) $b=c$ и 2) $0\le|\,b|<1$, $c=1$.

4.12. Пусть $p=2$. Выберем комплексные числа $b_0,b_1,\dots,b_{2^{n-1}-1}$ такими, что

$$b_0=1\quad\text{и}\quad 0<|\,b_l|\le1,\quad 1\le l\le 2^{n-1}-1,$$

а затем определим $b_{2^{n-1}},b_{2^{n-1}+1},\dots,b_{2^n-1}$ по формуле

$$|\,b_{l+2^{n-1}}|=\sqrt{1-|\,b_l|^2},\quad 0\le l\le 2^{n-1}-1.$$

Применив формулы (16), найдем коэффициенты маски

$$m(\omega)=\sum_{\alpha=0}^{2^n-1}a_\alpha w_k(\omega),$$

принимающей на двоичных интервалах $I_l^{(n)}$, $0\le l\le 2^n-1$, значения b_l. Так как b_l для $0\le l\le 2^{n-1}-1$ выбраны ненулевыми, то $|m(\omega)|>0$

для $\omega \in [0, 1/2)$. Следовательно, маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна. Соответствующая масштабирующая функция φ может быть задана разложением (14), коэффициенты которого по параметрам b_l определяются однозначно (с точностью до единичных по модулю множителей).

4.13. Пусть φ определена по формуле (14) при $p = 3$, $n = 2$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = \alpha,\ b_3 = 0,\ b_4 = b,\ b_5 = \beta,\ b_6 = 0,\ b_7 = c,\ b_8 = \gamma,$$

где

$$|\,a|^2 + |\,b|^2 + |\,c|^2 = |\,\alpha|^2 + |\,\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

С помощью **4.7** проверяется, что φ генерирует 3-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$ в следующих трех случаях: 1) $a \neq 0,\ \alpha \neq 0$, 2) $a = 0,\ c \neq 0,\ \alpha \neq 0$, 3) $a \neq 0,\ \alpha = 0,\ \beta \neq 0$. Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{8} c_k \varphi(3x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{3}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$c_1 = \frac{1}{3}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$c_2 = \frac{1}{3}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$c_4 = \frac{1}{3}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$c_5 = \frac{1}{3}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$c_6 = \frac{1}{3}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$c_7 = \frac{1}{3}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

$$c_8 = \frac{1}{3}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$.

4.14. Пусть $p=2$, $n\geq 3$. Положим

$$m(\omega)=\begin{cases} 1, & \omega\in[0,1/2-1/2^{n-1})\cup[1/2-1/2^{n},1/2),\\ b, & \omega\in[1/2-1/2^{n-1},1/2-1/2^{n}),\\ 0, & \omega\in[1/2,1/2-1/2^{n})\cup[1-1/2^{n},1),\\ \beta, & \omega\in[1-1/2^{n-1},1-1/2^{n}),\end{cases}$$

где $0\leq|b|<1$, $|\beta|=\sqrt{1-|b|^2}$. Тогда из (22) получаем

$$\varphi(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\chi_{[0,1)}(x/2^{n-1})(1+\sum_{l=1}^{2^{n-1}-3}w_l(x/2^{n-1})+\,bw_{2^{n-1}-2}(x/2^{n-1})$$

$$+\,w_{2^{n-1}-1}(x/2^{n-1})+\beta w_{2^{n}-2}(x/2^{n-1})). \tag{17}$$

Для этой функции φ модифицированное условие Коэна выполнено на множестве

$$E=[0,1-1/2^{n-2})\cup[1-1/2^{n-1},1)\cup[2-1/2^{n-2},2-1/2^{n-1});$$

если $b\neq 0$, то можно выбрать также $E=[0,1)$.

Отметим, что в случае $n=3$ формулы (16) и (17) совпадают.

Дальнейшие сведения о p-адических вейвлетах содержатся в работах [15], [20], [25], [28], [29].

Задания к самостоятельной работе по теме "Вейвлеты для сжатия изображений"

Для входного изображения $f(x, y)$ и восстановленного изображения $\tilde{f}(x, y)$, имеющих размер $M \times K$, вводятся следующие количественные оценки искажений.

1. *Среднеквадратическое отклонение*:

$$\sigma(f, \tilde{f}) = \left[\frac{1}{MK} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{K} (f(x, y) - \tilde{f}(x, y))^2 \right]^{1/2}.$$

2. *Средняя пиксельная ошибка*:

$$\sigma_1(f, \tilde{f}) = \frac{1}{MK} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{K} |\, f(x, y) - \tilde{f}(x, y) \,|.$$

3. *Пиковое отношение сигнал - шум* (PSNR – peak signal-to-noise ratio):

$$PSNR = \frac{M_{gl}}{\sigma(f, \tilde{f})},$$

где $\sigma(f, \tilde{f})$ – среднеквадратическое отклонение, M_{gl} – максимальное количество градаций серого в применяемой шкале (наиболее распространенное значение: $M_{gl} = 255$). При измерении в децибелах применяется также величина $20 \lg(PSNR)$.

Примеры вычисления величин $\sigma(f, \tilde{f})$, $\sigma_1(f, \tilde{f})$, $PSNR$ для изображений "Lena", "Mandril","Winter 1", "Золотой холм"и "Корабли"имеются в [12, с.583] и [19, с.178]. Кроме указанных изображений, в приведенных ниже заданиях рекомендуется использовать изображения из [16, с.228]. Дискретные вейвлет-преобразования (ДВП) Хаара и db_N определены в § 3 и § 8 главы 2, а диадическое ДВП определяется аналогично. Параметры $b_0, b_1, \ldots, b_{2^n-1}$ выбирать как в § 4 главы 3 (см. **4.9** – **4.12**). При $n = 2$ значения одного из параметров сначала вычислять с шагом 0.1 от 0 до 1, затем с шагом 0.01 от 0.9 до 1. Для остальных n значения параметров выбираются аналогично.

Исходная информация: входное изображение $f(x, y)$, значения N и n, где $N = 2^{n-1}$, $2 \le n \le 4$.

Задание 1. Получить восстановленное изображение $\tilde{f}(x, y)$ и вычислить значения $\sigma(f, \tilde{f})$, $\sigma_1(f, \tilde{f})$, $PSNR$ для ДВП Хаара и db_N.

Задание 2. Провести вычислительные эксперименты и найти значения параметров

$$b_0, b_1, \ldots, b_{2^n-1},$$

при которых величины $\sigma(f, \tilde{f})$ и $\sigma_1(f, \tilde{f})$, вычисленные по диадическому ДВП, будут для данного изображения минимальны. Вычислить соответствующее значение $PSNR$.

Задание 3. Убедиться, что найденный в задании 2 набор параметров $b_0, b_1, \ldots, b_{2^n-1}$ задает масштабирующую функцию φ, генерирующую КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$. Построить график этой функции φ и соответствующего диадического вейвлета ψ.

Примечание. При каждом ДВП получать $\tilde{f}(x, y)$ тремя способами: 1) оставляя $p\%$ наибольших по модулю коэффициентов в преобразованном изображении, 2) пользуясь ε-критерием, 3) применяя простой код вейвлет-изображения (см. [12, с.581]). Значения p выбирать как в книге Уэлстида [19].

Литература

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М: Техносфера, 2004.

2. *Виноградов О.Л.* Ряды Фурье и приближение функций в курсе математического анализа. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.

3. *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. М.: МГУП, 2005.

4. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.

5. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954.

6. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

7. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть II. М: МЦНМО, 1998.

8. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

9. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976.

11. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

12. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М: Мир, 2005.

13. *Малоземов В.Н., Машарский С.М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина – Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. С. 111-157.

14. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

15. *Протасов В.Ю., Фарков Ю.А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сборник. 2006. Т.197. Вып.10. С. 129-160.

16. *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005.

17. *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.

18. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

19. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Изд-во Триумф, 2003.

20. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С. 193-220.

21. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Наука, 1970.

22. Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека". Ред. С.Г. Крейн. М.: Наука, 1972.

23. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М: Мир, 2001.

24. *Юдин М.Н., Фарков Ю.А., Филатов Д.М.* Введение в вейвлет-анализ. М: МГГА, 2001.

25. *Farkov Yu.A.* Orthogonal p-wavelets on $\mathbf{R}_+$ // Proc. Intern. Conf. "Wavelets and splines"(July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia). St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2005. P. 4-26.

26. *Holshneider M.* Wavelets: an analysis tool. Oxford: Clarendon Press, 1995.

27. *Jaffard S., Meyer Y.* Wavelet methods for pointwise reqularity and local oscillations of functions // Memoirs of the American Mathematical Society, no. 587, 1996.

28. *Lang W.C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. P. 307–317.

29. *Lang W.C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533-544.

30. *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N.Y.: Adam Hilger, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ