Российский государственный геологоразведочный университет

Кафедра высшей математики и математического моделирования

Ю.А.Фарков

Ортогональные системы и дискретные преобразования

Москва 2006

§ 1. Системы Хаара, Радемахера и Уолша

Пусть n – целое число. Числовые промежутки

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называются *двоичными* (или *диадическими*) *интервалами ранга* n. Двоичный интервал $I_0^{(0)} = [0, 1)$ обозначается через Δ.

1.1. Любые два двоичных интервала одного ранга не пересекаются.

1.2. Если два двоичных интервала пересекаются, то один из них содержится в другом.

Система функций Хаара $\{h_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ на Δ определяется следующим образом:

1) при $n = 0$ считают $h_0(t) = 1$ для всех $t \in \Delta$;

2) при $n \in \mathbf{N}$ полагают

$$h_n(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & t \in I_{2k}^{(j+1)}, \\ -2^{j/2}, & t \in I_{2k+1}^{(j+1)}, \\ 0, & t \in \Delta \setminus I_k^{(j)}, \end{cases}$$

где числа $j, k \in \mathbf{Z}_+$ определяются из условий

$$n = 2^j + k, \quad 0 \le k \le 2^j - 1$$

(так что $j = \max\{\, s \in \mathbf{Z}_+ \mid 2^s \le n\}$, $k = n - 2^j$).

1.3. Система Хаара $\{h_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом пространства $L^2(\Delta)$.

Для любой функции $f \in L^1(\Delta)$ положим

$$c_0(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{и} \quad c_n(f) = 2^{j/2}\left(\int_{I_{2k}^{(j+1)}} f(t)\,dt - \int_{I_{2k+1}^{(j+1)}} f(t)\,dt\right),$$

где $n = 2^j + k$, $0 \le k \le 2^j - 1$. Ряд Фурье функции f по системе Хаара имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) h_n. \tag{1}$$

1.4. Если $N - 1 = 2^m + k$, $0 \le k \le 2^m - 1$, то значение частичной суммы

$$S_N f(t) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n(f) h_n(t)$$

ряда (2) в произвольной точке $t \in \Delta$ вычисляется по формуле

$$S_N f(t) = \begin{cases} 2^{m+1} \int_{I_l^{(m+1)}} f(\tau)\, d\tau & \text{для} \quad t \in I_l^{(m+1)},\ 0 \le l \le 2k+1, \\ 2^m \int_{I_l^{(m)}} f(\tau)\, d\tau & \text{для} \quad t \in I_l^{(m)},\ k+1 \le l \le 2^m - 1. \end{cases}$$

1.5. Система Хаара $\{h_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ полна во всех пространствах $L^q(\Delta)$, $1 \le q < \infty$.

Для произвольной функции f, ограниченной на интервале Δ, положим

$$\|f\|_\Delta := \sup_{0 \le t < 1} |f(t)|.$$

Согласно следующему утверждению, непрерывные функции, отличные от постоянных, не могут равномерно приближаться полиномами Хаара порядка N со скоростью $o(1/N)$ при $N \to \infty$.

1.6. Пусть функция f непрерывна и ограничена на Δ. Если $f \ne const$, то

$$\lim_{N \to \infty} (N \cdot \|f - S_N f\|_\Delta) \ne 0,$$

где $S_N f$ – частичные суммы ряда (1).

Обозначим через $\mathcal{D}_N$ множество *полиномов Хаара степени не выше* $N-1$, т.е. полиномов вида

$$g = \sum_{k=0}^{N-1} a_k h_k, \tag{2}$$

где a_k – произвольные действительные числа. Иначе говоря, полагаем

$$\mathcal{D}_N := \operatorname{span}\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}.$$

1.7. Если $N-1 = 2^m$, то каждая функция вида (2) является ступенчатой функцией, принимающей постоянные значения на двоичных интервалах $I_k^{(m)}$, $0 \le k \le 2^m - 1$. В общем случае, когда $N-1 = 2^m + k$, $0 \le k \le 2^m - 1$, множество $\mathcal{D}_N$ совпадает с множеством ступенчатых функций, интервалами постоянства которых являются $I_l^{(m+1)}$ для $0 \le l \le 2k+1$ и $I_l^{(m)}$ для $k < l \le 2^m - 1$.

Множество всех функций, непрерывных и ограниченных на Δ, обозначим через $C_b(\Delta)$. Для данной функции $f \in C_b(\Delta)$ положим

$$\alpha_j^{(m)}(f) := \sup\{f(t) \mid t \in I_j^{(m)}\}, \quad \beta_j^{(m)}(f) := \inf\{f(t) \mid t \in I_j^{(m)}\},$$

$$\omega_j^{(m)}(f) := \alpha_j^{(m)}(f) - \beta_j^{(m)}(f),$$

где m и j – целые числа, $0 \le j \le 2^m - 1$.

1.8. Пусть $f \in C_b(\Delta)$, N – натуральное число и пусть $m, l \in \mathbf{Z}_+$ определены из условий $N-1 = 2^m + l$, $0 \le l \le 2^m - 1$. Тогда полином g_N, заданный формулой

$$g_N(t) = \begin{cases} (\alpha_j^{(m+1)}(f) - \beta_j^{(m+1)}(f))/2 & \text{для} \quad t \in I_j^{(m+1)},\ 0 \le j \le 2l+1, \\ (\alpha_j^{(m)}(f) - \beta_j^{(m)}(f))/2 & \text{для} \quad t \in I_j^{(m)},\ l+1 \le j \le 2^m - 1, \end{cases}$$

осуществляет наилучшее равномерное приближение функции f на Δ среди всех полиномов Хаара из $\mathcal{D}_N$, т.е. для него выполнено равенство

$$\|f-g_N\|_\Delta = \inf_{g\in\mathcal{D}_N} \|f-g\|_\Delta.$$

При этом

$$\|f-g_N\|_\Delta = \frac{1}{2}\max\left\{\max_{0\le j\le 2l+1}\omega_j^{(m+1)}(f),\ \max_{l<j<2^m}\omega_j^{(m)}(f)\right\}.$$

Пусть $r_0 : \mathbf{R}\to\{-1,1\}$ – функция, определяемая условиями: 1) $r_0(x)=1$ для $x\in[0,1/2)$, 2) $r_0(x)=-1$ для $x\in[1/2,1)$ и 3) $r_0(x+1)=r_0(x)$ для $x\in\mathbf{R}$. Тогда *система функций Радемахера* $\{r_n \mid n\in\mathbf{Z}_+\}$ определяется по формуле

$$r_n(x)=r_0(2^n x),\qquad x\in\mathbf{R}.$$

1.9. Функция Радемахера r_n имеет период $1/2^n$, постоянна на двоичных интервалах ранга $n+1$ и принимает на этих интервалах попеременно значения 1 и -1:

$$r_n(x)=(-1)^k,\quad \text{если}\quad x\in I_k^{(n+1)},\ k\in\mathbf{Z},$$

а в точках $k/2^{n+1}$, $k\in\mathbf{Z}$, она непрерывна справа. Кроме того,

$$\int_{I_k^{(n)}} r_n(x)\,dx=0,\quad n\in\mathbf{Z}_+,\ k\in\mathbf{Z}.$$

1.10. Система $\{r_n \mid n\in\mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована, но не полна в $L^2(\Delta)$.

1.11. Пусть $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2<+\infty$, где a_n – комплексные числа. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^\infty a_n r_n(x)$$

сходится почти всюду на Δ, сумма f этого ряда принадлежит пространствам $L^q(\Delta)$ для всех $q\in(0,+\infty)$ и при каждом таком q

$$A_q\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\int_\Delta |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \le B_q\left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2\right)^{1/2},$$

где A_q и B_q – положительные константы, зависящие только от q.

Для произвольного $x\in\mathbf{R}$ числа $x_j\in\{0,1\}$ определим по формуле

$$x_j=[2^j x](\mathrm{mod}\,2),\quad j\in\mathbf{N}. \tag{3}$$

Эти числа являются цифрами двоичного разложения дробной части числа x:

$$\{x\}=\sum_{j=1}^\infty x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых).

1.12. Для любых $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$r_n(x) = 1 - 2x_{n+1} = (-1)^{x_{n+1}},$$

где x_j находятся по формуле (3).

Пусть μ – мера Лебега на $\mathbf{R}$ и f_n $(n = 0, 1, \dots, N)$ – вещественные измеримые функции, области определения которых содержат Δ. Говорят, что $\{f_n \mid n = 0, 1, \dots, N\}$ является *набором независимых функций*, если для любых интервалов $I_n \subset \mathbf{R}$, $n = 0.1, \dots, N$, справедливо равенство

$$\mu\{x \in \Delta\, :\; f_n(x) \in I_n,\, n = 1, 2, \dots, N\} = \prod_{n=1}^{N} \mu\{x \in \Delta\, :\; f_n(x) \in I_n\}.$$

Систему $\{f_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ называют *системой независимых функций*, если для любого $N \in \mathbf{N}$ набор $\{f_n \mid n = 0, 1, \dots, N\}$ есть набор независимых функций.

Для $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \mathbf{R}$ положим

$$\theta_n(x) = \frac{1 - r_n(x)}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \theta_n(x) = x_{n+1},$$

где x_j находятся по формуле (3).

1.13. Системы $\{r_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ и $\{\theta_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ являются системами независимых функций.

Система функций Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ на Δ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_n(x) = \prod_{j=0}^{s-1} (r_0(2^j x))^{n_j}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \Delta,$$

где n_j берутся из двоичного разложения

$$n = \sum_{j=0}^{s-1} n_j 2^j, \quad n_j \in \{0, 1\}, \quad n_{s-1} = 1.$$

1.14. Функции Уолша выражаются через функции Радемахера по формулам

$$w_n(x) = \prod_{j=0}^{s-1} (r_j(x))^{n_j} = r_{s-1}(x) \prod_{j=0}^{s-2} (r_j(x))^{n_j}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \Delta,$$

и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_0^1 w_n(x) w_m(x)\, dx = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbf{Z}_+.$$

1.15. Функции Уолша $w_l(x)$ при $0 \le l \le 2^n - 1$ принимают постоянные значения, равные 1 или -1, на каждом из двоичных интервалов $I_k^{(n)}$, $0 \le k \le 2^n - 1$, причем $w_l(x) = 1$ при $x \in I_0^{(n)}$.

Обозначим через $w_{l,k}^{(n)}$ постоянное значение, которое принимает функция $w_l(x)$ на интервале $I_k^{(n)}$, т.е.

$$w_{l,k}^{(n)} := w_l(k2^{-n}) \quad \text{для} \quad 0 \le l, k \le 2^n - 1.$$

В частности,

$$w_{0,0}^{(0)} = 1, \quad w_{0,0}^{(1)} = w_{1,0}^{(1)} = w_{0,1}^{(1)} = 1, \quad w_{1,1}^{(1)} = -1.$$

1.16. Для любого натурального n матрица $(w_{l,k}^{(n)})$ является симметричной и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} w_{i,l}^{(n)} w_{i,k}^{(n)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} w_{l,j}^{(n)} w_{k,j}^{(n)} = 2^n \delta_{l,k}, \quad 0 \le l, k \le 2^n - 1.$$

При этом справедливы равенства

$$w_{2l,k}^{(n)} = w_{2l+1,k}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}, \quad w_{2l,2^n+k}^{(n)} = -w_{2l+1,2^n+k}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)},$$

$$w_{l,2k}^{(n)} = w_{l,2k+1}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}, \quad w_{2^n+l,2k}^{(n)} = -w_{2^n+l,2k+1}^{(n)} = w_{l,k}^{(n-1)}.$$

Отсюда видно, что для получения матрицы $(w_{l,k}^{(n)})$ следует каждую строку матрицы $(w_{l,k}^{(n-1)})$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком. Например, для $n = 1$ и $n = 2$ получаются матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.17. Для любых $n \in \mathbf{Z}_+$, $x \in \Delta$, справедливы равенства

$$w_{2^n+l}(x) = 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} h_{2^n+k}(x), \quad 0 \le l \le 2^n - 1,$$

и

$$h_{2^n+k}(x) = 2^{-n/2} \sum_{l=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} w_{2^n+l}(x), \quad 0 \le k \le 2^n - 1.$$

1.18. Пусть

$$w(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(x)$$

– полином Уолша степени не выше $2^n - 1$ и пусть

$$b_l = w(x) \quad \text{для} \quad x \in I_l^{(n)}, \quad 0 \le l \le 2^n - 1,$$

– значения, принимаемые этим полиномом на двоичных интервалах ранга n. Тогда

$$c_k = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} b_l, \quad 0 \le k \le 2^n - 1,$$

и

$$b_l = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{l,k}^{(n)} c_k, \quad 0 \le l \le 2^n - 1.$$

1.19. Пусть $f \in L^1(\Delta)$ и

$$S_{2^n}(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j w_j(x), \quad c_j = \int_0^1 f(t) w_j(t)\, dt, \quad x \in \Delta.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_{2^n}\|_{L^1(\Delta)} = 0.$$

1.20. Система Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ полна во всех пространствах $L^q(\Delta)$, $1 \le q < \infty$, а в пространстве $L^2(\Delta)$ она является ортонормированным базисом.

§ 2. Дискретные преобразования Уолша и Виленкина – Крестенсона

Для произвольной функции g, заданной на множестве $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ и принимающей комплексные значения, *преобразование Уолша* обозначается $\widehat{g}$ и определяется по формуле

$$\widehat{g}(j) := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(k) w_j(k2^{-n}), \quad 0 \le j \le 2^n - 1.$$

2.1. Формула обращения преобразования Уолша имеет вид

$$g(k) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \widehat{g}(j) w_k(j2^{-n}), \quad 0 \le k \le 2^n - 1.$$

Поскольку $w_j(k2^{-n}) = w_k(j2^{-n}) = w_{j,k}^{(n)}$, из **1.18** имеем:

1) произвольный полином Уолша $w(x)$ степени $2^n - 1$ восстанавливается по своим значениям на двоичных интервалах ранга n с помощью переобразования Уолша;

2) для данного полинома Уолша $w(x)$ его значения на двоичных интервалах $I_l^{(n)}$ могут быть вычислены с помощью обратного преобразования Уолша.

2.2. Пусть функция f интегрируема по Риману на $[0,1]$ и пусть $g_n(k) = f(k2^{-n})$ для $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n(j) = \int_0^1 f(x) w_j(x)\, dx, \quad j \in \mathbf{Z}_+.$$

Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, имеющего двоичное разложение

$$k = k_{n-1}2^{n-1} + k_{n-2}2^{n-2} + \cdots + k_0, \quad k_i \in \{0,1\},$$

полагают

$$\mathrm{rev}_1(k) = k_0, \quad \mathrm{rev}_\nu(k) := k_0 2^{\nu-1} + k_1 2^{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-1}, \quad \nu \in \{2, \ldots, n\}.$$

2.3. Для любых $\sigma \in \{0,1\}$, $\nu \in \{2, \ldots, n\}$ имеют место рекуррентные формулы

$$\mathrm{rev}_1(\sigma) = \sigma, \quad \mathrm{rev}_\nu(2l + \sigma) = \sigma 2^{\nu-1} + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \quad l \in \{0, 1, \ldots, 2^{\nu-1} - 1\}.$$

2.4. Преобразование Уолша произвольной функции $g : \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} \to \mathbf{C}$ может быть вычислено с помощью следующих формул

$$x_n(k) = g(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\};$$

$$x_\nu(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}) = \frac{1}{2}\left(x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu}) + (-1)^\sigma x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1})\right),$$

$$\nu \in \{n-1, n-2, \ldots, 0\}, \quad \sigma \in \{0,1\}, \quad l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\};$$

$$\widehat{g}(k) = x_0(\mathrm{rev}_n(k)), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

2.5. Обратное преобразование Уолша может быть вычислено по формулам

$$x_0(k) = \widehat{g}(\mathrm{rev}_n(k)), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\};$$

$$x_{\nu+1}(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}) = x_\nu(l + s2^{n-\nu}) + (-1)^\sigma x_\nu(l + s2^{n-\nu} + \sigma 2^{n-\nu-1}),$$

$$\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad \sigma \in \{0,1\}, \quad l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, 2^\nu - 1\};$$

$$g(k) = x_n(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Заданные в **2.4** и **2.5** преобразования называют соответвенно *прямым и обратным быстрым преобразованием Уолша.*

Пусть $N = p^n$, где p и n – натуральные числа, большие 1. Через $\mathbf{C}_N$ обозначается пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$. Скалярное произведение и норма в $\mathbf{C}_N$ определяются равенствами

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Для целого неотрицательного k через $\langle k\rangle_p$ обозначается остаток от деления k на p. Если $k, l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ имеют p-ичные разложения

$$k = k_{n-1}p^{n-1} + k_{n-2}p^{n-2} + \dots + k_0, \quad l = l_{n-1}p^{n-1} + l_{n-2}p^{n-2} + \dots + l_0, \quad k_i, l_i \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

то полагают

$$k \oplus_p l = \sum_{\nu=0}^{n-1} \langle k_\nu + l_\nu\rangle_p \, p^\nu \quad \text{и} \quad \{k, l\}_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu l_\nu.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. *Функции Виленкина – Крестенсона* $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ определяются равенствами

$$v_k(j) = \varepsilon_p^{\{k,l\}_n}, \quad k, j \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

и

$$v_k(j) = v_k(j+N), \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

2.6. Функции Виленкина – Крестенсона $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ обладают свойством мультипликативности

$$v_k(j) v_l(j) = v_{k \oplus_p l}(j), \quad j \in \mathbf{Z},$$

и образуют ортогональный базис в $\mathbf{C}_N$, причем $\|v_k\|^2 = N$, $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Для любой последовательности $\{x(j)\}$ из $\mathbf{C}_N$ имеем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k v_k(j), \quad a_k = N^{-1}\langle x, v_k\rangle. \tag{4}$$

Приведем два метода вычисления коэффициентов a_k разложения (4) по известным значениям $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$.

2.7. Пусть

$$x_0(k) = x(k), \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\};$$

$$x_\nu(l + \sigma p^{\nu-1} + s p^\nu) = \frac{1}{p} \sum_{\tau=0}^{p-1} \varepsilon_p^{-\sigma\tau} x_{\nu-1}(l + \tau p^{\nu-1} + s p^\nu),$$

$$\nu \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sigma \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

$$l \in \{0, 1, \dots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \dots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда

$$a_k = x_n(k), \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

2.8. Пусть

$$y_0(k) = x(k), \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\};$$

$$y_\nu(l p^{n-\nu+1} + \sigma p^{n-\nu} + s) = \frac{1}{p} \sum_{\tau=0}^{p-1} \varepsilon_p^{-\sigma\tau} y_{\nu-1}(l p^{n-\nu-1} + \tau p^{n-\nu} + s),$$

$$\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \sigma \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$
$$l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда
$$a_k = y_n(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Заданные в **2.7** и **2.8** преобразования называют *прямыми быстрыми преобразованиями Виленкина – Кристенсона.* Обращая формулы, задающие эти преобразования, получаем следующие два метода вычисления значений $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ по известным коэффициентам a_k.

2.9. Пусть
$$x_n(k) = a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\};$$
$$x_{\nu-1}(l + \tau p^{\nu-1} + sp^{\nu}) = \sum_{\sigma=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\sigma\tau} x_\nu(l + \sigma p^{\nu-1} + sp^{\nu}),$$
$$\nu \in \{n, n-1, \ldots, 1\}, \quad \tau \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$
$$l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда
$$x(k) = x_0(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

2.10. Пусть
$$y_n(k) = a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\};$$
$$y_{\nu-1}(lp^{n-\nu-1} + \tau p^{n-\nu} + s) = \sum_{\sigma=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\sigma\tau} y_\nu(lp^{n-\nu+1} + \sigma p^{n-\nu} + s),$$
$$\nu \in \{n, n-1, \ldots, 1\}, \quad \tau \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$
$$l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}, \quad s \in \{0, 1, \ldots, p^{n-\nu} - 1\}.$$

Тогда
$$x(k) = y_0(k), \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Заданные в **2.9** и **2.10** преобразования называют *обратными быстрыми преобразованиями Виленкина – Кристенсона.*

Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, имеющего p-ичное разложение
$$k = k_{n-1}p^{n-1} + k_{n-2}p^{n-2} + \cdots + k_0, \quad k_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$
полагают
$$\mathrm{rev}_1^{(p)}(k) = k_0, \quad \mathrm{rev}_\nu^{(p)}(k) := k_0 p^{\nu-1} + k_1 p^{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-1}, \quad \nu \in \{2, \ldots, n\}.$$

В частности, при $p = 2$ имеем $\mathrm{rev}_\nu^{(2)}(k) = \mathrm{rev}_\nu(k)$. Справедливо следующее обобщение утверждения **2.3.**

2.11. Для любых $\sigma \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\nu \in \{2, \ldots, n\}$ имеют место рекуррентные формулы

$$\mathrm{rev}_1^{(p)}(\sigma) = \sigma, \quad \mathrm{rev}_\nu^{(p)}(p\,l + \sigma) = \sigma p^{\nu-1} + \mathrm{rev}_{\nu-1}^{(p)}(l), \quad l \in \{0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1\}.$$

§ 3. Обобщенные функции Уолша и мультипликативные системы на полупрямой

Пусть $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ и p – натуральное число, большее 1. Как обычно, целая и дробная части числа x обозначаются через $[x]$ и $\{x\}$ соответственно.

Для каждого $x \in \mathbf{R}_+$ и любого $j \in \mathbf{N}$ числа x_j, $x_{-j} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ определим равенствами

$$x_j = [p^j x] (\mathrm{mod}\, p), \qquad x_{-j} = [p^{1-j} x] (\mathrm{mod}\, p). \tag{5}$$

Эти числа являются цифрами p-ичного разложения числа x:

$$x = \sum_{j<0} x_j p^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j p^{-j}.$$

При этом

$$[x] = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} p^{j-1}, \quad \{x\} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p^{-j}.$$

Напомним, что $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$ и для целого k через $\langle k \rangle_p$ обозначается остаток от деления k на p. Легко видеть, что $\langle k \rangle_p = k - [\,k/p\,]\,p$.

Для любых $x, y \in \mathbf{R}_+$ положим

$$x \oplus y = \sum_{j<0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j-1} + \sum_{j>0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j}, \tag{6}$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (5). В частности, при $p = 2$ имеем

$$x \oplus y = \sum_{j<0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j>0} |x_j - y_j| 2^{-j}.$$

Равенство $z = x \ominus y$ означает, что $z \oplus y = x$ (в случае $p = 2$ бинарные операции $\ominus$ и $\oplus$ совпадают). Из определений видно, что

$$[x \oplus y] = [x] \oplus [y] \quad \text{и} \quad \{x \oplus y\} = \{x\} \oplus \{y\}.$$

Кроме того, если $k, l \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$, то $k \oplus l = k \oplus_p l$ (см. §2).

3.1. Бинарная операция $\oplus$ на $\mathbf{R}_+$ коммутативна, но не ассоциативна.

Пусть $w_1(x)$ – функция, заданная на $[0,1)$ формулой

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/p), \\ \varepsilon_p^l, & x \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}),\ l \in \{1, \ldots, p-1\}, \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbf{R}_+$ так, что $w_1(x+1) = w_1(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}_+$. Тогда *система обобщенных функций Уолша* $\{w_l \mid l \in \mathbf{Z}_+\}$ на $\mathbf{R}_+$ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_l(x) = \prod_{j=0}^{k} (w_1(p^j x))^{l_j}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}_+,$$

где l_j берутся из p-ичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} l_j p^j, \quad l_j \in \{0, 1 \ldots, p-1\}, \quad l_k \neq 0, \quad k = k(l),$$

(классическая система Уолша соответствует случаю $p = 2$). Легко видеть, что

$$w_l(x+1) = w_l(x) \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbf{Z}_+, \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Числовые промежутки

$$[kp^{-n}, (k+1)p^{-n}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

называются *p-адическими интервалами ранга n.*

3.2. Обобщенные функции Уолша $w_l(x)$, $0 \le l \le p^n - 1$, принимают постоянные значения на каждом из p-адических интервалов ранга n, причем $w_l(x) = 1$ для $x \in [0, p^{-n})$.

3.3. Пусть $l, s \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ и $m = \mathrm{rev}_n^{(p)}(l)$. Тогда

$$w_l(sp^{-n}) = v_m(s),$$

где v_m – функции Виленкина – Крестенсона.

Таким образом, к обобщенным полиномам Уолша

$$w(x) = \sum_{l=0}^{p^n-1} a_l w_l(x)$$

применимы быстрые алгоритмы Виленкина – Крестенсона (см. §2).

Для любых $x, y \in \mathbf{R}_+$ положим

$$\chi(x,y) = \varepsilon_p^{t(x,y)}, \qquad t(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j\, y_{-j} + x_{-j}\, y_j), \tag{7}$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (5). В частности, $\chi(x,y) = (-1)^{t(x,y)}$ при $p = 2$.

3.4. Справедливы равенства

$$\chi(x,0) = \chi(0,y) = |\chi(x,y)| = 1, \quad \chi(x,y) = \chi(y,x) = w_{[y]}(\{x\}) w_{[x]}(\{y\}), \quad x, y \in \mathbf{R}_+,$$

и

$$\chi(x,l)=w_l(\{x\}),\quad l\in\mathbf{Z}_+,\quad x\in\mathbf{R}_+.$$

Кроме того, при любом натуральном j

$$\chi(x,p^{-j}l)=\chi(p^{-j}x,l)=w_l(p^{-j}x),\quad l\in\mathbf{Z}_+,\quad x\in[0,p^j).$$

3.5. Пусть $x,y,z\in\mathbf{R}_+$ и число $x\oplus y$ не является p-ично рациональным. Тогда

$$\chi(x,z)\chi(y,z)=\chi(x\oplus y,z)\quad\text{и}\quad\chi(x,z)\overline{\chi(y,z)}=\chi(x\ominus y,z).\tag{8}$$

Таким образом, при фиксированных x,z равенства (8) верны для всех y из $\mathbf{R}_+$, кроме счетного множества.

§ 4. Кратномасштабный p-анализ в $L^2(\mathbf{R}_+)$

Кратномасштабным p-анализом или *p-кратномасштабным анализом* (сокращенно: *p-КМА*) в $L^2(\mathbf{R}_+)$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j\subset L^2(\mathbf{R}_+)$, $j\in\mathbf{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $V_j\subset V_{j+1}$ для $j\in\mathbf{Z}$;

(ii) $\overline{\bigcup V_j}=L^2(\mathbf{R}_+)$ и $\bigcap V_j=\{0\}$;

(iii) $f(\cdot)\in V_j\iff f(p\,\cdot)\in V_{j+1}$ для $j\in\mathbf{Z}$;

(iv) $f(\cdot)\in V_0\implies f(\cdot\oplus k)\in V_0$ для $k\in\mathbf{Z}_+$;

(v) существует функция $\varphi\in L^2(\mathbf{R}_+)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot\ominus k)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция φ из условия (v) называется *масштабирующей функцией* в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

4.1. Всякая масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R}_+)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x)=p\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+}a_\alpha\varphi(px\ominus\alpha),\quad\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+}|a_\alpha|^2<+\infty.\tag{9}$$

Функциональное уравнение (9) называется *масштабирующим уравнением.*

Функция ψ называется *ортогональным вейвлетом* в $L^2(\mathbf{R}_+)$, если система функций $\{2^{j/2}\psi(2^j\cdot\ominus k)\mid j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

4.2. Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющая уравнению (9) при $p=2$. Тогда функция ψ, заданная формулой

$$\psi(x)=2\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+}(-1)^\alpha\overline{a}_{1\oplus\alpha}\varphi(2x\ominus\alpha),\tag{10}$$

является ортогональным вейвлетом в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Для произвольной функции $\varphi\in L^2(\mathbf{R}_+)$ положим

$$\varphi_{j,k}(x)=p^{j/2}\,\varphi(p^jx\ominus\,k),\qquad j\in\mathbf{Z},\quad k\in\mathbf{Z}_+,$$

и

$$V_j = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbf{Z}_+\}, \qquad j \in \mathbf{Z}. \tag{11}$$

Будем говорить, что *функция* φ *генерирует* p*-КМА в* $L^2(\mathbf{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbf{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств (11) является p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$. Если функция φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$, то она является масштабирующей функцией в $L^2(\mathbf{R}_+)$. В этом случае для каждого $j \in \mathbf{Z}$ система $\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в V_j и по функции φ могут быть определены *вейвлеты* $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,k}(x) = p^{j/2}\psi_l(p^j x \ominus k), \qquad 1 \le l \le p-1, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}_+,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R}_+)$. При $p = 2$ по формуле (10) получается один вейвлет ψ.

Для произвольных $p, n \in \mathbf{N}, p \ge 2$, рассмотрим масштабирующее уравнение вида

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(p\,x \ominus \alpha). \tag{12}$$

Решение φ уравнения (12) называется *финитным*, если φ имеет компактный носитель на $\mathbf{R}_+$. Если масштабирующее уравнение (12) имеет ненулевое финитное решение $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$, то это решение единственно с точностью до умножения на константу. Нормируем это решение условием

$$\int_{\mathbf{R}_+} \varphi(t)\, dt = 1. \tag{13}$$

Характеристическую функцию множества $E \subset \mathbf{R}_+$ обозначим через $\mathbf{1}_E$.

4.3. Если $a_0 = \dots = a_{p-1} = 1/p$ и все $a_\alpha = 0$ для $\alpha \ge p$, то решением уравнения (12) является функция $\varphi = \mathbf{1}_{[0,p^{n-1})}$; в частности, при $n = 1$ функция φ является масштабирующей функцией Хаара.

Пусть $\{w_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Z}_+\}$ – система обобщенных функций Уолша на $\mathbf{R}_+$, соответствующих выбранному значению p (см. § 3). Обобщенный полином Уолша

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(\omega)} \tag{14}$$

называется *маской* уравнения (12).

4.4. Пусть $b_s = m(sp^{-n})$ – значения, принимаемые маской m уравнения (12) на p-адических интервалах ранга n, т.е.

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(sp^{-n})} = b_s, \quad 0 \le s \le p^n - 1. \tag{15}$$

Тогда

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n}\sum_{s=0}^{p^n-1} b_s w_\alpha(s/p^n), \quad 0\le\alpha\le p^n-1. \tag{16}$$

и обратно, из формул (16) следуют (15).

4.5. Если функция $\varphi\in L^2(\mathbf{R}_+)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (12) и условию (13), то

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\varphi\subset[0,p^{n-1}].$$

Кроме того, если система $\{\varphi(\cdot\ominus k)|\, k\in\mathbf{Z}_+\}$ ортогональна в $L^2(\mathbf{R}_+)$, то маска (14) удовлетворяет условиям

$$m(0)=1, \quad |m(\omega)|^2+|m(\omega+1/p)|^2+\dots+|m(\omega+(p-1)/p)|^2=1, \quad \omega\in[0,1/p). \tag{17}$$

Условия (17) эквивалентны равенствам

$$b_0=1, \quad |b_l|^2+|b_{l+p^{n-1}}|^2+\dots+|b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2=1, \quad 0\le l\le p^{n-1}-1, \tag{18}$$

где $b_l=m(lp^{-n})$. В частности, для $p=n=2$ получаются три равенства

$$b_0=1, \quad b_2=0, \quad |b_1|^2+|b_3|^2=1,$$

а для $p=3, n=2$ имеем

$$b_0=1, \quad b_3=b_6=0, \quad |b_1|^2+|b_4|^2+|b_7|^2=|b_2|^2+|b_5|^2+|b_8|^2=1.$$

Кроме того, из (18) при любом n следуют равенства

$$b_{p^{n-1}}=b_{2p^{n-1}}=\dots=b_{(p-1)p^{n-1}}=0.$$

Пусть $E\subset\mathbf{R}_+$. Множество E назовем *конгруэнтным* [0,1) *по модулю* $\mathbf{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x\in[0,1)$ существует $k\in\mathbf{Z}_+$ такое, что $x\oplus k\in E$.

Пусть m – маска масштабирующего уравнения (12). Будем говорить, что маска m удовлетворяет *модифицированному условию Коэна*, если существует множество E такое, что:

1) E является объединением конечного числа p-адических интервалов, конгруэнтно [0,1) по модулю $\mathbf{Z}_+$ и содержит некоторый интервал вида $[0,\delta)$, $\delta>0$;

2) выполнено неравенство

$$\inf_{j\in\mathbf{N}}\inf_{\omega\in E}|m(p^{-j}\omega)|>0. \tag{19}$$

Отметим, что поскольку $m(\omega) \equiv 1$ на $[0, p^{-n})$, для проверки неравенства (19) достаточно найти номер j_0 такой, что $E/2^{j_0} \subset [0, p^{-n})$, а затем убедиться, что полином m не обращается в нуль на множествах $E/2, \ldots, E/2^{j_0-1}$.

Пусть $M \subset [0,1)$ и

$$T_pM = \bigcup_{l=0}^{p-1} \Big\{ l/p + \omega/p \mid \omega \in M \Big\}.$$

Множество M называется *блокированным* (для маски m), если оно представимо в виде объединения p-адических интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, p^{-n+1})$ и обладает свойством $T_pM \subset M \cup \mathrm{Null}\, m$, где $\mathrm{Null}\, m$ – множество всех нулей маски m на интервале [0,1). Например, интервал $[1 - p^{1-n}, 1)$ является блокированным множеством, если маска m обращается в нуль в точках $l/p - 1/p^n$, $1 \le l \le p-1$.

4.6. Если маска m финитного L^2-решения φ уравнения (12) удовлетворяет условиям (17), а также любому из следующих двух условий:

1) m удовлетворяет модифицированному условию Коэна,

2) m не имеет блокированных множеств,

то φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Для произвольных $p, n \in \mathbf{N}, p \ge 2$, определим коэффициенты a_α такие, что масштабирующее уравнение (12) имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$ со следующими свойствами:

1) $\mathrm{supp}\, \varphi \subset [0, p^{n-1}]$,

2) φ является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша,

3) φ генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Пусть $\mathbf{N}_0(p,n)$ – множество всех натуральных чисел $l \ge p^{n-1}$, у которых в p-арном разложении

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j, \quad \mu_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad \mu_k \ne 0, \quad k = k(l) \in \mathbf{Z}_+, \tag{20}$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_{j+n-1})$ отсутствуют наборы

$$(0, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, \ldots, 0, 2), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, p-1).$$

Положим $\mathbf{N}(p,n) = \{1, 2, \ldots, p^{n-1} - 1\} \cup \mathbf{N}_0(p,n)$. Имеем, в частности,

$$\mathbf{N}(2,2) = \{2^{j+1} - 1 \mid j \in \mathbf{Z}_+\} = \{1, 3, 7, 15, 31, \ldots\},$$

$$\mathbf{N}(2,3) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 42, \ldots\},$$

$$\mathbf{N}(p,2) = \{\sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j \mid \mu_j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}, k \in \mathbf{Z}_+\} \ (p \ge 3).$$

Для каждого $l \in \mathbf{N}(p,n), 1 \le l \le p^n - 1$, выберем (действительное или комплексное) число b_l так, чтобы выполнялись условия (18). Положим

$$\gamma(i_1, i_2, \ldots, i_n) = b_l, \quad \text{если} \quad l = i_1p^0 + i_2p^1 + \cdots + i_np^{n-1}, \quad i_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

После этого представим каждое $l \in \mathbf{N}(p,n)$ в виде p-арного разложения (20) и определим коэффициенты $c_l[m]$ с помощью равенств:

$$c_l[m] = \gamma(\mu_0, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(l) = 0;$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_1, 0, 0, \ldots, 0, 0)\gamma(\mu_0, \mu_1, 0, \ldots, 0, 0), \quad \text{если} \quad k(l) = 1;$$

$$\ldots$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_k, 0, 0, \ldots, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, \ldots, 0, 0)\ldots\gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}),$$

если $k = k(l) \geq n-1$. Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются "сдвигом" индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из p-арного разложения (20) числа l (например, за множителем $\gamma(\mu_{k-l}, \mu_{k-l+1}, \ldots, \mu_k, 0, 0, \ldots, 0)$ следует $\gamma(\mu_{k-l-1}, \mu_{k-l}, \ldots, \mu_k, 0, \ldots, 0)$).

4.7. Пусть параметры b_s удовлетворяют условиям (18), коэффициенты a_α уравнения (12) определены из системы

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{w_\alpha(sp^{-n})} = b_s, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1, \tag{21}$$

а функция φ задана разложением

$$\varphi(x) = (1/p^{n-1})\mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1})(1 + \sum_{l \in \mathbf{N}(p,n)} c_l[m]w_l(x/p^{n-1})), \quad x \in \mathbf{R}_+. \tag{22}$$

Предположим, что для маски m уравнения (12) выполнено любое из условий:

1) m удовлетворяет модифицированному условию Коэна,

2) m не имеет блокированных множеств.

Тогда функция φ является решением уравнения (12) и генерирует p-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Отметим, что система (21) может быть записана в виде

$$m(sp^{-n}) = b_s, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1,$$

а коэффициенты a_α находятся из этой системы по формулам (16). Кроме того, если $b_l \neq 0$ для всех $0 \leq l \leq p^{n-1}-1$, то маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна на множестве $E = [0,1)$ (так как $m(\omega) \neq 0$ на $[0, 1/2)$).

Примеры масштабирующих функций в $L^2(\mathbf{R}_+)$, получаемых указанным в **4.7** методом, приведены в **4.8 - 4.13**

4.8. При $p = n = 2$ положим

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = b,$$

где $0 < |a| < 1$, $|b| = \sqrt{1 - |a|^2}$. Тогда из (22) получим масштабирующую функцию Лэнга:

$$\varphi(x) = (1/2)\chi_{[0,1)}(x/2)(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}(x/2)), \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{3} c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1+a+b}{2}, \quad c_1 = \frac{1+a-b}{2}, \quad c_2 = \frac{1-a-b}{2}, \quad c_3 = \frac{1-a+b}{2}.$$

Эта функция генерирует 2-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$ и обладает фрактальным свойством:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+a-b)/2 + b\varphi(2x) & \text{для} \quad 0 \le x < 1, \\ (1-a+b)/2 - b\varphi(2x-2) & \text{для} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Кроме того, при условии $|b| < 1/2$ система $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot \ominus k) \mid j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}_+\}$, где вейвлет ψ определен по φ с помощью формулы (10), является безусловным базисом во всех пространствах $L^q(\mathbf{R}_+)$, $1 < q < \infty$.

4.9. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/4) \cup [3/8, 1/2), \\ b, & \omega \in [1/4, 3/8), \\ 0, & \omega \in [1/2, 3/4) \cup [7/8, 1), \\ \beta, & \omega \in [3/4, 7/8), \end{cases}$$

где $0 \le |b| < 1$, $|\beta| = \sqrt{1 - |b|^2}$. Для маски m модифицированное условие Коэна выполнено на множестве $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$. Пользуясь (22), получаем масштабирующую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\chi_{[0,1)}(x/4)\left[1 + w_1(x/4) + bw_2(x/4) + w_3(x/4) + \beta w_6(x/4)\right]. \tag{23}$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{7} c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = (3 + b + \beta)/4, \quad c_1 = (3 + b - \beta)/4, \quad c_2 = a_6 = (1 - b - \beta)/4,$$

$$c_3 = c_7 = (1 - b + \beta)/4, \quad c_4 = (-1 + b + \beta)/4, \quad c_5 = (-1 + b - \beta)/4.$$

4.10. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ b_3 = c,\ b_4 = 0,\ b_5 = \alpha,\ b_6 = \beta,\ b_7 = \gamma,$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Тогда

$$\gamma(1,0,0) = a, \quad \gamma(0,1,0) = b, \quad \gamma(1,1,0) = c,$$

$$\gamma(1,0,1) = \alpha, \quad \gamma(0,1,1) = \beta, \quad \gamma(1,1,1) = \gamma$$

и

$$a_l[m] = \gamma(\mu_k, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0) \dots \gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2),$$

где

$$l = \sum_{i=0}^{k} \mu_i 2^i, \quad \mu_k = 1, \quad \mu_i \in \{0, 1\}.$$

Разложение (22) принимает вид

$$\varphi(x) = (1/4)\chi_{[0,1)}(y)(1 + \sum_{l \in \mathbf{N}(2,3)} c_l[m] w_l(y))$$

$$= (1/4)\chi_{[0,1)}(y)(1 + a\, w_1(y) + ab\, w_2(y) + ac\, w_3(y) + ab\alpha\, w_5(y)$$
$$+ ac\beta\, w_6(y) + ac\gamma\, w_7(y) + ab^2\alpha\, w_{10}(y) + abc\alpha\, w_{11}(y) +$$
$$+ ac\beta\gamma\, w_{14}(y) + ac\gamma^2\, w_{15}(y) + ab^2\alpha^2\, w_{21}(y) + abc\alpha\beta\, w_{22}(y) + ab\alpha\beta\gamma\, w_{23}(y)$$
$$+ abc\alpha\beta\, w_{26}(y) + ac^2\alpha\beta\, w_{27}(y) + ac\alpha\beta\gamma\, w_{29}(y) + ac\beta\gamma^2\, w_{30}(y) + \dots),$$

где $y = x/4$. Если $a = 0$ или $c = 0$, то система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ линейно зависима. Если же a и c ненулевые, то функция φ генерирует 2-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$(модифицированное условие Коэна в случае $abc \neq 0$ выполнено для $E = [0, 1)$, а в случае $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ оно имеет место для $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$). Эта функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{7} c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma),$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma),$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(1 + a - b - c - \alpha + \beta + \gamma),$$
$$c_4 = \frac{1}{4}(1 - a + b - c - \alpha + \beta - \gamma),$$
$$c_5 = \frac{1}{4}(1 - a + b - c + \alpha - \beta + \gamma),$$
$$c_6 = \frac{1}{4}(1 - a - b + c - \alpha - \beta + \gamma),$$
$$c_7 = \frac{1}{4}(1 - a - b + c + \alpha + \beta - \gamma).$$

Масштабирующие функции, рассмотренные в **4.8** и **4.9**, получаются при $a = 1$ из **4.10** соответственно в случаях: 1) $b = c$ и 2) $0 \le |b| < 1$, $c = 1$.

4.11. Пусть $p = 2$. Выберем комплексные числа $b_0, b_1, \dots, b_{2^{n-1}-1}$ такими, что

$$b_0 = 1 \quad \text{и} \quad 0 < |b_l| \le 1, \quad 1 \le l \le 2^{n-1} - 1,$$

а затем определим $b_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}+1}, \dots, b_{2^n-1}$ по формуле

$$|b_{l+2^{n-1}}| = \sqrt{1 - |b_l|^2}, \quad 0 \le l \le 2^{n-1} - 1.$$

Применив формулы (16), найдем коэффициенты маски

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{2^n-1} a_\alpha w_k(\omega),$$

принимающей на двоичных интервалах $I_l^{(n)}$, $0 \le l \le 2^n - 1$, значения b_l. Так как b_l для $0 \le l \le 2^{n-1} - 1$ выбраны ненулевыми, то $|m(\omega)| > 0$ для $\omega \in [0, 1/2)$. Следовательно, маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна. Соответствующая масштабирующая функция φ может быть задана разложением (22), коэффициенты которого по параметрам b_l определяются однозначно (с точностью до единичных по модулю множителей).

При $n = 2$ и $n = 3$ из **4.11** получаются масштабирующие функции, приведенные соответственно в **4.8** и **4.10**.

4.12. Пусть φ определена по формуле (22) при $p = 3$, $n = 2$ и

$$b_0 = 1,\ b_1 = a,\ b_2 = \alpha,\ b_3 = 0,\ b_4 = b,\ b_5 = \beta, b_6 = 0, b_7 = c,\ b_8 = \gamma,$$

где

$$|\,a|^2 + |\,b|^2 + |\,c|^2 = |\,\alpha|^2 + |\,\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \qquad a \ne 0, \quad \alpha \ne 0.$$

Тогда φ генерирует 3-КМА в $L^2(\mathbf{R}_+)$ и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{8} c_k \varphi(3x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{3}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$c_1 = \frac{1}{3}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$c_2 = \frac{1}{3}(1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3),$$

$$c_4 = \frac{1}{3}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$c_5 = \frac{1}{3}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$c_6 = \frac{1}{3}(1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$c_7 = \frac{1}{3}(1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

$$c_8 = \frac{1}{3}(1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$.

4.13. Пусть $p = 2$, $n \geq 3$. Положим

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/2 - 1/2^{n-1}) \cup [1/2 - 1/2^n, 1/2), \\ b, & \omega \in [1/2 - 1/2^{n-1}, 1/2 - 1/2^n), \\ 0, & \omega \in [1/2, 1/2 - 1/2^n) \cup [1 - 1/2^n, 1), \\ \beta, & \omega \in [1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n), \end{cases}$$

где $0 \leq |b| < 1$, $|\beta| = \sqrt{1 - |b|^2}$. Тогда из (22) получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi_{[0,1)}(x/2^{n-1})(1 + \sum_{l=1}^{2^{n-1}-3} w_l(x/2^{n-1}) + b w_{2^{n-1}-2}(x/2^{n-1})$$
$$+ w_{2^{n-1}-1}(x/2^{n-1}) + \beta w_{2^n-2}(x/2^{n-1})). \qquad (24)$$

Для этой функции φ модифицированное условие Коэна выполнено на множестве

$$E = [0, 1 - 1/2^{n-2}) \cup [1 - 1/2^{n-1}, 1) \cup [2 - 1/2^{n-2}, 2 - 1/2^{n-1});$$

если $b \neq 0$, то можно выбрать также $E = [0, 1)$.

Отметим, что в случае $n = 3$ формулы (23) и (24) совпадают.

Список литературы

[1] *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.

[2] *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. М.: МГУП, 2005.

[3] *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

[4] *Малоземов В.Н., Машарский С.М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина – Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. С. 111-157.

[5] *Протасов В.Ю., Фарков Ю.А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой// Матем. сборник. 2006 (в печати).

[6] *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С. 193-220.

[7] *Farkov Yu.A.* Orthogonal p-wavelets on $\mathbf{R}_+$ // Proc. Intern. Conf. "Wavelets and splines" (July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia). St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2005. P. 4-26.

[8] *Lang W.C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. P. 307–317.

[9] *Lang W.C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533-544.

[10] *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N.Y.: Adam Hilger, 1990.